(昭和 44 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

補強円孔を有する円筒殻の応力解析

—開口数と境界条件の影響—

正員 安 藤 良 夫* 正員 飯 田 国 広*
 正員 川 井 忠 彦** 正員 矢 川 元 基***
 菊 地 文 雄***

Stress Distributions in Circular Cylindrical Shell with Reinforced Holes
 —Effects of Number of Holes and Boundary Conditions—

By Yoshio Ando, *Member*, Kunihiro Iida, *Member*
 Tadahiko Kawai, *Member*, Genki Yagawa, *Member*
 Fumio Kikuchi

Summary

This paper describes an application of matrix method with curved and cylindrical-shell elements to the stress analysis of a cylindrical shell with reinforced circular holes. The purpose of the present analysis is to develop the general method for stress problems with mixed boundary conditions which contain both the mechanical and geometrical boundary surfaces.

Effects of the distance between neighbouring reinforced holes and the boundary of loading edge are studied. Experiments are also made on two specimens, and good agreement is found between experimental and calculated values.

1 ま え が き

殻構造の応力解析は、工学上重要な問題であるにもかかわらず、その特質上解析可能な問題がごく限られていると言つても過言ではない。著者ら¹⁾はさきに曲面を有する膜応力要素によるマトリックス法を用いて円形開口を有する円筒殻の軸方向引張荷重による応力集中について研究を行つたが、本報ではさらに開口数と荷重端の境界条件が円孔近傍の応力分布にどのような影響を及ぼすかについて理論解析を行い、実験結果との比較を行つた。

この理論によると必然的に変位、歪および応力は板厚方向に一定となり開口縁にごく近い部分においては曲げの影響を受けて誤差がはいると考える。しかし開口縁に補強をほどこすことなどによりその影響を避けることが可能であり、また實際上、開口部に補強を有する場合が多くみられることなどから、本報では理論の工学上の有効性について検討を行つた。

また数値解析は 2 次元問題と同程度の手続きで行うことができ、比較的短い計算時間で十分なことも本解析法の特長であると考えられる。

2 記 号

a : 円形開口の半径

h : 補強の幅

k : 開口数

l : 開口間距離 (中心から中心までの円周に沿つた距離)

$r = x/a$ あるいは y/a

* 東京大学工学部原子力工学科

** 東京大学生産技術研究所

*** 東京大学大学院工学系研究科

t : 円筒殻の板厚
 t' : 補強部の板厚
 u, v, w : x, y 方向およびそれらに垂直方向の変位成分
 u_i, v_i, w_i : 節点における変位成分
 x, y : 円筒殻の中央面に沿った座標系
 x_i, y_i : 節点座標
 L : 円筒殻の長さ
 R : 円筒殻の平均半径
 α, β : 直交曲線座標系
 $\gamma = h/a$
 $\delta = t'/t$
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$: (x, y) 座標系に関する歪成分
 θ : 円形開口の角度座標
 ν : ポアソン比
 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$: (x, y) 座標系に関する応力成分
 σ_θ : θ 方向の応力成分
 $\bar{\sigma}$: 荷重端における一様応力あるいは平均応力
 $\mathfrak{D}$: 微分演算子
 $\mathbf{k}$: 要素の剛性マトリックス
 $\mathbf{u}$: 変位ベクトル
 $\mathbf{u}_i$: 節点変位ベクトル
 $\mathbf{A}$: $\mathbf{u}_i$ と $\mathbf{Q}$ の間の変換マトリックス
 $\mathbf{B} = \mathfrak{D}\mathbf{M}$
 $\mathbf{D}$: $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\epsilon}$ の間の変換マトリックス
 $\mathbf{K}$: 構造物全体の剛性マトリックス
 $\mathbf{M}$: $\mathbf{u}$ と $\mathbf{Q}$ の間の変換マトリックス
 $\mathbf{Q}$: 一般座標ベクトル
 $\mathbf{X}_i$: 節点力ベクトル
 $\boldsymbol{\epsilon}$: 歪ベクトル
 $\boldsymbol{\sigma}$: 応力ベクトル

