(昭和 43 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

材質および板厚不連続部の応力解析について

正員 矢 田 敏 夫*

正員 酒 井 啓 一*

Stress Analysis in a Plate with Different Material and Different Thickness

by Toshio Yada, *Member*

Keiichi Sakai, *Member*

Summary

When strength of a structure is discussed, amount of stress and strain concentration at discontinuous portion would be considered as one of the most important factors.

As an example, strict stress analysis around an elliptical portion of different material and different thickness in infinite plate has been carried out.

The problem of an elliptical boundary is a simple one. In this analysis, however, boundary conditions required for continuity in displacements and stresses are all satisfied. Therefore, some additional methods to usual analytical way have to be used.

As for more complicated boundaries and loading conditions, this analytical way would be similarly applied.

1 緒 言

構造物の強度を検討するとき、不連続部の応力および歪集中量が一つの重要な要素として考えられる。

本研究においては、無限板に一個のだ円形状の材質不連続および板厚不連続部がある場合について厳密な応力解析を行なった。この解析は単純なモデルに対するものではあるが、不連続部分の境界上で応力および変位の連続性を全て満足させるために、従来の解析法にいくつかの付加的手法を用いている。

この方法は、もつと複雑な形状の境界および荷重状態に対しても適用可能と考えられる。

2 概 要

構造物の強度は、使用する材料の性質とそれが稼働中に受ける応力の大きさによつて決定される。構造物の破壊を防止するためには適正な材料を選定して使用しなければならない。また同時に応力集中または歪集中の大きさを正確に把握して適正な設計・施工を行なわなければならない。しかしまだ明確にされていない問題が多く残されていると考える。

著者らと共同研究者は¹⁾²⁾³⁾、溶接構造の脆性破壊および低サイクル疲労破壊防止対策をより明確にするために、大型試験片を用いていくつかの実験を行ない、その結果を実用化するべく若干の解析を試みてきた。これらの研究において、構造物の破壊に対して、破壊発生部の応力集中量あるいは歪集中量が一つの重要な要素となることは明らかである。とくに応力あるいは歪の多軸性が破壊に及ぼす影響は重要な問題であり、もつとも明確にされなければならないものとする。

著者らは、現在までの研究を基盤にして、材質的不連続部の応力集中あるいは形状的不連続部の応力集中、あるいはまた残留応力場の応力解析について、そしてさらにそれらが破壊に及ぼす影響を明らかにしたいという考えの下に、2、3の考察を進めてきた。

この報告は、無限板中に一個のだ円形状の材質的不連続部および板厚不連続部があるときの応力解析結果を示したものである。これはごく単純なモデルである。しかしだ円形の境界上で応力および変位の連続性を保たせる

* 石川島播磨重工業株式会社 技術研究所

ために、すなわち混合境界値問題の解を得るために、従来の解析法にいくつかの付加的方法を試みた。

たとえば、材質の不連続部の応力解析については、一個の円形状に材質不連続部がある場合に関しては正解が得られている⁴⁾。しかし、だ円形状のものについては、それが、完全に穴のときおよび完全に剛体⁵⁾のとき以外、すなわち、第一種と第二種の境界条件のとき以外には、著者らの知る限りでは、解析は行なわれていないようである。

この報告に示す単純なモデルに関する解析法そのものはとくに意義あるものとは考えない。著者らの意図するところは、構造物の複雑な不連続部に生じる応力集中量あるいは歪集中量をより正確に求めて、破壊防止対策をさらに明らかにさせたいという点にある。その目的では、この解析方法は一般的に、さらに複雑な形状および複雑な外力を受ける場合にも適用できるであろう。また、面内変形のみならず、面外変形の問題に対しても同様な解析方法が適用できると考えられる。とくに電算機を併用することにより、従来の方法よりも効率よく正確に解が求められる場合も多いと期待される。このような意味で、本研究が工学上役立つところがあれば幸いと考えてここに報告する次第である。

