(昭和 44 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

マトリックス法による骨組構造物の 弾 塑 性 解 析 (その 2)

正員 上 田 幸 雄* 正員 赤 松 毅 人**
正員 近 江 義 夫**

Elastic-Plastic Analysis of Framed Structures Using the Matrix Method
(The 2nd Report)

By Yukio Ueda, *Member* Taketo Akamatsu, *Member*
Yoshio Ohmi, *Member*

Summary

In the previous paper, the authors developed the general form of the stiffness matrix of elastic-plastic members of one-dimension based on the plastic flow theory and presented the new method of analysis on framed structures using the matrix method.

The method was developed on the assumptions that loadings on structures are to be applied proportionally and there is no yielded section where unloading occurs under proportional loading.

In actual cases, however, it is very important to investigate the behaviors of structures under general loadings. Furthermore, the proportional loading does not always assure no unloading at yielded sections of elastic-plastic behavior of structures. This implies that unloading at yielded sections should be examined at each step of loadings. To this end, a judging method for unloading is required to be established.

In the previous paper, a quantity, λ which indicates the magnitude of plastic deformation at a yielded section is assumed positive for the following step of the analysis. This quantity is however, not always positive and when it is negative, the deformation is considered to be elastic. Accordingly, unloading at a yielded section is inspected by the condition

$$\lambda < 0$$

and loading is continued at a yielded section, when

$$\lambda \geq 0$$

In this report, furthermore, the effect of large deformation is taken into consideration and the method is expanded for the analysis on elastic-plastic behaviour of structures with large deformation and instability. In this case, unloading at a yielded section is also examined by the same condition as mentioned above.

1 緒 言

マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析において、従来の単純塑性解析法では部材の内力比の変化に伴った降伏条件を常に満足するのに困難な場合がある。特に、立体骨組構造の解析では、この種の困難さが顕著となり、解析の精度が非常に低下することになる。そこで著者等は前報において、塑性流れ理論をもとにした新しい塑性関節機構——全断面塑性——を考案し、常に降伏相関関係を満足しているような骨組構造の新しい弾塑性

* 大阪大学工学部

** 大阪大学大学院工学研究科

解析法を展開した。

前回の報告では、構造物に作用する荷重は常に比例荷重とし、部材のいずれの点においても、除荷は生じないものとして、立体骨組を始め数例を解析した。しかし、骨組の弾塑性解析では、比例荷重が必ずしも部材に除荷の生じないことを保証するものではないし、また、実際の構造物の解析では、変動荷重のもとでの構造物の弾塑性挙動を解析することが重要となる。

本論文では、上述のような問題を解決するため、部材の降伏断面に除荷が生じる条件について考察し解析例を示す。

骨組構造の弾塑性挙動における大撓みおよび不安定問題に対するマトリックス法を用いた解析は種々示されているが、弾塑性挙動を行う場合に対しては、極く限られた帯板の場合について、塑性解析法を用いた解析例があるにすぎないようである。

そこで、前報において示された新しい弾塑性解析法を、大変形問題を取扱う場合にまで拡張し、それを用いて簡単な平面骨組の大撓みならびに不安定問題についての解析例を示す。さらに、帯板の弾塑性挙動を解析し、これまでの塑性解析法とそれぞれの関節機構の特性を比較する。

2 骨組構造の弾塑性解析法^{1,2)}

前報で述べたように、構造物の部材に全断面降伏が生じる条件はその部材の降伏関数を F とすると、

$$F = 0 \quad (1)$$

であり、材料の歪硬化がないと仮定すると、それ以後の塑性変形は、

$$\delta F = 0 \quad (2)$$

を常に満足する。一方、その断面に除荷が生じると、

$$\delta F < 0 \quad (3)$$

となる。

Fig. 1 Nodal forces and nodal displacements

構造物に作用する荷重はすべて集中荷重とし、可能な降伏断面間を単位部材とする。そして、部材端を i, j とすると、それらの点に作用する力（およびモーメント） $\{R\}$ と変形（および回転角） $\{u\}$ の関係は部材が弾性挙動をする場合には、弾性剛性行列 $[K]$ を用いて、次式で与えられる。