3 膜理論有限要素法による円筒殻の理論解析

ここでは直交曲線座標系に関する膜応力剛性マトリックスの導出法を述べた上で混合境界値問題の一般的解法について触れ、かつ本方法によつて補強開口を有する円筒殻の圧縮による応力分布の解析を行い、開口数および境界条件の影響について議論する。

3.1 基礎理論 (APPENDIX 参照)

直交曲線座標系 (α, β) を殻の曲率線と一致するようとり、 α, β 方向およびそれらに垂直な方向の変位をそれぞれ u, v, w とする。要素として曲面を有する 3 角形を用い、要素内の変位を

$$\mathbf{u}(\alpha, \beta) = \mathbf{M}(\alpha, \beta) \mathbf{Q} \quad (1)$$

と仮定する。 $\mathbf{M}(\alpha, \beta)$ は座標系 (α, β) の 1 次関数をその成分とする。曲面を有する 3 角形の頂点を $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,3}$ とおき節点変位 $\mathbf{u}_i$ を $\mathbf{Q}$ の関数として表わせば

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{A} \mathbf{Q} \quad (2)$$

ここに $\mathbf{A}$ は (1) の $\mathbf{M}(\alpha, \beta)$ に $(\alpha_i, \beta_i)_{i=1,2,3}$ を代入して得られる正方マトリックスである。(2) より

$$\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_i \quad (3)$$

殻の歪-変位関係は $\mathfrak{D}$ を微分演算子として一般に

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathfrak{D} \mathbf{u} \quad (4)$$

となり (1) と (4) より $\mathbf{B} = \mathbf{D}\mathbf{M}(\alpha, \beta)$ とおいて

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{Q} \quad (5)$$

となる。また応力-歪関係は

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (6)$$

で表現される。以上の関係式およびマトリックス記号を用いると仮想仕事の原理から要素の剛性マトリックス $\mathbf{k}$ は

$$\mathbf{k} = (\mathbf{A}^{-1})^T \left[\iint t \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\alpha d\beta \right] \mathbf{A}^{-1} \quad (7)$$

となることが示される。ここに上つきの -1 および T はそれぞれ逆行行列および転置行列であることを示す。

3.2 混合境界値問題の一般的解法²⁾

構造全体の剛性方程式は

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{K} \mathbf{u}_i \quad (8)$$

で表わされる。この式で $\mathbf{X}_i$ は節点力を表わすベクトル、 $\mathbf{u}_i$ はそれに対応する節点変位である。

$\mathbf{u}_i$ を 3 つの部分 $\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\beta, \mathbf{u}_\gamma$ に分け、 $\mathbf{u}_\alpha$ は未知の節点変位、 $\mathbf{u}_\beta$ は境界条件で与えられた既知の変位で零でないもの、 $\mathbf{u}_\gamma$ は境界条件で与えられた既知の変位のうち零に等しいものとする。同様に $\mathbf{X}_i$ を $\mathbf{X}_\alpha, \mathbf{X}_\beta, \mathbf{X}_\gamma$ に分ける。すなわち $\mathbf{X}_\alpha$ は $\mathbf{u}_\alpha$ に対応するもので外荷重を表わす。同様に $\mathbf{X}_\beta, \mathbf{X}_\gamma$ は $\mathbf{u}_\beta, \mathbf{u}_\gamma$ に対応するもので未知の支点反力を表わす。これらのことを考慮して (8) を次のように書き改める。

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{X}_\alpha \\ \mathbf{X}_\beta \\ \mathbf{X}_\gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\alpha\alpha} & \mathbf{K}_{\alpha\beta} & \mathbf{K}_{\alpha\gamma} \\ \mathbf{K}_{\beta\alpha} & \mathbf{K}_{\beta\beta} & \mathbf{K}_{\beta\gamma} \\ \mathbf{K}_{\gamma\alpha} & \mathbf{K}_{\gamma\beta} & \mathbf{K}_{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_\alpha \\ \mathbf{u}_\beta \\ \mathbf{u}_\gamma \end{Bmatrix}$$