3 理論解析

比較的単純な例として、一個のだ円形状の異質部が存在する無限板が、無限遠で一様な応力を受けたときの

Fig.1 Elliptic boundary on Z -plane and circular boundary on ζ -plane

像関数は良く知られている通り (1) であらわされる。

$$z = Z(\zeta) = \frac{k}{2} \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right); \quad -1 \leq m \leq 1 \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{1+m}{2} k \cos \phi; \quad a = \frac{1+m}{2} k; \\ y_0 &= \frac{1-m}{2} k \sin \phi; \quad b = \frac{1-m}{2} k. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) 応力関数

無限遠で一様な応力 p_{xx} , p_{yy} および p_{xy} が働くときだ円形の外部および内部の応力関数は、一般に次式で示すことができる。

だ円形の外部：

$$\varphi_m(z) = \varphi_0(z) + \varphi_1(z); \quad (3)$$

$$\psi_m'(z) = \psi_0'(z) + \psi_1'(z); \quad (4)$$

$$\varphi_1(z) = \varphi_1[Z(\zeta)] = \Phi_1(\zeta) \quad (5)$$

$$\psi_1'(z) = \psi_1'[Z(\zeta)] = \Phi_1^I(\zeta) \quad (6)$$

ここで、 $\Phi(\zeta)$, $\Phi_1^I(\zeta)$ は ζ 面の単位円の外で正則である。

だ円形の内部：

$$\varphi_i(z) = \varphi_0(z) + \varphi_2(z); \quad (7)$$

応力集中に関する解析結果を以下に示す。応力関数は Goursat の応力関数を用い、従来行なわれてきた方法の一つである Muschelishvii の解析法⁵⁾を採用した。異質部の境界では応力および変位の連続条件を満足させた。この場合、問題は混合境界値問題となる。そのため従来の解析方法にいくつかの補足を行なう必要があつた。

3.1 だ円形状部のヤング率およびポアソン比が異なるとき

(1) 写像関数

Fig.1 に示すように z 一面のだ円形境界を ζ 一面の単位円に写像する。その写

$$\phi_l'(z) = \phi_0'(z) + \phi_2'(z); \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n \\ \phi_2'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n z^n \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_2(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n z^n \\ \phi_2'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n z^n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、 $\varphi_2(z), \phi_2'(z)$ はた円の内部で正則である。

(3), (4), (7) および (8) 式において、 $\varphi_0(z)$ と $\phi_0'(z)$ は、均質な無限板に p_{xx}, p_{yy} および p_{xy} の応力が働くときの応力関数であり、次式で示される。

$$\varphi_0(z) = Az; \quad \phi_0'(z) = Bz; \quad (11)$$

$$A = \frac{p_{xx} + p_{yy}}{4}; \quad 2B = \frac{p_{yy} - p_{xx}}{2} + ip_{xy}. \quad (12)$$

(3) 境界条件

た円形の外部領域のヤング率、ポアソン比を E_m, ν_m とし、またた円形内のそれらを E_t, ν_t とおく。境界上で応力および変位の連続条件は一般に次式で示される。

$$(P_y \pm iP_x)_{z=z_0+0} = (P_y \pm iP_x)_{z=z_0-0}; \quad (13)$$

$$(u \pm iv)_{z=z_0+0} = (u \pm iv)_{z=z_0-0}. \quad (14)$$

また $P_y + iP_x$ と $u - iv$ の一般式は次のとおりである。

$$P_y + iP_x = -[\bar{\varphi}(z) + \{\bar{z}\psi'(z) + \psi'(z)\}]; \quad (15)$$

$$u - iv = \frac{1}{2G} [\kappa \bar{\psi}(z) - \{\bar{z}\psi'(z) + \psi'(z)\}]; \quad (16)$$

ただし

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}; \quad \text{平面応力} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} \kappa &= \frac{3-\nu'}{1+\nu'}, \quad G = \frac{E'}{2(1+\nu')} \\ \nu' &= \frac{\nu}{1-\nu}, \quad E' = \frac{E}{1-\nu^2} \end{aligned} \right\} : \text{平面歪}. \quad (18)$$

