(昭和 43 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

有限要素法による船体振動の付加質量および 付加慣性モーメントの計算

正員 松 浦 義 一*
正員 川 上 肇**

Calculation of Added Virtual Mass and Added Virtual Mass Moment of Inertia of Ship
Hull Vibration by the Finite Element Method

By Yoshikazu Matsuura, *Member*
Hajime Kawakami, *Member*

Summary

The added virtual mass and the added virtual mass moment of inertia induced by the vibration of a ship are defined as the equivalent mass and the equivalent mass moment of inertia deduced from the effects of water surrounding a vibrating ship. These equivalent mass and the equivalent mass moment of inertia can be estimated either from the inertia force (or moment) concept or from the kinetic energy concept as long as the ideal fluid is concerned, and the solution of the Laplace's differential equation is required in both cases.

This paper, dealing with the problem by the use of the inertia force(or moment)concept, shows that the so-called“finite element method”can be applied, with the aid of a high speed digital computer, to obtain the approximate solution of the Laplace's differential equation with any arbitrary boundary condition. In order to examine the accuracy of this method, the inertia coefficients C_V , C_H and C_T of vertical, horizontal and rotational vibrations of bars of circular and rectangular cross section are computed first by this method. Then, as an application of this method, the effects on the inertia coefficients of the restricted water and of the bilgekeel are shown numerically.

1 緒 言

船体振動や船体運動の付加質量を理論的に求める場合、ある境界条件の下でラプラスの方程式を解く必要がある。ラプラスの方程式の解は複素ポテンシャル、等角写像等を用いて解析的に求めるのが普通である。特定の形状の境界をもつ場合、たとえば 2 次元では円、矩形、Lewis form、3 次元では回転楕円体等についての解は解析的な方法によつて解かれている。しかし任意形状の境界をもつ場合にはラプラスの方程式を解析的に解くことは困難である。

最近電子計算機の発達に伴つて弾塑性力学や構造力学の分野で有限要素法あるいはマトリックス法と呼ばれる新しい構造解析法が開発され急速に発展してきた。有限要素法は Rayleigh-Ritz の方法と等価なエネルギー法の一つであり、この方法によりラプラスの方程式の近似解が求まることが知られている¹⁾。また有限要素法による解の厳密解への収束については変分法の原理により数学的に証明されている。

* 大阪大学工学部

** 川崎重工業株式会社技術研究所

本報では物体が自由表面をもつ流体中で振動する場合の2次元の付加質量の問題を有限要素法によつて取り扱い、まず有限要素法による結果と他の方法による結果との比較を行なつて有限要素法の精度を確かめた。つぎに矩形断面に対して付加質量係数および付加慣性モーメント係数を求めるとともに、付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響および Bilge Keel の影響を調べた。

2 基礎方程式および境界条件

物体が流体中で運動する場合の付加質量の計算法として次の2つの方法が考えられる。1つは物体が流体中で運動しているときの流体の運動エネルギーを求め、これと付加質量が真空中で物体と同じ速度で運動しているときの運動エネルギーが等しいと仮定して付加質量を求める方法である。この方法による付加質量は運動エネルギーにより定義される付加質量である²⁾。船体振動の付加質量の問題の大部分は上の方法によつて求められている³⁾⁴⁾⁵⁾。もう1つは物体が流体中で運動するときの物体に作用する加速度抵抗を求め、加速度に比例した抵抗の比例定数として付加質量を定める方法である。この方法によつて求まる付加質量は慣性力により定義される付加質量である²⁾。本報では後者の計算法により付加質量を求める。

図 1

図1に示すような任意形状の横断面をもつ無限長の柱状の物体Gが、自由表面をもつ完全流体中で周期的な運動を行なうものとし、問題を2次元として取り扱う。自由表面上の任意の点を原点とし水平方向に x 軸、垂直方向に y 軸をとれば、速度ポテンシャル ϕ はラプラスの方程式

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1)$$

および境界条件

$$\text{自由表面 } (y=0) \text{ において } \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

物体の表面において

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = v_n \quad (3)$$

を満足する。ただし(2)の t は時間、 g は重力の加速度、(3)の n は物体の表面において外向きに立てた法線、 v_n は物体の表面の法線方向の速度である。一方流体中の圧力 p (変動圧力) と速度ポテンシャル ϕ の間には次の関係がある。