すなわち

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{u}_\beta + \mathbf{K}_{\alpha\gamma}\mathbf{u}_\gamma \\ \mathbf{X}_\beta = \mathbf{K}_{\beta\alpha}\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{u}_\beta + \mathbf{K}_{\beta\gamma}\mathbf{u}_\gamma \\ \mathbf{X}_\gamma = \mathbf{K}_{\gamma\alpha}\mathbf{u}_\alpha + \mathbf{K}_{\gamma\beta}\mathbf{u}_\beta + \mathbf{K}_{\gamma\gamma}\mathbf{u}_\gamma \end{cases} \quad (9)$$

となる。

(9) において $\mathbf{u}_\gamma = 0$ であり、 $\mathbf{u}_\beta, \mathbf{X}_\alpha$ は既知である。よつて (9) の第 1 式から未知変位 $\mathbf{u}_\alpha$ は

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1}(\mathbf{X}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{u}_\beta)$$

となる。あるいは

$$\mathbf{X}_\alpha^* = \mathbf{X}_\alpha - \mathbf{K}_{\alpha\beta}\mathbf{u}_\beta \quad (10)$$

とおけば

$$\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{K}_{\alpha\alpha}^{-1}\mathbf{X}_\alpha^* \quad (11)$$

である。したがつて (10) により $\mathbf{X}_\alpha^*$ を計算してから (11) により $\mathbf{u}_\alpha$ を求めればよい。 $\mathbf{X}_\alpha^*$ を求めるために $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ が必要になるが実際に $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ そのものを計算する必要はなく、系の線形性から $\mathbf{u}_\beta$ に対応する節点を持つ要素のみについてその要素の剛性マトリックスを計算しその寄与分だけ $\mathbf{X}_\alpha$ から減ずることを繰り返せばよい。すなわち 1 つの要素の剛性マトリックスの $\mathbf{K}_{\alpha\beta}$ に対応する部分を $\mathbf{k}_{\alpha\beta}$ とすれば

$$\mathbf{X}_\alpha \leftarrow \mathbf{X}_\alpha - \mathbf{k}_{\alpha\beta}\mathbf{u}_\beta$$

の演算を繰り返せば $\mathbf{X}_\alpha^*$ が得られることになる。

3.3 開口数が応力分布に及ぼす影響

引張を受ける平板に補強円孔列が存在する場合の応力集中に関しては、例えば R. W. Bailey ら³⁾によつて論ぜられているが円筒殻をその代表とする殻構造が補強開口部を有する場合に開口数が応力分布に及ぼす影響については著者らの知る限り既発表の文献はないようである。

開口を有する円筒殻が軸方向に一樣な引張（あるいは圧縮）を受ける場合、開口が同一円周上（例えば $x=0$ 上）に並列に並んだときには応力の干渉によつて最大応力点の応力が上昇することが平板からの類推によつて予想される。本報では軸方向に一樣な引張（あるいは圧縮）を受ける円筒殻の中央（ $x=0$ 上）に 2, 4 および 6 個の同一な形状および寸法の補強円形開口が等間隔に並んだ場合の応力分布を計算した。この場合計算に用いた 3 ケースの要目を Table. 1 に示す。Fig. 1 は 2 円孔の場合の座標系などを表わしている。Fig. 2 に y 軸上の x

Table.1 Dimensions of specimen for numerical calculation

Case		1	2	3
Number of circular holes	k	2	4	6
Distance between neighbouring holes (centre to centre)				
	$l(\text{mm})$	490.0	245.0	163.4
Length of cylinder	$L(\text{mm})$	490.0	490.0	490.0
Mean radius of cylinder	$R(\text{mm})$	156.0	156.0	156.0
Thickness of cylinder	$t(\text{mm})$	7.0	7.0	7.0
Inner radius of circular hole	$a(\text{mm})$	52.0	52.0	52.0
Thickness of reinforcement collar	$h(\text{mm})$	6.24	6.24	6.24
Height of reinforcement collar	$t'(\text{mm})$	28.0	28.0	28.0
Poisson's ratio	ν	0.3	0.3	0.3