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (4)$$

この場合、 $[K]$ は荷重の大きさに無関係な一定値をとるので、(4) 式は線形関係を示している。部材端における $\{R\}$ が降伏条件 $F=0$ を満足すると、その部材端に全断面降伏が生じる。

部材端が降伏すると、それ以後の変形の増分 $\{\delta u\}$ は、弾性および塑性変形成分の増分、 $\{\delta u^e\}$ および $\{\delta u^p\}$ の和として表わされ下式のようにになる。すなわち、

$$\{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u_i^e \\ \delta u_j^e \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta u_i^p \\ \delta u_j^p \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、塑性流れ理論によると、塑性変形の増分 $\{\delta u^p\}$ は、定数 $[\lambda]$ を用いて

$$\{\delta u^p\} = \begin{Bmatrix} \delta u_i^p \\ \delta u_j^p \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_i \\ \left(\frac{\partial F}{\partial R} \right)_j \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_i \\ \phi_j \end{Bmatrix} \quad (6)$$

上式から知られるように、塑性変形量は $[\lambda]$ の大きさによつて決定される。したがって、部材端 i または j が弾性的場合には $[\lambda_i]$ または $[\lambda_j]$ を考慮する必要がない。

部材の断面が降伏し、塑性変形を生じて部材端における力の変化量 $\{\delta R\}$ は、弾性変形の変化量と対応し、

$$\{\delta R\} = \begin{Bmatrix} \delta R_i \\ \delta R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i^e \\ \delta u_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i - \delta u_i^p \\ \delta u_j - \delta u_j^p \end{Bmatrix} \quad (7)$$

で表わされる。

(2)式、(6)式および(7)式より、全断面降伏を生じた部材における、力の増分 $\{\delta R\}$ と変形の増分 $\{\delta u\}$ との関係は、

$$\{\delta R\} = \begin{Bmatrix} \delta R_i \\ \delta R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & K_{ij}^p \\ K_{ji}^p & K_{jj}^p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

となり、弾性的の場合と違った剛性行列 $[K^p]$ で表わされる($[K]$ の具体的な形を付録Iに示す)。また剛性行列 $[K^p]$ は荷重の増分に関する $(\delta F/\delta R)$ を含んでいるので、結局(8)式は非線形となる。解析は変位法によって行うので、各部材に対して(4)式または(8)式を適用し、構造全体についての平衡方程式を得る。そして、与えられた荷重および支持条件のもとで平衡方程式を解き、各点の変位が計算される。解析において、弾性部材に対する(4)式は線形であるが、降伏部材に対する(8)式は非線形であるので、剛性行列 $[K^p]$ に含まれる $\{\delta F/\delta R\}$ は、次の微小荷重増分に対しては変化しないと線形化して計算を行う。

3 変動荷重を受ける骨組の弾塑性解析法

3.1 降伏断面における除荷の判定条件³⁾

前章で述べた解析法においては、降伏断面で $(\delta F/\delta R)$ は変化しないと考え平衡方程式を線形化して解いたが、このことは、降伏断面では、次の荷重増分に対しても塑性挙動を行う。すなわち、除荷はないという前提で計算していることになる。もし、除荷が生じるならば、その部材に対しては(4)式(もし、降伏断面が一端に残る場合には、その条件を考慮した(8)式)を用いねばならない。

このことは、塑性変形を定義した(6)式において、 $[\lambda]$ が必ず正の値になることを仮定したのと同じである。ところで、この $[\lambda]$ が零となることは、塑性変形が無いことを意味し、さらに、負となることは、この荷重段階の計算の最初に仮定した変形の方と違っている。すなわち、除荷が生じたことを示しているのである。したがって塑性変形が進行している場合は、

$$[\lambda] \geq 0 \quad (9)$$

となり、降伏断面に除荷が生じた場合の判定条件は

$$[\lambda] < 0 \quad (10)$$

となる。上式を具体的に表わした式を付録Iに示す。

3.2 変動荷重を受ける場合の解析法

降伏断面において除荷が生じた場合の判定は(10)式を用いて行なうことができる。したがって、このような除荷が生じた場合には、次の荷重増加に対して、その部材の剛性行列は、降伏断面が弾性に戻った場合の(4)式または(8)式を用いて、次の荷重増分に対する平衡方程式を作り、それを解いて、解析を続ける。