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (4)$$

ここに ρ は流体の密度である。微分方程式(1)および境界条件(2)および(3)を t で微分した式から(4)を用いて ϕ を消去し、さらに ω を円振動数として $p = p(x, y) \sin \omega t$ において変数分離を行なうと、微分方程式(1)は

$$\nabla^2 p = 0 \quad (5)$$

また境界条件(2)および(3)はそれぞれ

$$\text{自由表面 } (y=0) \text{ において } \frac{\partial p}{\partial y} - \alpha p = 0 \quad (6)$$

$$\text{物体の表面において } \frac{\partial p}{\partial n} + q = 0 \quad (7)$$

となる。ここに

$$\alpha = \frac{\omega^2}{g}, \quad q = \rho \frac{\partial v_n}{\partial t} \quad (8)$$

船体振動のように振動数が大きい場合には自由表面における境界条件は次のようになる。

$$\text{自由表面 } (y=0) \text{ において } p = 0 \quad (9)$$

(5) および (6), (7) はダムの動水圧の問題を解く場合に使用される基礎方程式および境界条件である⁶⁾。

本報ではこれらの式を基礎方程式および境界条件として圧力 p の解を求め付加質量を計算する。

3 有限要素法による解法

境界条件 (6) および (7) の一般化した形として

$$\frac{\partial p}{\partial n} - \alpha p + q = 0 \quad (10)$$

を考え、この境界条件の下に微分方程式 (5) の近似解を求める。なお (10) において $q=0$, $n=y$ とすれば (6), $\alpha=0$ とすれば (7), また (10) を α で割り $\alpha \rightarrow \infty$ とすれば (9) の境界条件が得られる。

いま次のような積分 $I(p)$ を考える。

$$I(p) = \iint \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy + \int_c q p ds - \int_c \frac{1}{2} \alpha p^2 ds \quad (11)$$

ここに s は境界に沿つてとつた座標であり、積分記号 $\int_c$ の添字 c は境界に沿つて積分することを示す。変分法によれば、(11) の積分 I の値を最小にする p は境界条件 (10) を満足する微分方程式 (5) の解となる。逆に境界条件 (10) を満足する微分方程式 (5) の解は (11) の積分 I の値を最小にする。したがつて Rayleigh-Ritz の方法によつて微分方程式 (5) の近似解を求めることができる。すなわち圧力 p の分布形を仮定し、これを (11) に代入して積分 I の値が最小になるように p を定めると微分方程式 (5) の近似解が得られる。

図2に示すような有限の拡がりをもつ流体の領域を考え、領域を有限個の三角形要素に分割する。接点の総数を N とし、接点に $1, 2, \dots, N$ の番号を付け、各接点における圧力の値を $p_1, p_2, \dots, p_N$ とし、各接点に対応した関数を $f_1(x, y), f_2(x, y), \dots, f_N(x, y)$ とする。任意の点の圧力 p が

$$p = \sum_{i=1}^N p_i f_i(x, y) \quad (12)$$

であると仮定し、(12) を (11) に代入して $\partial I / \partial p_i = 0$ とおけば、 p_i に関する N 元 1 次連立代数方程式が得られる。

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{d} \quad (13)$$

ここに

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11}, & \dots, & a_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{N1}, & \dots, & a_{NN} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\mathbf{p} = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$$

$$\mathbf{d} = \{d_1, d_2, \dots, d_N\}$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} a_{ij} &= k_{ij} - h_{ij} \\ k_{ij} &= \iint \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial y} \right) dx dy \\ h_{ij} &= \int_c \alpha f_i f_j ds \\ d_i &= \int_c q f_i ds \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(15) より $k_{ij} = k_{ji}$, $h_{ij} = h_{ji}$ であるから $a_{ij} = a_{ji}$ となり (14) で与えられる行列 $\mathbf{A}$ は対称行列であることがわかる。

行列 $\mathbf{A}$ および ベクトル $\mathbf{d}$ の成分を求める。図2に示した三角形要素のうちの1つの三角形要素 ijm について考える。三角形要素内で圧力 p が直線的に変化するものと仮定し、接点 i, j, m における圧力 p の値をそれ