ここで次の補助関数をおくと

$$\chi(z_0) = \bar{z}\psi'(z_0) + \psi'(z_0), \quad (19)$$

(3)~(12), (13)~(16) および (19) 式より応力および変位に関する境界条件は次の 4 式で示される。

$$[\varphi_1(z_0) + \bar{\chi}_1(z_0)] - [\varphi_2(z_0) + \bar{\chi}_2(z_0)] = 0 \quad (20)$$

$$[\varphi_1(z_0) + \chi_1(z_0)] - [\varphi_2(z_0) + \chi_2(z_0)] = 0 \quad (21)$$

$$\begin{aligned} [\lambda_m \varphi_1(z_0) - \mu_m \bar{\chi}_1(z_0)] - [\lambda_t \varphi_2(z_0) - \mu_t \bar{\chi}_2(z_0)] \\ = -[(\lambda_m - \mu_m) - (\lambda_t - \mu_t)] A z_0 + (\mu_m - \mu_t) 2 \bar{B} \bar{z}_0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} [\lambda_m \varphi_1(z_0) - \mu_m \chi_1(z_0)] - [\lambda_t \varphi_2(z_0) - \mu_t \chi_2(z_0)] \\ = -[(\lambda_m - \mu_m) - (\lambda_t - \mu_t)] \bar{A} \bar{z}_0 + (\mu_m - \mu_t) 2 B z_0 \end{aligned} \quad (23)$$

ただし $\lambda = \frac{\kappa}{G}, \quad \mu = \frac{1}{G}$

(4) 応力関数の決定

解析の便宜上 Chauchy の積分定理を用いる。いま σ を ζ 一面の単位円上にとり、 ζ を単位円の外部にとる。

(5), (6) 式において $\Phi_1(\zeta), \Phi_1^I(\zeta)$ は単位円上およびその外部で正則であり、したがって (19) 式から

$$X_1(\zeta) = \bar{Z}(\zeta) \Phi_1^I + \Phi_1^I(\zeta)$$

も正則である。ゆえに次の関係を得る。

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_1(z_0)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\Phi_1(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma = \Phi_1(\zeta) \quad (25)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\varphi}_1(z_0)}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\Phi}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma - \zeta} d\sigma = 0 \quad (26)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\chi_1(z_0)}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{X_1(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma = X_1(\zeta) \quad (27)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\chi_1(z_0)}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{X}_1\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\sigma-\zeta} d\sigma = 0 \quad (28)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{z_0}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\frac{k}{2}\left(\sigma+\frac{m}{\sigma}\right)}{\sigma-\zeta} d\sigma = \frac{k}{2} \frac{m}{S} (=P) \quad (29)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{z}_0}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\frac{k}{2}\left(\frac{1}{\sigma}+m\sigma\right)}{\sigma-\zeta} d\sigma = \frac{k}{2} \frac{1}{\zeta} \quad (= \bar{P}) \quad (30)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_2(z_0)}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\varphi_2[Z(\sigma)]}{\sigma-\zeta} d\sigma \quad (=R) \\ = \frac{k}{2} m c_1 \frac{1}{\zeta} + [C_3, C_5 \cdots] \frac{1}{\zeta} + [C_2, C_4 \cdots] \frac{1}{\zeta^2} + \cdots \quad (31)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\overline{\sigma-\zeta}}{\varphi_2(z_0)} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\varphi}_2\left[Z\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]}{\sigma-\zeta} d\sigma \quad (= \bar{R}) \\ = \frac{k}{2} \bar{C}_1 \frac{1}{\zeta} + [\bar{C}_3, \bar{C}_5 \cdots] \frac{1}{\zeta} + [\bar{C}_2, \bar{C}_4 \cdots] \frac{1}{\zeta^2} + \cdots \quad (32)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\chi_2(r_0)}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\chi_2[Z(\sigma)]}{\sigma-\zeta} d\sigma \quad (=S) \\ = \frac{k}{2} (C_1 + mD_1) \frac{1}{\zeta} + [C_3 \cdots] \frac{1}{\zeta} + [C_2 \cdots] \frac{1}{\zeta^2} + \cdots \quad (33)$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\chi}_2(\bar{r}_0)}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\bar{\chi}_2\left[Z\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]}{\sigma-\zeta} d\sigma \quad (= \bar{S}) \\ = \frac{k}{2} (m\bar{C}_1 + \bar{D}_1) \frac{1}{\zeta} + [\bar{C}_3 \cdots] \frac{1}{\zeta} + [\bar{C}_2 \cdots] \frac{1}{\zeta^2} \quad (34)$$