ところで、このような方法で解析を進めると、除荷の判定が少くとも一荷重段階(場合によっては数段階)遅れることになり、解析結果の精度を低下させる可能性がある。そこで、降伏断面において除荷を判定し、変形と部材剛性との正しい組合せが発見されるまでの間は、荷重増分を零にさせる。すなわち、解析を進めないことにすると、上述の問題が解決されることになる。本論文の例題では、この方法によった。

4 大撓みを伴う場合の弾塑性解析法

弾性挙動を行う骨組構造が大撓みを伴う場合に、曲げ振りの影響を無視すると部材に生じる歪 ε は、その段階までの歪 ε_0 と次の荷重増分に対する歪の増分 ε_a の和として表わされる⁴⁾。

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \varepsilon_a \quad (11)$$

ここで、Fig. 1を参照して、

$$\varepsilon_a = \frac{dv_x}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dv_y}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dx} \right)^2 \right\} + \left(\frac{dv_{y0}}{dx} \cdot \frac{dv_y}{dx} + \frac{dv_{z0}}{dx} \cdot \frac{dv_z}{dx} \right) - y \frac{d^2 v_y}{dx^2} - z \frac{d^2 v_z}{dx^2} \quad (12)$$

上式の第3項は、各荷重増分に対する計算で部材は真直ぐであると考え、無視されることになる。

単位部材に貯えられる歪エネルギー U は、

$$U = U_0 + U_1 + U_2$$

$$= U_0 + E\varepsilon_0 \int \int \int \varepsilon_a dx dy dz + \frac{E}{2} \int \int \int (\varepsilon_a)^2 dx dy dz \quad (13)$$

ところで、部材の剛性行列 K_{ij} は

$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial u_i \partial u_j} \quad (14)$$

で得られる。ここで、(13) 式の歪エネルギーにおいて、変位に関する2次以外の項を無視し、(14) 式にならって剛性行列を求めると、

$$K_L = K + P_0 K' \quad (15)$$

ここで、 K は微小変形の場合の剛性行列(4)式であり、 P_0 は軸力である。また、 $P_0[K']$ は安定係数行列または初期応力剛性行列と呼ばれるものである(K' の式を付録Ⅱに示す)。

したがって、構造物が大変形する場合に、第 n 荷重段階における荷重増分と節点における変位増分との関係は

$$\{\delta R\} = [K_L] \{\delta u\} \quad (16)$$

この関係は、各部材についての局部座標に対するものである。各荷重段階における変形によつて、局部座標系は移動し、その影響によつて、基準座標系への変換行列が変化していくことになる。このことを考慮して、構造物全体の平衡方程式を作成し、順次、構造物の挙動を追跡することができる。

さて、構造物に作用する荷重が増大すると、部材に全断面降伏が生じることがある。この降伏は(1)式によつて判定される。

降伏の生じた部材の変形増分は(5)式のように弾性変形増分と塑性変形増分の和として表わされ、その塑性変形増分は(6)式で定義される。(6)式から知られるように、塑性変形増分は降伏関数 F の関数であり、その大きさを示す $[\lambda]$ は定数で、構造物の変形が微小な場合でも、大撓みを生じる場合にも成立するもので、それらの影響を直接には受けないことを示している。したがって、荷重増分と変位増分の関係を示す(7)式は、変形が微小な場合と同様に、

$$\{\delta R\} = \begin{Bmatrix} \delta R_i \\ \delta R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Lii} & K_{Lij} \\ K_{Lji} & K_{Ljj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i^e \\ \delta u_j^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{Lii} & K_{Lij} \\ K_{Lji} & K_{Ljj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i - \delta u_i^p \\ \delta u_j - \delta u_j^p \end{Bmatrix} \quad (17)$$