図 2

それ p_i, p_j, p_m 接点の座標を $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_m, y_m)$ とすれば、圧力 p は次のようになる。

$$p = p_i f_i(x, y) + p_j f_j(x, y) + p_m f_m(x, y) \quad (16)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} f_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \\ f_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2\Delta \\ f_m &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2\Delta \\ a_i &= x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = x_m - x_j \\ a_j &= x_m y_i - x_i y_m, \quad b_j = y_m - y_i, \quad c_j = x_i - x_m \\ a_m &= x_i y_j - x_j y_i, \quad b_m = y_i - y_j, \quad c_m = x_j - x_i \\ 2\Delta &= x_i y_j + x_j y_m + x_m y_i - x_j y_i - x_m y_j - x_i y_m \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

まず k_{ij} を求める。三角形要素 ijm についての k_{ij} を k_{ij}^e と書き、(15) の k_{ij} の式に (17) の f_i, f_j を代入し積分して k_{ij}^e を求めると

$$k_{ij}^e = (b_i b_j + c_i c_j) / 4\Delta \quad (18)$$

となる。領域全体についての k_{ij} は、(18) で与えられる k_{ij}^e をすべての三角形要素について加え合わせたものであるから

$$k_{ij} = \sum^R k_{ij}^e \quad (19)$$

となる。なお $\sum^R$ は全領域について加え合わせることを示す。

図 3

つぎに h_{ij} を求める。図 3 に示すように三角形要素 ijm の辺 ij が境界の一部になつている場合を考え、辺 ij の長さを L とし、 j 点を原点とし座標 s を辺 ij に一致させてとる。圧力 p は三角形要素内で直線的に変化すると仮定したから、辺 ij 上では

$$p = p_i \frac{s}{L} + p_j \left(1 - \frac{s}{L}\right) \quad (20)$$

となり、(17) の f_i および f_j は

$$\left. \begin{aligned} f_i &= s/L \\ f_j &= 1 - s/L \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となる。辺 ij についての h_{ij} を h_{ij}^s と書き、辺 ij 上で α の値が一定であるものとするれば、 h_{ij}^s は (15) の h_{ij} の式に (21) を代入することにより

$$h_{ij}^s = \begin{cases} \frac{1}{6} \alpha L & (i \neq j) \\ \frac{1}{3} \alpha L & (i = j) \end{cases} \quad (22)$$

で与えられる。また領域全体についての h_{ij} は境界上のすべての辺について加え合わせたものであるから

$$h_{ij} = \sum^B h_{ij}^s \quad (23)$$

となる。なお $\sum^B$ は境界上のすべての辺について加え合わせることを示す。

つぎに d_i を求める。いま辺 ij 上で q の値が直線的に変るものとし、 i 点および j 点における q の値をそれぞれ q_i および q_j とすれば、 q は圧力 p の式 (20) と同形となり

$$q = q_i \frac{s}{L} + q_j \left(1 - \frac{s}{L}\right) \quad (24)$$

となる。辺 ij についての d_i を d_i^s と書き、(15) の d_i の式に (21) の f_i および (24) を代入し積分すると d_i^s は

$$d_i^s = -\frac{1}{6} (2q_i + q_j) L \quad (25)$$

となる。領域全体についての d_i は次式で与えられる。

$$d_i = \sum_{j=1}^B d_i^s \quad (26)$$

a_{ij} は (19) および (23) を (15) の a_{ij} の式に代入すると求まり、 d_i は (26) で与えられるから、(13) の n 元 1 次連立代数方程式の係数および定数項が求まる。(13) の方程式を解けば接点 i における圧力 p_i が求まるのであるが、境界条件として圧力 p の値が与えられている場合には (13) の方程式に対して次のような変形を行なう必要がある。たとえば図 2 の R 点が $p=b$ の境界上にある場合を考えると、(13) の R 番目の方程式

$$\sum_{j=1}^N a_{Rj} p_j = d_R \quad (27)$$

の代わりに

$$p_R = b \quad (28)$$

を用いなければならない。したがって行列 $\mathbf{A}$ の成分 a_{Rj} ($j=1, 2, \dots, N$) を

$$a_{Rj} = \begin{cases} 1 & (j=R) \\ 0 & (j \neq R) \end{cases} \quad (29)$$

とおき、またベクトル $\mathbf{d}$ の R 番目の成分 d_R を

$$d_R = b \quad (30)$$

とする必要がある。

接点 i における圧力 p_i は方程式 (13) の解として

$$\mathbf{p} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{d} \quad (31)$$