Fig.1 Coordinate system

Fig.2 Effect of opening holes on the distribution of longitudinal membrane stress

方向応力分布を開口数 k をパラメーターとして図示する。円周に沿って測つたガス長さを円孔半径で無次元化したもの $r(=y/a)$ を横軸にとり、応力分布 σ_x を境界での一様応力 σ_0 で無次元化したものを縦軸にとつた。同図によれば開口数によつて応力分布形状および最大応力値に多少の差違がみられる。

3.4 引張（圧縮）端の境界条件が応力分布に及ぼす影響

著者らはさきに、円孔を有する矩形平板が引張を受ける場合の応力集中に関する研究⁴⁾の中で、実験と理論との荷重端の境界条件を一致させるために、実験による境界応力値を理論計算の入力として用いるという方法によ

つて理論値と実験値を一致させることを試みた。また吉識⁹⁾は同じ問題を変位境界値問題として解析すればよいと論じている。

本報で著者らは3.2節において述べた手法を用いて、任意の混合境界条件を有する殻の応力問題を解析する方法を開発した。本手法を用いれば、力学的境界条件と幾何学的境界条件が同時に存在する問題を容易に解析できる。

Fig.3 は $x=0$ 上の対称位置を中心とする2個の補強円孔を有する円筒殻の一樣引張(圧縮)による応力分布を応力一定境界条件と変位一定境界条件で解析し両者の比較を行つたものである。ここで変位一定境界条件の場合には $\bar{u}$ は境界における反力の平均値をあらわしている。

Fig.3 Effect of boundary condition on the distribution of longitudinal membrane stress

4 実 験

補強を行つた円形開口を有する円筒殻が、両端に圧縮荷重を受ける場合の開口部の歪分布を測定し、理論値との比較をするため弾性域での模型実験を行つた。

4.1 試験片および試験方法

試験片は2個作製しそれぞれ CH2-E (2円孔), CH4-E (4円孔) とする。形状および寸法は Fig.4 に例示する。規格品の継目無し鋼管を一定長に機械切断し、長手方向中央部 ($x=0$) に板厚 6.24 mm, 長さ 28 mm, 内径 104 mm の円筒を2個ないし4個隅肉溶接して試験片とした。開口中心位置の主円筒周方向角度は CH2-E においては 0° および 180° , CH4-E においては $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ および 270° である。開口位置を以上の様に決めることにより円筒の周方向の剛度をバランスさせ、圧縮を加えた際に曲げが生じるのを避けるようにした。なお試験片はすべて溶接後応力焼鈍を行つて、溶接残留応力を取り除いた。

Fig.4 Details of two holes specimen

試験はアムスラー型 50 ton 構造物試験機を用いて、圧縮荷重を試験片の軸方向に静的に与えた。圧縮荷重を加える際の荷重の偏心を避けるために 50 mm ϕ のボールベアリングを通して荷重が圧縮板に均等に加わるようにした。

試験片の歪分布を測定するために開口周辺および開口中心を原点とした軸方向 (x 方向) および周方向 (y 方向) の両軸上の表裏面に抵抗線歪計 (東京測器研究所製 YL-3 および YCS-5) を接着した。また開口部においては開口縁の板厚中央部の円周方向歪を 30° 間隔で測定した。

歪分布測定にさきだち、弾性限以下のならし荷重を数回加えた後、5, 10, 15, 20, 25 ton 荷重時の弾性歪分布を計測した。

Fig. 6 Distribution of membrane stress along x-axis (two holes)

Fig. 8 Distribution of membrane stress along y-axis (four holes)

Fig. 5 Distribution of membrane stress along y-axis (two holes)

Fig. 7 Distribution of membrane stress around a circular hole (two holes)

Fig.9 Distribution of membrane stress along x-axis (four holes)

また試験機のプロテーディングベッドの横方向のがたにより偏心荷重が生じやすいため荷重の加え方には細心の注意を払い、数回の試験を繰り返した。

4.2 実験結果および計算値との比較

前節で述べた実験方法で得られた弾性歪を応力に変換し、計算による応力分布との比較を行つた。Fig.5～Fig.7 は試験片 CH2-E (2円孔) に対する実験値と計算値の比較を示し、Fig.8～Fig.10 は試験片 CH 4-E (4円孔) に対するものである。