となり、最後に(8)式に対応して次式を得る。

$$\{\delta R\} = \begin{Bmatrix} \delta R_i \\ \delta R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{pLii} & K_{pLij} \\ K_{pLji} & K_{pLjj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix} \quad (18)$$

上式における大撓みの場合の塑性剛性行列は、微小変形の場合の $[K^p]$ の導出の際に用いた(4)式の $[K]$ に代つて、(16)式の $[K_L]$ を用いたものに他ならない。

したがって、大撓みを生じる構造物の弾塑性解析は、これまでの方法と同様に、弾性部材に対して(16)式、降伏断面を有する部材に対しては(18)式を適用し、各荷重増分に対して構造物全体の平衡方程式を作り、それを解くことになる。ただし、この解析では各荷重段階に対して得られた新しい変形位置を、次の荷重増分に対する解析の基準とする。ゆえに、各部材節点の変位した位置を新しい部材節点位置として、局部座標系を設定し、その座標系から基準座標系に変換して解析が進められることになる。なお前章では、降伏断面に対する除荷の判定条件を示したが、骨組が大撓みを生じる場合においても、この判定条件をそのまま適用することができる。したがって、除荷を考慮した骨組構造の弾塑性ならびに不安定現象の解析が可能である。

5 解 析 例

これまで示した解析法に従つて計算用のプログラムを作成し、それを用いて変動荷重を受ける場合ならびに大撓みを伴う場合の骨組構造物の弾塑性挙動の解析を行う。

5.1 変動荷重を受ける場合

(a) 解析例1 (Fig. 2)

まず、簡単な例として、Fig. 2 に示す門形フレームに外力 V および H を同図に示すような順序で作用させた場合を解析する。全断面降伏は曲げだけによるものとして解析し、その結果、降伏断面の形成順序、および荷重と

変位との関係を Fig. 2 に示す。この問題に対し Neal⁵⁾はフレームを剛塑性体として取扱っており、撓みの比較はできないが、全断面降伏の形成順序および残留モーメントが Neal の解と完全に一致している。

この場合、全断面降伏は曲げモーメントだけによって規定されるとして解析したので、降伏断面に除荷が生じる場合は、その時までの降伏断面に生じている回転が逆方向になることから判定することができるので、単純塑性解析法においても除荷の判定は容易である。

(b) 解析例 2 (Fig. 3)

一般に、外力を受ける骨組構造の部材には組合せ内力が生じており、通常、降伏断面における除荷の判定は難しいが、本解析法では λ の正負、すなわち (10) 式によって容易に行なわれる。

いま、例として、解析例 1 のフレームについて、曲げと軸力の相関々係を考慮して解析し、その結果を Fig. 3 に示す。この場合、 $i-j$ 部材に対する力 (およびモーメント) の成分 $\{R\}$ ならびに変形成分 $\{u\}$ は

$$\{R\} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{Bmatrix}, \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} \quad (19)$$

となる (Fig. 1-a)。また、降伏関数 f として次式を用いる。

$$f = |m_z| + n_x^2 - 1 \quad (20)$$

ここで

$$m_z = \frac{M_z}{M_{0z}}, \quad n_x = \frac{F_x}{F_{0x}}, \quad M_{0z} = \text{全塑性モーメント}, \quad F_{0x} = \text{全断面降伏力}$$

なお、図中 P_p は水平力が垂直力が比例的に同時に作用した場合の塑性崩壊荷重である。

Fig. 2 Portal frame under repeated loading (bending only)

Fig. 3 Portal frame under repeated loading (bending and axial force)

(c) 解析例 3 (Fig. 4, Fig. 5)