で与えられる。流体中の任意の点の圧力 p は (16) によって計算できる。この圧力 p を物体の全表面について積分すれば物体に作用する加速度抵抗が求まる。 x 方向および y 方向の単位長さ当りの加速度抵抗 R_x および R_y は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \int p l_x ds \\ R_y &= \int p l_y ds \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

ここに l_x および l_y は物体の表面において外向きに立てた法線の方法線方向余弦である。図 3 に示すように辺 ij が物体の表面上にある場合を考え、辺 ij に作用する x 方向および y 方向の加速度抵抗 R_x^e および R_y^e を求める。辺 ij において外向きに立てた法線の方法線方向余弦 l_x, l_y は

$$\left. \begin{aligned} l_x &= (y_i - y_j)/L \\ l_y &= (x_j - x_i)/L \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

であるから、(32) に (20) および (33) を代入し積分すると加速度抵抗 R_x^e および R_y^e は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} R_x^e &= \frac{1}{2} (p_i + p_j) (y_i - y_j) \\ R_y^e &= \frac{1}{2} (p_i + p_j) (x_j - x_i) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

物体に作用する x 方向および y 方向の加速度抵抗 R_x および R_y は、(34) で与えられる加速度抵抗 R_x^e および R_y^e を物体の全表面について加え合わせたものであるから

$$\left. \begin{aligned} R_x &= \sum_{G=1}^G R_x^e \\ R_y &= \sum_{G=1}^G R_y^e \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

で与えられる。なお (35) の $\sum$ は物体の全表面について加え合わせることを示す。付加質量は加速度に比例した抵抗の比例定数であると定義すれば、 x 方向 (水平方向) および y 方向 (垂直方向) の付加質量 m_H および m_V はそれぞれ次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} m_H &= R_x / \dot{U} \\ m_V &= R_y / \dot{V} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

ここに $\dot{U}$ および $\dot{V}$ は x 方向および y 方向の加速度である。

以上で水平方向および垂直方向の付加質量 m_H および m_V が求まった。物体が流体中で回転運動しているときの付加慣性モーメント I_a も付加質量の場合と同様にして求めることができる。回転運動の回転中心 S の座標

を (x_0, y_0) とし、辺 ij に作用する加速度抵抗による回転中心 S まわりの抵抗モーメント M_R^e を求める。回転運動の場合も辺 ij に作用する加速度抵抗 R_x^e および R_y^e は (34) の形で与えられる。また辺 ij に作用する圧力 p の圧力中心の座標 (x_g, y_g) は

$$\left. \begin{aligned} x_g &= x_i + \frac{1}{3}(x_j - x_i) \frac{p_i + 2p_j}{p_i + p_j} \\ y_g &= y_i + \frac{1}{3}(y_j - y_i) \frac{p_i + 2p_j}{p_i + p_j} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

となる。加速度抵抗 R_x^e および R_y^e は圧力中心 (x_g, y_g) に作用すると考えると、回転中心 S まわりの抵抗モーメント M_R^e は、図3を参照して

$$M_R^e = R_x^e(y_0 - y_g) + R_y^e(x_g - x_0) \quad (38)$$

となる。物体に作用する回転中心 S まわりの全抵抗モーメント M_R は、(38)で与えられる抵抗モーメント M_R^e を物体の全表面について加え合わせたものであるから

$$M_R = \sum^G M_R^e \quad (39)$$

となる。付加慣性モーメントを角加速度に比例した抵抗モーメントの比例定数として定義すれば、付加慣性モーメント I_a は次式で与えられる。

$$I_a = M_R / \ddot{\theta} \quad (40)$$

ここに $\ddot{\theta}$ は物体の回転中心 S まわりの角加速度である。

4 有限要素法による計算値の精度の検討

前項の理論計算に基づいて垂直振動の付加質量係数 C_V 、水平振動の付加質量係数 C_H および振り振動の付加慣性モーメント係数 C_T を求める電子計算機プログラムを作成した。本プログラムで計算される付加質量係数 C_V 、 C_H および付加慣性モーメント係数 C_T は次式で定義されるものである。

$$\left. \begin{aligned} m_V &= \frac{1}{2} C_V \rho \pi b^2 \\ m_H &= \frac{1}{2} C_H \rho \pi d^2 \\ I_a &= C_T \rho \pi d^4 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