(25)~(34) 式を (19)~(23) 式に代入して、 $\Phi(\zeta)$, $\Phi^1(\zeta)$ を消去すると境界条件は次の2式で表示できる。

$$(\mu_m + \lambda_l) \bar{R} + (\mu_m - \mu_l) S = [(\lambda_m - \mu_m) - (\lambda_l - \mu_l)] \bar{A} \bar{P} - [\mu_m - \mu_l] 2BP \quad (35)$$

$$(\lambda_m - \lambda_l) R + (\lambda_m + \mu_l) \bar{S} = -[(\lambda_m - \mu_m) - (\lambda_l - \mu_l)] AP + [\mu_m - \mu_l] 2\bar{B}\bar{P} \quad (36)$$

(29)~(34) 式を (35) と (36) 式に代入し、それぞれの式の両辺の $1/\zeta^n$ の係数を等置することにより、(9), (10) 式の未知応力関数の係数はすべて決定される。ここで (17) または (18) と (24) 式を用いて整理すると次のようになる。

$$C_1 = \frac{1}{A} \left[\left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1-\nu_m}{1+\nu_l} - \frac{1-\nu_l}{1+\nu_l} \right) \left\{ \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{3-\nu_m}{1+\nu_l} + 1 \right) + m^2 \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1+\nu_m}{1+\nu_l} - 1 \right) \right\} A \right. \\ \left. - \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{4}{1+\nu_l} \right) \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1+\nu_m}{1+\nu_l} - 1 \right) mB \right] \quad (37)$$

$$D_1 = \frac{-2}{A} \left[\left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1-\nu_m}{1+\nu_l} - \frac{1-\nu_l}{1+\nu_l} \right) \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1+\nu_l}{4} \right) mA \right. \\ \left. - \left(\frac{E_l}{E_m} - 1 \right) \left\{ \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1+\nu_m}{1+\nu_l} + \frac{1-\nu_l}{1+\nu_l} \right) + m^2 \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{3-\nu_m}{1+\nu_l} - \frac{1-\nu_l}{1+\nu_l} \right) \right\} B \right] \quad (38)$$

$$A = \left[\left(\frac{E_l}{E_m} \frac{3-\nu_m}{1+\nu_l} + 1 \right) \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1+\nu_m}{1+\nu_l} + \frac{1-\nu_l}{1+\nu_l} \right) \right. \\ \left. - m^2 \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{1+\nu_m}{1+\nu_l} - 1 \right) \left(\frac{E_l}{E_m} \frac{3-\nu_m}{1+\nu_l} - \frac{1-\nu_l}{1+\nu_l} \right) \right] \quad (39)$$

$$C_2 = C_3 = \cdots = 0, \quad D_2 = D_3 = \cdots = 0 \quad (40)$$

上式より (3)~(10) 式中の応力関数はすべて決定された。

$$\varphi_1(z) = \Phi(\zeta) = R + \bar{S} = \frac{k}{2} (2mC_1 + \bar{D}_1) \frac{1}{\zeta} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \Phi_1^I(\zeta) X_1(\zeta) - \bar{Z} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \Phi_1^I(\zeta) = \bar{R} + S - \bar{Z} \left(\frac{1}{\zeta} \right) \\ &= \frac{k}{2} \left[(2C_1 + mD_1) \frac{1}{\zeta} + (2mC_1 + \bar{D}_1) \left(\frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) \frac{1}{\zeta^2 - m} \right]\end{aligned}\quad (42)$$