立体骨組構造物の例として、Fig. 4 に示すような直角折線梁を解析する。これは前報における解析例 4 と同じもので、変動荷重、 P_1 および P_2 を同図に示す順序で与える。また、部材の降伏関数 f として、次式を用いる。すなわち、

$$f = m_x^2 + m_y^2 + m_z^2 - 1 \quad (21)$$

ここで

$$m_x = \frac{M_x}{M_{0x}}, \quad m_y = \frac{M_y}{M_{0y}}, \quad m_z = \frac{M_z}{M_{0z}}, \quad M_{0i} : \text{それぞれの方向の全塑性モーメント}$$

$i-j$ 部材端における力 (およびモーメント) $\{R\}$ 、ならびに変形 $\{u\}$ は Fig. 1-b を参照して、

$$\begin{aligned} \{R\} &= \{F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z\}^T \\ \{u\} &= \{v_x, v_y, v_z, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T \end{aligned} \quad (22)$$

解析は、電子計算機用プログラムによって自動的に除荷の判定を行いつつ進められ、その結果を Fig. 4 および Fig. 5 に示す。

Fig. 4 Right-angle bent under repeated loading

Fig. 5 Right-angle bent under repeated loading (stress profiles)

Fig. 4 には、全断面降伏形成順序と P_1 または P_2 の荷重と P_1 の作用点に生じる垂直変位とを示し、Fig. 5 では変動荷重のもとで、節点 1 および 2 における内力の複雑な変動経過を示している。

(d) 解析例 4 (Fig. 6)

骨組構造の弾塑性解析では、比例荷重のもとにおいても部材に除荷が生じる可能性のあることを、倉西⁹⁾は例題において指摘している。ここでは同じ例——門形ラーメン (Fig. 6)——を解析したが、その結果は倉西の解析結果と全く一致している。Fig. 6 に荷重点の変位と荷重との関係を示したが、水平変位がその方向を変えるところで降伏断面に除荷が生じている。このような特殊な場合ではあるが、骨組の弾塑性挙動では比例荷重のもとでも除荷を伴うことがあるので、解析では除荷が生じているかどうかを、常に調査しながら進めることが望ましい。

Fig. 6 Portal frame under proportional loading, accompanying unloading

5.2 大撓みを伴う場合ならびに不安定問題

計算用プログラムには、大撓みの影響および除荷の判定条件が同時に組込まれており、弾塑性大撓みならびに不安定問題が自動的に解析される。

(a) 解析例5 (Fig. 7)

軸圧縮力を受ける両端固定の棒の弾性座屈は、すでに例題⁴⁾として解析されているが、棒を長さ方向に2等分し、上下対称条件を考慮した時の平衡方程式は

$$\begin{Bmatrix} P \\ 0 \end{Bmatrix} = [K_L] \begin{Bmatrix} v_{x1} \\ v_{y2} \end{Bmatrix} \quad (23)$$

ここで

$$[K_L] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 \\ 0 & 2\left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{6}{5} \frac{P_0}{L}\right) \end{bmatrix}$$

この場合、荷重を徐々に増加させても、棒の変形は軸方向だけであるが、 $[K_L]$ の中の P_0 が負であるので、これがある値になると

$$[K_L] = 0$$

となり、上式は解けなくなる。この時の荷重 P_{0cr} は座屈値で

$$P_{0cr} = 10 \frac{EI}{L^2} = 40 \frac{EI}{l^2}$$

となり、正解値 $4\pi^2 EI/l^2 = 39.44 EI/l^2$ と比較して、棒を2等分しただけでも非常によい結果を与えている。

(b) 解析例6 (Fig. 8)

帯板が中央に集中荷重を受けて変形する場合、荷重が大きくなると弾塑性大撓みとなる。この場合の挙動を解析するため、帯板を梁と考え、長さ方向に12分割して計算を行う。また、帯板に生じる軸力と曲げを考慮した降伏関数 f として(20)式を用いる。結果はFig. 8に示すように、別に行った近似計算ならびに実験結果と比較して、非常によい一致を得た。また、解析では除荷経路も同時に解析したので結果を同図に示す。近似計算はYoung⁷⁾が示した方法で、塑性関係における回転と分離を考慮したものであり、本計算で内力が常に降伏条件を満足しながらその曲線上を移動するときに、それらの要素が自動的に導入されていることを示している。