ここに b は物体の横断面の半幅、 d は喫水である。本プログラムでは任意の形状の横断面をもつ物体が任意の形状の境界をもつ流体中で振動する場合の付加質量係数および付加慣性モーメント係数を求めることができる。なお流体の自由表面の条件として (9) の条件を用い、数値計算に際しては電子計算機 Facom 230—50 を使用した。

半径 r の円断面および半幅 b の矩形断面をもつ無限長の一樣断面棒が流体中でそれぞれ喫水 r および d の状態で垂直振動、水平振動および振り振動するときの付加質量係数および付加慣性モーメント係数を上記の電子計算機プログラムにより計算した。有限要素法では流体の領域を無限大にとることができないので、付加質量に及ぼす制限水の影響を考慮に入れて、流体の領域の半幅 B および深さ D が円断面では図4に示すように $B/r = D/r = 9$,

図 4

(a) 垂直振動 (b) 水平振動および振り振動

図5 境界条件

矩形断面では $B/b=D/d=7.5$ である矩形領域を考え、棒が自由表面の中央にあるものとした。この計算例では流体の領域は左右対称であるので左半分または右半分の領域を考えればよい。図4に示した円断面の場合について垂直振動、水平振動および振り振動に対する境界条件を示せば図5のようになる。ここで注意すべき点は垂直振動では圧力分布が左右対称となるため対称軸 (y 軸) 上で $\partial p/\partial x=0$ となるのに対して、水平振動および振り

表1 有限要素法による結果と厳密解の比較—円断面

	C_V	C_H	C_T^*	備 考
有限要素法	0.967	0.368	0.0460	$B/r=D/r=9$
厳密解	1.000	0.405	0.0507	$B/r=D/r=\infty$
有限要素法 厳密解	0.967	0.905	0.907	

* 付加慣性モーメント係数 C_T は $y_0/d=0.5$ のときの値である。

表2 有限要素法による結果と他の方法による結果の比較—矩形断面

d/b	0.5	1.0	1.5	備 考
有限要素法	1.30	1.48	1.61	$D/d=B/b=7.5$
C_V Lewis	1.36	1.51	1.62	$D/d=B/b=\infty$
Koch	1.42	1.65	1.78	
$C_V^{\text{finite}}/C_V^{\text{Lewis}}$	0.956	0.980	0.994	
有限要素法	0.462	0.445	0.435	$D/d=B/b=7.5$
C_H Landweber	0.502	0.463	0.441	$D/d=B/b=\infty$
Koch	0.487	0.478	0.470	
$C_H^{\text{finite}}/C_H^{\text{Landweber}}$	0.920	0.961	0.986

図6 領域の分割 (円断面の場合) 接点の数=88
三角形要素の数=132

振動 (振り中心が y 軸上にあるとき) では、圧力分布が左右逆対称となるため、対称軸 (y 軸) 上で $p=0$ となることである。領域の分割は、圧力分布の変化を考慮して、図6に示すように物体の表面近くで細かく、物体から遠ざかるにつれて粗くした。接点の数は円断面の場合および矩形断面の場合ともに 88、三角形要素の数は円断面の場合 132、矩形断面の場合 130 である。

上記の例についての計算結果を他の方法による結果と比較して表1および表2に示す。表1は円断面に対する付加質量係数 C_V 、 C_H および付加慣性モーメント係数 C_T について、有限要素法による値と厳密解を比較したものである。表2は矩形断面に対する付加質量係数 C_V および C_H について、有限要素法による値と他の方法による値を比較したものである。表2の Lewis と記した欄の C_V の値は F.M. Lewis³⁾ が解析的な方法によって求めた値であり、Koch と記した欄の C_V および C_H の値は J.J. Koch⁷⁾ が method of electrical analogy によって求めた値である。なお Koch の値は Todd の „Ship Hull Vibration”⁸⁾、p.84 より抜萃したものである。また Landweber と記した欄の C_H の値 L. Landweber, M. C. de Macagno⁴⁾ が Lewis form に対して求めた C_H の計算式を用いて、断面積比 $\sigma=1$ として求めた計算値である。表2の第5番目の欄の値は有限要素法による C_V の値と Lewis の C_V の値の比、また第9番目の欄の値は有限要素法による C_H の値と Landweber の C_H の値の比である。