Fig.5 および Fig.8 は試験片の軸方向中央 ($x=0$) において孔端から円周方向 (y 方向) に沿つて測つた長さを円孔半径 a で無次元化したものを横軸に、また軸方向 (x 方向) の応力を圧縮境界における平均応力 $\bar{\sigma}$ で無次元化したものを縦軸としてとり、一方、Fig.6 および Fig.9 は円孔中心を通る円筒の母線上 ($y=0$) において孔端から軸方向 (x 方向) に沿つて測つた長さを a で無次元化したものを横軸として、また円周方向 (y 方向) の応力を $\bar{\sigma}$ で無次元化したものを縦軸としてとつた。Fig.7 および Fig.10 は横軸として開口周上の角度 θ をとり、縦軸としては開口の円周方向応力 σ_θ を $\bar{\sigma}$ で無次元化したものをとつた。なお本節ではすべて圧縮応力を正とした。

Fig.5～Fig.10 に示す通り、実験値と計算値は開口縁の最大応力部を除いては比較的良好な一致がみられる。開口周辺において曲げの効果が大きくなることを考慮して、その部分には殻の曲げ理論あるいは3次元理論を用いる必要があると考えられる。また開口縁での実験値が計算値からはずれているもう1つの理由としては計算においては補強部の溶接隅肉を考慮していない事などが考えられる。

5 結 言

曲面を有する膜応力要素を用いて補強円形開口を有する円筒殻のマトリックス応力解析を行い、荷重端の境界条件の影響および開口数の影響について論じた。また模型による圧縮実験を行つて理論値と実験値がかなり良く一致していることを確かめた。

本理論は円筒殻のみならず球殻、円錐殻、軸対称殻、任意形状の浅い殻などを含むほとんどあらゆる殻構造に

Fig.10 Distribution of membrane stress around a circular hole (four holes)

応用でき、さらにその計算に要する時間が比較的短時間であることからから殻の応力解析法として有効な手法でないかと考えられる。また境界条件に関しても任意の混合境界条件を含ませることが可能であり、実際の構造の解析を行うにあたっては有力な手段となろう。しかしながら開口のごく近傍などのように曲げの考慮が必要となる部分の処理については今後さらに研究を続ける必要がある。

本研究を行うにあたっては多数の方々の御協力を受けた。試験片材料を提供していただいた住友金属株式会社プログラム作製の際に協力された東京大学大学院工学系研究科の大坪、野本の両氏および実験の遂行にあたって御助力をいただいた東京大学原子力工学科安藤研究室の黒沢、長谷川、鈴木、染谷、伊藤の各氏、ならびに研究生の新井氏に厚く感謝する次第である。

参 考 文 献

- 1) 安藤、飯田、川井、矢川、菊地：曲面を有する膜応力有限要素による円筒殻の応力解析，第 9 回構造の軽量化に関するシンポジウム講演集（昭和 43 年 11 月），pp.13～16
- 2) H. C. Martin : An Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis, McGraw-Hill, (1966)
- 3) R. W. Bailey and R. Fidler : Stress Analysis of Plates and Shells containing Patterns of Reinforced Holes, Nuclear Engineering and Design 3, (1966), pp.41～53
- 4) 安藤、飯田、川井、矢川：エネルギー法による有孔矩形板の応力集中に関する研究，造船協会論文集第 122 号，（昭和 42 年 12 月），pp.146～156
- 5) 吉識、川井、吉村：マトリックス法による船体構造解析に関する研究（Ⅱ），造船協会論文集第 121 号，（昭和 42 年 6 月），pp.150～156

APPENDIX—円筒曲面を有する膜応力要素の剛性マトリックスの導出法について¹⁾

本文中の Fig.1 において x, y 方向およびそれらは垂直は方向に z 座標を考え、各々の変位成分を u, v, w とする。ただし (x, y, z) 座標系が右手系になるように z の正方向を円筒殻の外方向にとる。解析に用いる要素内の変位を