なお、帯板が塑性膜になった状態に対応して、帯板を構成する要素の節点が、すべて全断面降伏に達している

Fig. 7 Elastic buckling of column

Fig. 8 Strip subjected to a concentrated load

が、それ以後の荷重と撓みの関係では近似計算の結果のように撓みが大きくなる。

(c) 解析例7 (Fig. 9)

簡単な門形フレームに、水平荷重 H と垂直荷重 $V=H$ を比例的に作用させた場合に、フレームの断面寸法を一定 ($10\text{ mm} \times 10\text{ mm}$) にして長さ $2L$ および高さ L を順次変化した場合の弾塑性挙動を、大撓みの影響を考慮して解析する。

フレーム1 ($L=250\text{ mm}$) では、大撓みの影響によつて部材に作用するモーメントがやや増加するため単純塑性解析の崩壊荷重より少し低めの荷重で崩壊している。

フレーム2 ($L=500\text{ mm}$) では、塑性崩壊のために必要な最後の降伏断面を生じる前に不安定現象を生じている。

弾塑性大撓みおよび不安定問題の解析理論では (12) 式の第3項を省略して安定係数行列を導びいたが、特に不安定現象ではその項が重要な影響を及ぼすことがあるので、現在、この点を考慮して骨組の塑性崩壊と不安定現象を解析中である。

Fig. 9 Portal frames with large deflection

6 結 言

本論文では、前報の弾塑性解析理論にもとづき、降伏断面に除荷が生じる場合の条件を示し、骨組構造が変動荷重を受ける場合、あるいは比例荷重を受ける構造物の弾塑性挙動で、降伏断面に除荷が生じる場合の例をあわせて解析した。

さらに、大撓み、または不安定を伴う構造物の弾塑性解析法を、前報の解析法をもとに展開し、帯板を含む数例を解析した。帯板の解析では Young の方法に現われる塑性関節における回転と分離が自動的に導入された方法になっている。

このようにして、骨組構造物が変動荷重を受ける場合で、しかも大撓みならびに不安定現象を伴う場合の解析が可能となった。

最後に終始ご指導を賜りました大阪大学八木教授に深謝します。

なお、計算にあたっては、京大大型計算機センター FACOM 230-60 を使用した。

参 考 文 献

- 1) 上田, 松石, 山川, 赤松: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第 124 号 (1968)
- 2) Y. Ueda, T. Yamakawa, T. Akamatsu and M. Matsuishi: A New Theory on Elastic-Plastic Analysis of Framed Structures, 大阪大学工学報告, Vol. 19, No. 875, 1969
- 3) 上田, 松石, 山川, 赤松: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本鋼構造協会, マトリックス構造解析講演論文集, 1969
- 4) H. C. Martin: "On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems". Prog of the 1st International Congress on Matrix Method in Structural Mechanics, 1966
- 5) B. G. Neal: The Plastic Methods of Structural Analysis, Chapman & Hall, London, 1956.
- 6) 倉西: 除荷関節の出来る構造の座屈崩壊と塑性崩壊, 個人ノート
- 7) A. G. Young: Ship Plating Loaded beyond the Elastic Limits, T. I. N. A., 1959

付 録 I

剛性行列 $[K^p]$ の導出を以下に示す。(2) 式を具体的に示すと,

$$0 = \{\delta F\} = \begin{Bmatrix} \delta F_i \\ \delta F_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_i^T \delta R_i \\ \left(\frac{\partial F}{\partial R}\right)_j^T \delta R_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_i^T & 0 \\ 0 & \phi_j^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta R_i \\ \delta R_j \end{Bmatrix} \quad (\text{I-1})$$