表1および表2より次のことがわかる。有限要素法による計算値は垂直振動については正解に対して最大4%程度の誤差がありかなり精度がよいのに対して、円断面の場合の水平振動および振り振動については最大約10%の誤差がありあまり精度がよくない。ま水平振動の付加質量の大きさおよび振り振動の付加慣性モーメントの大きさが船体自身の質量の大きさおよび質量慣性モーメントの大きさと同程度であるとすれば、有限要素法により求めた付加質量および付加慣性モーメントを用いて固有振動数を求めると、全質量および全質量慣性モーメントを5%低く見積ることになるから固有振動数は2.5%高く見積り過ぎることになる。しかし一般に水平振動の付加質量および振り振動の付加慣性モーメントの全質量および全質量慣性モーメントに占める割合は上述の場

合よりかなり小さいと考えられるので、実用上は有限要素法による計算値は十分な精度があるものと考えられる。表2より一般に正解に比べて Koch の値は高く、有限要素法による値は低くなっていることがわかる。有限要素法による値が正解より低いのは、この方法固有の性質によるものである¹⁾。

有限要素法による計算結果の一例を図7および図8に示す。図7は縦軸に C_H 、横軸に b/d をとり矩形断面

図7 矩形断面に対する水平振動の付加質量係数 C_H

に対する水平振動の付加質量係数 C_H を示したものである。図8は縦軸に C_T 、横軸に y_0/d をとり、 b/d の値をパラメータとして、矩形断面に対する付加慣性モーメント係数 C_T を示したものである。なお次項で述べるように $B/b \geq 7$ 、 $D/d \geq 7$ であれば、付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響は無視できるから、 $D/d = B/b = 9$ として求めた図7の C_H および図8の C_T は流体の領域が無限と考えたときの値としてよい。

図8 矩形断面に対する振り振動の付加慣性モーメント係数 C_T

5 付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響および Bilge Keel の影響

船体振動の付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響は浅水影響および側壁の影響の2つに大別される。浅水影響については富田⁹⁾、Prohaska¹⁰⁾の模型実験による研究（垂直振動）、Koch⁷⁾の method of electrical analogy による研究（垂直振動、水平振動）、吉識¹¹⁾、Havelock¹²⁾の理論的な研究（垂直振動、水平振動）等があり、側壁の影響については吉識¹¹⁾の理論的な研究（垂直振動、水平振動）がある。また付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす Bilge Keel の影響については Wendel¹³⁾（垂直振動）、渡辺¹⁴⁾（横動揺）等の研究がある。

本報では $b/d=1$ の矩形断面について垂直振動および水平振動の付加質量係数 C_V 、 C_H および振り振動の付加慣性モーメント係数 C_T を有限要素法によつて求め、付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響および Bilge Keel の影響を調べた。

垂直振動、水平振動の付加質量および振り振動の付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響についての結果を、縦軸に付加質量係数 C_V または C_H または付加慣性モーメント係数 C_T 、横軸に浅水影響の場合は D/d 、側壁の影響の場合は B_1/b をとり図9、図

図9 垂直振動の付加質量に及ぼす制限水の影響

10 および図 11 に示す。図 9, 図 10 および図 11 の実線, 破線および一点鎖線はすべて有限要素法による計算値であつて, それぞれ浅水影響, 両側に壁があるときの側壁の影響および片側に壁があるときの側壁の影響を示す。図 9 および図 10 の点線は Koch が method of electrical analogy によつて求めた値であつて浅水影響を示す。図 9 の×印は富田が模型実験結果に基づいて求めた付加質量増加の実験式において $\beta=1$ (β は Area-Coefficient), $b/h=2^*$ (b, h は富田の論文で使われている記号であつてそれぞれ横断面の幅および喫水を示す) として付加質量の増加率 c を求め, 無限深さにおける付加質量係数 $C_{V\infty}$ とし

$$C_V = C_{V\infty}(1+c)$$

の計算式により求めた有限深さにおける付加質量係数 C_V の値を示す。また図 9 には Prohaska が模型実験によつて浅水影響を調べた結果を○印で記入しておいた。Prohaska の実験値は Area-Coefficient 0.99 の模型についての付加質量係数 C_V であるが b/d の値が不明である。なお Prohaska の実験値は Todd の “Ship Hull Vibration”⁸⁾, p. 80, Fig 24 の曲線から値を読みとりプロットしたものである。