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-1})$$

と仮定する。ここに要素として円筒曲面を有する 3 角形を用い、その頂点の (x, y) 座標を $(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ とおく。節点変位を一般座標の関数としてあらわせば

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & & & & & \\ & 1 & x_2 & y_2 & 0 & & 0 & \\ & & 1 & x_3 & y_3 & & & \\ & & & 1 & x_1 & y_1 & & \\ & 0 & & 1 & x_2 & y_2 & 0 & \\ & & & 1 & x_3 & y_3 & & \\ & & & & 1 & x_1 & y_1 & \\ 0 & & 0 & & 1 & x_2 & y_2 & \\ & & & & 1 & x_3 & y_3 & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-2})$$

となる。ここに $u_i, v_i, w_i (i=1, 2, 3)$ は、座標点 $(x_i, y_i)_{i=1,2,3}$ における変位量を示す。一般座標を節点変位であらわすと (A-2) より

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-3})$$

のようになる。ここに

$$A = \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 & x_3y_1 - x_1y_3 & x_1y_2 - x_2y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-4})$$

および

$$2J = \det. \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A-5})$$

である。円筒殻の膜理論による歪-変位関係により

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{R} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (\text{A-6})$$

となり (A-6) に (A-1) の変位を代入すれば

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{R} & \frac{x}{R} & \frac{y}{R} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

として、歪成分が一般座標によつてあらわされる。また応力-歪関係としては

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{A-8})$$

を用いる。

次に仮想仕事の原理を用いて要素の剛性マトリックスを導く。節点において仮想変位 δu_i を考えると (A-1) および (A-3) より要素内の仮想変位 $\delta \varepsilon$ は

$$\delta u = M \delta Q = M A^{-1} \delta u_i \quad (\text{A-9})$$

また (A-7) より仮想歪 $\delta \varepsilon$ は

$$\delta \varepsilon = B \delta Q = B A^{-1} \delta u_i \quad (\text{A-10})$$

とあらわされる。節点力による仮想仕事は節点力を X_i として

$$\delta u_i^T X_i \quad (\text{A-11})$$

となり、一方内力 σ による仮想内力仕事は単位体積について

$$\delta \varepsilon^T \sigma = \delta u_i^T (A^{-1})^T B^T \sigma \quad (\text{A-12})$$

とあらわされるので仮想仕事の原理より (A-11) と (A-12) を用いて

$$\delta \mathbf{u}_i^T \mathbf{X}_i = \delta \mathbf{u}_i^T \iiint (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dxdydz \quad (\text{A-13})$$

となる。ただし積分は要素に関する体積積分をあらわす。次に節点における仮想変位 $\delta \mathbf{u}_i$ の任意性を用いることにより

$$\mathbf{X}_i = \iiint (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dxdydz \quad (\text{A-14})$$

となる。(A-8) および $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_i$ という関係を用いると (A-14) は

$$\mathbf{X}_i = \left[\iiint (\mathbf{A}^{-1})^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} dxdydz \right] \mathbf{u}_i \quad (\text{A-15})$$

と書き換えられ $\mathbf{A}^{-1}$ は積分に関して定数であるので要素の剛性マトリックスは

$$\mathbf{k} = (\mathbf{A}^{-1})^T \left[\iiint \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dxdydz \right] \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{A-16})$$

と記すことができる。ここに (A-16) の被積分マトリックス $\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & & & & & \\ & & & \text{Sym.} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & \frac{1-\nu}{2} & & & \\ 0 & \nu & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & \frac{\nu}{R} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} & \frac{1}{R^2} & \\ 0 & \frac{\nu x}{R} & 0 & 0 & 0 & \frac{x}{R} & \frac{x}{R^2} & \frac{x^2}{R^2} \\ 0 & \frac{\nu y}{R} & 0 & 0 & 0 & \frac{y}{R} & \frac{y}{R^2} & \frac{xy}{R^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A-17})$$

とあらわされる。