となる。(I-1) に (7) 式および (6) 式を順次代入し, λ_i, λ_j を求める。

(i) 部材の断面 i, j が弾性的の場合

$\lambda_i = \lambda_j = 0$ となり, 直ちに (4) 式の $[K]$ が得られる。

(ii) 断面 i が塑性, j が弾性的の場合

$\lambda_i \neq 0, \lambda_j = 0$ となり, $\delta F_i = 0$ の条件を用いると λ は下式のようにになる。

$$\lambda_i = \phi_i^T \frac{[K_{ii} \ K_{ij}]}{\phi_i^T K_{ii} \phi_i} \begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix}$$

$$\lambda_j = 0$$

上式の関係を (7) 式に代入すると, 剛性マトリックスは

$$[K^p] = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & K_{ij}^p \\ K_{ji}^p & K_{jj}^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{ii} - \frac{K_{ii}\phi_i\phi_i^TK_{ii}}{\phi_i^TK_{ii}\phi_i} & K_{ij} - \frac{K_{ii}\phi_i\phi_i^TK_{ij}}{\phi_i^TK_{ii}\phi_i} \\ K_{ji} - \frac{K_{ji}\phi_i\phi_i^TK_{ii}}{\phi_i^TK_{ii}\phi_i} & K_{jj} - \frac{K_{ji}\phi_i\phi_i^TK_{ij}}{\phi_i^TK_{ii}\phi_i} \end{bmatrix}$$

となる。

(iii) 断面 i が弾性, j が塑性の場合

$$\lambda_i = 0$$

$$\lambda_j = \phi_j^T \frac{[K_{ji} \ K_{jj}]}{\phi_j^TK_{jj}\phi_j} \begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix}$$

したがって, 剛性マトリック $[K^p]$ を求めると

$$[K^p] = \begin{bmatrix} K_{ii} - \frac{K_{ij}\phi_j\phi_j^TK_{ji}}{\phi_j^TK_{jj}\phi_j} & K_{ij} - \frac{K_{ij}\phi_j\phi_j^TK_{jj}}{\phi_j^TK_{jj}\phi_j} \\ K_{ji} - \frac{K_{jj}\phi_j\phi_j^TK_{ji}}{\phi_j^TK_{jj}\phi_j} & K_{jj} - \frac{K_{jj}\phi_j\phi_j^TK_{jj}}{\phi_j^TK_{jj}\phi_j} \end{bmatrix}$$

となる。

(iv) 断面 i, j が塑性の場合

$$\lambda_i = \frac{\left(\phi_i^T[K_{ii} \ K_{ij}]\begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix}\right)(\phi_j^TK_{jj}\phi_j) - \left(\phi_j^T[K_{ji} \ K_{jj}]\begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix}\right)(\phi_i^TK_{ij}\phi_j)}{(\phi_i^TK_{ii}\phi_i)(\phi_j^TK_{jj}\phi_j) - (\phi_i^TK_{ij}\phi_j)^2}$$

$$\lambda_j = \frac{\left(\phi_j^T[K_{ji} \ K_{jj}]\begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix}\right)(\phi_i^TK_{ii}\phi_i) - \left(\phi_i^T[K_{ii} \ K_{ij}]\begin{Bmatrix} \delta u_i \\ \delta u_j \end{Bmatrix}\right)(\phi_j^TK_{jj}\phi_j)}{(\phi_i^TK_{ii}\phi_i)(\phi_j^TK_{jj}\phi_j) - (\phi_i^TK_{ij}\phi_j)^2}$$

剛性マトリックス $[K^p]$ を求めると

$$[K^p] = \begin{bmatrix} K_{ii}^p & K_{ij}^p \\ K_{ji}^p & K_{jj}^p \end{bmatrix}$$