Prohaska の実験値は b/d の値が不明であるので, 図 9 において○印の値と実線の値を直接比較することはできないが, 両者の傾向はよく一致している。また図 9 において×印の値と実線の値を比較すると×印の値の方がわずかに大きくなっている。図 9 において実線, 破線, 一点鎖線の 3 つを比べると, 垂直振動の付加質量に及ぼす制限水の影響の大きさは両側に壁があるときの側壁の影響, 浅水影響, 片側に壁があるときの側壁の影響の順になっている。図 9 より垂直振動では $D/d \geq 7$, $B_1/b \geq 7$ 以上であれば付加質量に及ぼす制限水の影響は無視できることがわかる。

垂直振動の付加質量に及ぼす浅水影響について有限要素法による結果と他の方法による結果を, 有限深さにおける付加質量係数 C_V と無限深さにおける付加質量係数 $C_{V\infty}$ の比の形で比較して表 3 に示す。表 3 の有限要素法, Koch, 富田の値は矩形断面 ($b/d=1$), Prohaska の値は Area-Coefficient 0.99 の矩形断面に近い横断面。

表 3 垂直振動の付加質量に及ぼす浅水影響 (有限要素法による結果と他の方法による結果の比較)

D/d		1.25	1.5	2.0	3.0	5.0	∞	備 考
$C_V / C_{V\infty}$	有限要素法	2.54	1.73	1.43	1.11	1.02	1.0	矩形断面 ($b/d=1$)
	Koch	2.33	1.64	1.22	1.08	1.04	1.0	矩形断面 ($b/d=1$)
	Prohaska	2.06	1.79	1.36	1.16	1.05	1.0	矩形に近い断面*
	吉 識 外	1.59	1.40	1.24	1.10	1.06	1.0	円断面
	富 田	2.35	1.90	1.48	1.20	1.06	1.0	矩形断面 ($b/d=1$)

* Area Coefficient=0.99, b/d の値は不明である

図 10 水平振動の付加質量に及ぼす制限水の影響

図 11 振り振動の付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響

吉識外の値は円断面に対するものである。表3において有限要素法, Koch, Prohaska および富田の4つの値を比較すると4つの値は, かなりよく一致していることがわかる。吉識の値が他の4つの値とかなり異なっているのは円断面と矩形断面のちがいはによるものである。

図10より次のことがわかる。水平振動の付加質量に及ぼす制限水の影響は, 両側に壁があるときの側壁の影響, 片側に壁があるときの側壁の影響, 浅水影響の順に小さくなっている。また水平振動では $D/d \geq 4$, $B_1/b \geq 4$ であれば付加質量に及ぼす制限水の影響は無視できる。

図11では, $y_0/d = 0, 1.0, 1.5$ の場合の C_T の値が示してある。同図より振り振動の付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響は振り中心の位置によってかなり左右されることがわかる。また振り振動では $D/d \geq 4$, $B_1/b \geq 4$ であれば付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響は無視できる。

図9, 図10, 図11の3つを比べると, 付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響は, 垂直振動がもつとも大きく, 水平振動と振り振動が同程度か水平振動が少し大きい程度であることがわかる。

$B/d=1$ の矩形断面に水平と 45° の角度で Bilge Keel がついている場合について, Bilge Keel の長さ k を

図12 付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす Bilge Keel の影響

振り振動および $y_0/d=1.5$ のときの振り振動に対する値であることを示す。また図12の点線は Wendell が垂直振動の付加質量に及ぼす Bilge Keel の影響を理論的に求めた値である。なおこの値は Todd の “Ship Hull Vibration”⁸⁾ p.73 より抜萃した。同図より振り振動の付加慣性モーメントに及ぼす Bilge Keel の影響は振り中心(回転中心) S の位置によって大きく左右されることがわかる。振り振動では $y_0/d=0$ のときの Bilge Keel の影響が大きいのは, 振り中心が断面の対称軸と水平面との交点の位置にあるため流体が Bilge Keel に直角に当ることから当然予想されることである。垂直振動および水平振動では付加質量に及ぼす影響の大きさは両者同程度で, たとえば $k/d=0.1$ の場合でもその付加質量が Bilge Keel のないときに比べて約 8% 増加するに過ぎない。