$$\varphi_2(z) = C_1 z \quad (43)$$

$$\psi_2'(z) = D_1 z \quad (44)$$

(5) 応力および歪

応力関数より応力は通常の方法によつて決定される。すなわち

$$\left. \begin{aligned}\sigma_x &= R_e[2\varphi'(z) - \{\bar{z}\varphi''(z) + \psi''(z)\}] \\ \sigma_y &= R_e[2\psi'(z) + \{\bar{z}\psi''(z) + \varphi''(z)\}] \\ \tau_{xy} &= -I_m[\bar{z}\psi''(z) + \psi''(z)].\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

(3)~(14), (37)~(39), (41)~(44) および (45) 式より応力は次のように決定される。

だ円領域の外

$$\left. \begin{aligned}\sigma_{xm} &= (2A - 2\dot{B}) + \sigma_{xm}' \\ \sigma_{ym} &= (2A + 2\dot{B}) + \sigma_{ym}' \\ \tau_{ym} &= -(2B') - \tau_{xym}'\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xm}' &= \left[\left\{ (-2)(2mC_1 + \bar{D}_1) \frac{1}{\zeta^2 - m} + \left[(-2)(2mC_1 + \bar{D}_1) e^{2i\phi} \frac{\zeta^2(\zeta^2 + m)}{(\zeta^2 - m)^3} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2C_1 + mD_1) \frac{1}{\zeta^2 - m} - (2mC_1 + \bar{D}_1) \left\{ \frac{(m\zeta^2 - 1)}{(\zeta^2 - m)^2} - \frac{2\zeta^2(1 + m\zeta^2)}{(\zeta^2 - m)^3} \right\} \right] \right] \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ym}' &= \left[\left\{ (-2)(2mC_1 + \bar{D}_1) \frac{1}{\zeta^2 - m} + \left[(-2)(2mC_1 + \bar{D}_1) e^{2i\phi} \frac{\zeta^2(\zeta^2 + m)}{(\zeta^2 - m)^3} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (2C_1 + m\bar{D}_1) \frac{1}{\zeta^2 - m} - (2mC_1 + \bar{D}_1) \left\{ \frac{(\zeta^2 m - 1)}{(\zeta^2 - m)^2} - \frac{2\zeta^2(1 + m\zeta^2)}{(\zeta^2 - m)^3} \right\} \right] \right] \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xym}' &= -I_m \left[(-2)(2mC_1 + \bar{D}_1) e^{2i\phi} \frac{\zeta^2(\zeta^2 + m)}{(\zeta^2 - m)^3} + (2C_1 + mD_1) \frac{1}{\zeta^2 - m} \right. \\ &\quad \left. - (2mC_1 + \bar{D}_1) \left\{ \frac{(m\zeta^2 - 1)}{(\zeta^2 - m)^2} - \frac{2\zeta^2(1 + m\zeta^2)}{(\zeta^2 - m)^3} \right\} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\text{ただし} \quad z = \frac{k}{2} \left(\zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad \zeta = \rho e^{i\phi}.$$

だ円領域の内部：

$$\sigma_{xi} = (2A - 2\dot{B}) + (2C_1 - \dot{D}_1) \quad (50)$$

$$\sigma_{yi} = (2A + 2\dot{B}) + (2C_1 + \dot{D}_1) \quad (51)$$

$$\tau_{xyi} = -(2B' + D_1') \quad (52)$$

ただし $B = \dot{B} + iB'$, $C_1 = \dot{D}_1 + iD_1'$

また A は (12) 式より常に実数である。

歪は (45)~(52) 式で示される応力より求めることができる。

3.2 だ円形状部の板厚が異なるとき

Fig. 2 に示すように、だ円形内部の板厚を t_i 、外部の板厚を t_m とする。だ円の周上で力および変位が連続になるための境界条件は、3.1 の方法と全く同様にして応力解析を行なうことができる。