となり, ここで

$$K_{ii}^p = K_{ii} - \{K_{ii}\phi_i(\phi_j^TK_{jj}\phi_j\phi_i^TK_{ii} - \phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_j^TK_{ji}) + K_{ij}\phi_j(-\phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_i^TK_{ii} + \phi_i^TK_{ii}\phi_i\phi_j^TK_{ji})\}/A$$

$$K_{ij}^p = K_{ij} - \{K_{ii}\phi_i(\phi_j^TK_{jj}\phi_j\phi_i^TK_{ij} - \phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_j^TK_{jj}) + K_{ij}\phi_j(-\phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_i^TK_{ij} + \phi_i^TK_{ii}\phi_i\phi_j^TK_{jj})\}/A$$

$$K_{ji}^p = K_{ji} - \{K_{ji}\phi_i(\phi_j^TK_{jj}\phi_j\phi_i^TK_{ii} - \phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_j^TK_{ji}) + K_{jj}\phi_j(-\phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_i^TK_{ii} + \phi_i^TK_{ii}\phi_i\phi_j^TK_{ji})\}/A$$

$$K_{jj}^p = K_{jj} - \{K_{ji}\phi_i(\phi_j^TK_{jj}\phi_j\phi_i^TK_{ij} - \phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_j^TK_{jj}) + K_{jj}\phi_j(-\phi_i^TK_{ij}\phi_j\phi_i^TK_{ij} + \phi_i^TK_{ii}\phi_i\phi_j^TK_{jj})\}/A$$

である。 $A = (\phi_i^TK_{ii}\phi_i)(\phi_j^TK_{jj}\phi_j) - (\phi_i^TK_{ij}\phi_j)^2$

付 録 II

本文(13)式の歪エネルギー U に対して、剛性マトリックスを求めると、 U_0 は微分により消滅し、 U_1 より K_1 、また U_2 から K が得られる。

U_1 は具体的に

$$U_1 = E\varepsilon_0 \iiint \left(\frac{dv_x}{dx} - y \frac{d^2 v_y}{dx^2} - z \frac{d^2 v_z}{dx^2} \right) dx dy dz + \frac{1}{2} E\varepsilon_0 \iiint \left\{ \left(\frac{dv_y}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dx} \right)^2 \right\} dx dy dz \quad (\text{II-1})$$

上式の第1項は微分により消滅するので、第2項だけを考えることになる。いま、変形 v_x 、 v_y 、 v_z を下式のよう選ぶ。

$$\begin{aligned} v_x &= a_0 + a_1 x \\ v_y &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \\ v_z &= c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \end{aligned} \quad (\text{II-2})$$

この変形を(II-1)式に代入すると

$$U_1 = \frac{1}{2} P_0 \int_0^l \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} dx \quad (\text{II-3})$$

ここで

$$L = \begin{bmatrix} 1 & \text{SYM.} \\ 2x & 4x^2 \\ 3x^2 & 6x^3 & 9x^4 \end{bmatrix}$$

部材端 i, j の変位を(II-2)式に代入すると

$$\begin{aligned} a_0 &= v_{xi}, & b_0 &= v_{yi} \\ a_2 &= \frac{v_{xj} - v_{xi}}{l}, & b_1 &= \theta_{zi} \\ b_2 &= \frac{3}{l^2} (v_{yj} - v_{yi}) - \frac{1}{l} (2\theta_{zi} + \theta_{zj}) \\ b_3 &= -\frac{2}{l^3} (v_{yj} - v_{yi}) + \frac{1}{l^2} (\theta_{zi} + \theta_{zj}) \end{aligned} \quad (\text{II-4})$$

c_i についても同様の関係が得られる。(II-3)式に(II-4)式を代入し、(14)式によつて微分すると、

$$K_1 = \begin{bmatrix} v_{y1} & v_{z1} & \theta_{y1} & \theta_{z1} & v_{y2} & v_{z2} & \theta_{y2} & \theta_{z2} \\ \frac{6}{5L} & & & & & & & \\ 0 & \frac{6}{5L} & & & & & & \text{SYM.} \\ 0 & \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & & & & & \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} & & & & \\ -\frac{6}{5L} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & & & \\ 0 & -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{6}{5L} & & \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \\ \frac{1}{10} & 0 & 0 & -\frac{L}{30} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & \frac{2L}{15} \end{bmatrix}$$

となる。