渡辺は長さ $\frac{1}{2}L$ (L は船の全長) の船体中央部に Bilge Keel をもつ船が満載状態 ($y_0/d=0$) で横動揺している場合について付加慣性モーメントを理論的に求めている^{14), 15)} この計算例では Bilge Keel の寸法が不明であるので有限要素法による結果と比較することはできないが, 渡辺の計算結果を用いて C_{Tk}/C_T の値を計算してみると次のようになる。Bilge Keel がある場合の船体中央部の付加慣性モーメント ΔI_k は, ρ を流体の密度, L を船の全長, g を重力の加速度, M を scale を表わす定数とすれば

$$\Delta I_k = 0.04744 \rho g \pi L M^4$$

また Bilge Keel のない場合の船体中央部の付加慣性モーメント ΔI は

$$\Delta I = 0.01910 \rho g \pi L M^4$$

となる。 ΔI_k と ΔI の比をとると $C_{Tk}/C_T = \Delta I_k/\Delta I$ であるから

$$C_{Tk}/C_T = 2.48$$

となる。この結果からも回転中心が水面近くにある ($y_0/d=0$) ときは, 付加慣性モーメントに及ぼす Bilge Keel

の影響がかなり大きいことがわかる。

6 結 言

物体が自由表面をもつ流体中で振動する場合の付加質量係数および付加慣性モーメント係数を有限要素法によって求め、その計算値が実用上十分な精度をもつことを確かめるとともに、付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響および Bilge Keel の影響を調べた。その結果次の結論が得られた。

- (1) 付加質量および付加慣性モーメントに及ぼす制限水の影響は垂直振動、水平振動、振り振動の順に大きく、垂直振動では $D/d \geq 7$, $B_1/b \geq 7$, 水平振動および振り振動では $D/d \geq 4$, $B_1/b \geq 4$ であればこれを無視することができる。
- (2) 振り振動の付加慣性モーメントに及ぼす Bilge Keel の影響は振り中心の位置によつて大きく影響される。

参 考 文 献

- 1) O.C.Zienkiewicz, Y.K.Cheung : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, 1967, p.148~168, p.219~227
- 2) 元良誠三 : 見掛質量に就て, 造船協会論文集第 87 号, 1955
- 3) F.M.Lewis : The Inertia of the water Surrounding a Vibrating Ship, Trans. S. N. A. M. E., vol.37, 1929
- 4) L.Landweber, M.C.de Macagno : Added Mass of Two-Dimensional Forms Oscillating in a Free Surface, Jour. of Ship Research, No.5. 1957
- 5) 熊井豊二 : 船体振れ振動における付加慣性力率について, 造船協会論文集 104 号, 1959
- 6) O.C.Zienkiewicz, B.Nath : Earthquake Hydrodynamic Pressures on Arch Dam-An Electric Analogue Solution, Proc. Inst. C.V.Eng. 1963
- 7) J.J.Koch : Experimental Method for Determining the Virtual Mass for Vibrations of Ships, T.M.B., Trans. 225. 1949. または Ingenier Archiv. 1933
- 8) F.H. Todd : Ship Hull Vibration, Edward Arnold L.T., London, 1961, Chapter V p.65~104.
- 9) 富田哲次郎 : 船体固有振動数に対する水深影響の一計算法, 造船協会論文集第 107 号, 1960
- 10) C.W.Prohaska : The Vertical Vibrations of Ship, Shipbuilder, 1947. または A.T.M.A., 1947
- 11) 吉識雅夫, 山本善之, 佐久間武, 長本良男 : 船体振動における付加質量に関する一考察, 造船協会論文集第 84 号, 1952
- 12) Sir.T.H.Havelock : Ship Vibrations-the Virtual Inertia of a Spheroid in Shallow Water, I.N.A. October. 1952
- 13) K.Wendel : Hydrodynamische Massen und Hydrodynamische Massenträgheitsmomente, S.T.G., 1950
- 14) 渡辺恵弘 : 横動揺における船の見掛の慣性力率に就て, 造船協会展報 52 号, 1933
- 15) M.Yoshiki, T.Kumai, T.Kanazawa : Recent Studies on Ship Vibration in Japan, The Society of Naval Architects of Japan, 60th Anniversary Series, vol.10, 1965, p.11~13