すなわち、この場合の境界条件は (20), (21) 式および (22), (23) 式において $2G_m \rightarrow t_m$, $2G_i \rightarrow t_i$ と置換した 2 式によつて表示される。

結果のみを示すと次のとおりである。

Fig. 2 Elliptical boundary with different thickness in infinite plate

だ円領域外の応力: (41)~(44) 式

(53)

だ円領域外の応力:

$$\sigma_{xi} = \left(\frac{t_m}{t_i} \right) [(2A - 2\dot{B}) + (2C_1 - \dot{D}_1)] \quad (54)$$

$$\sigma_{yi} = \left(\frac{t_m}{t_i} \right) [(2A + 2\dot{B}) + (2C_1 + \dot{D}_1)] \quad (55)$$

$$\tau_{xyi} = - \left(\frac{t_m}{t_i} \right) (2B' + D_1') \quad (56)$$

ただし, $C_1 D_1$ は (37), (38) および (39) 式において $E_i/E_m \rightarrow t_i/t_m$, $\nu_i = \nu_m$ と置換して得られる値である。歪はだ円の内部および外部ともに, 3.1の場合と同一の計算式で与えられる。

Fig.3 Stress and strain distributions on x -axis inner and outer of ellips with different Young's Modulus. $\nu_i = \nu_m = 0.3$, $b/a = 1/3$, plane stress condition

4.3 その他

前述の 4.1 および 4.2 の解析の結果, だ円形不連続部内の応力は一様な応力となる。これは境界の写像関数が (1) 式のように z と $1/\bar{z}$ のみであらわされしかも外力の応力関数が (11) のように z の項のみであらわされるために応力関数 (9), (10) の右辺はいずれも第 1 項のみで表示されるためである。一般的には, (35), (36) 式から無元連立方程式が得られ, それを解くことによつて応力関数の係数が決定される。

任意の境界形状と任意の外力に対しても (1) に対応する写像関数と (11) に対応する応力関数が複雑になるが, 原理的には前記と同一の解析方法を採用することができるはずである。

また無限板に限らず, 任意の有限板に対してもさらに解析を進めることができると考える。

4 数値計算および考察

4.1 だ円形状部のヤング率が異なるとき

さきに 3.1 に示した式を用いてだ円形状部のヤング率 E_i が外部のヤング率 E_m と異なるときの数値計算を行なつた。Fig. 3 はだ円の (短軸 b)/(長軸 a) が $1/3$ の場合の x 軸上の応力および歪分布がヤング率の比 E_i/E_m の差異によつてどのように変化するかを示したものである。また Fig. 4 は b/a および E_i/E_m がだ円境界部の応力集中量に及ぼす影響を示した。外力は p_y のみとし, またポアソン比は $\nu_i = \nu_m = 0.3$ とした。

ここで, だ円形内部の応力は前述のとお

Fig. 4 Stress concentration on elliptic boundary with different Young's Modulus. $\nu_i = \nu_m = 0.3$, plane stress condition

Fig. 5 Stress and strain concentrations on elliptic boundaries with different Young's Modulus and with different thickness. $b/a = 1/3$, $\nu_i = \nu_m$, plane stress

り様な2軸応力となる。しかし σ_{xi} は σ_{yi} にくらべれば無視できる程度に小さい。

境界部の応力は、だ円内部のヤング率 E_i が外部のヤング率 E_m より小さいときは、長軸端の外部の応力 $\sigma_{ym}(x=a, y=0)$ が最も大きい。また E_i が E_m より大きいときは、短軸端の応力 $\sigma_{yt}=\sigma_{ym}(x=0, y=b)$ が最大となる。すなわち σ_y が最大になる位置は b/a の大きさに関係なしに $E_i/E_m < 1$ か $E_i/E_m > 1$ によつて異なってくる。

4.2 だ円形状部の板厚が異るとき

一例として $b/a=1/3$ の場合について、(だ円内部の板厚 t_i)/(外部の板厚 t_m) と σ_y の大きさの関係を Fig.5 に示した。比較のために、 E_i/E_m が異なる場合のグラフを併記した。3.2 において記述したように、 t_i/t_m と応力、歪の関係はだ円の内部の応力以外は E_i/E_m と応力、歪の関係と全く同一となる。だ円内の応力はヤング率が異なる場合に比べて t_m/t_i 倍だけ異なってくる。

4.3 その他の考察

初期残留応力をもつ平板に外力が加えられるときの応力および歪の変化を定性的に検討してみる。いま炭素鋼を例にとつてみると塑性変形後の応力-歪曲線の勾配は弾性範囲のヤング率の 10^{-2} 倍程度のオーダーである。ここで仮に、だ円形内部に σ_Y の残留応力が存在し、その外部の応力は0であるようなモデルを想定する。これに外力 p_y を加えると、 $E_i/E_m=10^{-2}$ 程度に小さいから、だ円形内の応力 σ_{yi} の増加分すなわち σ_{yi}/p_y は、Fig.3 あるいは Fig.5 からわかるように、一般的にはきわめて小さいことがわかる。すなわち、部分的に降伏点に達する大きな残留応力があつても、外力を受けたときの応力の増加分は小さい。歪の増分は応力の増分に比べれば比較的大きく、それは残留応力場の形状によつてかなり異なるであろう。

だ円形以外の複雑な境界を持つ場合、あるいは多数の不連続部を持つ場合の応力解析とそれらの適用法については今後さらに検討を行なう予定である。

また、前に記述したようにこの計算結果は構造物の破壊防止対策を明確にさせるために役立てたいと考える。たとえば板厚差がある場合の破壊防止対策として、クラックアレスターの研究⁶⁾ などすぐれた研究が行なわれてきた。これらの研究結果を参考にして、本研究の適用法を各方面から具体的に検討したい。

5 結 論

(1) 不連続部の応力解析の一例として、無限板中に1個のだ円形の異質部、すなわちヤング率およびポアソン比が異なる部分があるときの応力解析を行なつた。この場合、境界上で応力および変位の連続条件はすべてを満足させる解を求めた。この混合境界値問題を解くに当つて、従来の方法にいくつかの付加的手法を試みた。この計算によりだ円の形状およびヤング率の大きさと応力、歪の関係を定量化することができた。

(2) 他の一例として、1個のだ円形状部の板厚が異なるときの応力解析を行なつた。板厚比がだ円形の外部の応力およびだ円形の内部と外部の歪に及ぼす影響は同一量のヤング率比をもつ場合と全く同一である。ただし前者に対するだ円形内部の応力は後者に対する応力に $1/(\text{板厚比})$ を乗じた値となる。

(3) 本研究においては、ごく単純なモデルに関する応力解析の結果を示した。この解析法はもつと複雑な形状の境界に対して、また一般的な面内および面外荷重の問題に対しても適用できるであろう。

謝 辞

本研究に対して、日本造船学会溶接研究委員会の木原委員長、金沢主査、大谷主査をはじめ各委員の方々および石川島播磨重工業の秋田博士、前田博士から有益なご助言とご鞭撻をいただいた。心から謝意を表する次第です。

参 考 文 献

- 1) 秋田, 前田, 矢田: 溶接構造物に発生する脆性破壊の研究, 第2報, 造船協会論文集, Vol. 118
- 2) 秋田, 矢田, 酒井: 角変形つき 80 キロ高張力鋼溶接継手の低サイクル疲労強度, 造船学会論文集, Vol. 123
- 3) 矢田, 酒井: 分布応力を受ける不連続構造物に生じる脆性破壊の発生に関する一考察, 同上
- 4) N.I. Muskhelishvili, "Some Basic Problems of the Mathematical theory of Elasticity", P. Novidhoff Ltd (1963)
- 5) 金沢, 町田, 大八木: クラックアレスターに関する基礎的研究 (第4報, 第5報), 造船協会論文集 Vol. 121 (1967) および Vol. 122 (1967)