(昭和 45 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

低サイクル疲労亀裂の発生, 伝播と 歪の繰り返し挙動

——切欠付平板試験片と小型丸棒試験片の相関について——

正員 安 藤 良 夫* 正員 飯 田 国 広*
正員 征 矢 勇 夫**

Initiation and Propagation of a Crack and Cyclic Behavior of
Strain in Low-Cycle Fatigue

——Correlation between a plate specimen with a notch and a bar specimen——

by Yoshio Ando, *Member* Kunihiro Iida, *Member*
Isao Soya, *Member*

Summary

The cyclic behaviors of strain in mild steel plate specimens with a central notch were investigated in static tensile test and zero-to-tension cyclic loading test. In the cyclic test a cumulative damage law was applied to the crack initiation life by using the strain behavior at the tip of the notch, and satisfactory results were obtained. The strain controlled fatigue test simulating the strain behavior at the tip of notch was carried out by using small bar specimens of the same material, and a good correlation was found between the crack initiation life of the plate specimen and that of the bar specimen. By comparing the fatigue test of a lineary increasing mean strain and that of a constant mean strain, the crack initiation life in the increasing mean strain test was shorter than that in the constant mean strain test.

The fatigue crack propagation in the plate specimen was observed under the condition of a constant, stepwise increased or stepwise decreased net section stress range. The crack propagation rate was correlated to the maximum strain at the tip of a crack or the stress intensity factor range. The characteristics of the crack propagation and the strain behavior after the stepwise decrease of net section stress range were very different from the other condition of net section stress range.

1 ま え が き

鋼材あるいはその溶接継手の低サイクル疲労挙動に関する従来の研究の多くは2つに大別される。1つは応力集中部を有する平板か構造要素試験片あるいは数分の一のモデルによつて、実際の構造物の低サイクル疲労強度を直接的に把握する目的のために行われる荷重制御試験である。また1つは構造物の応力集中部における歪の繰り返し挙動がおよそ一定の歪振幅になっているという定性的事実に基づいて、小型の丸棒試験片を用いて行われる歪制御試験である。そして低サイクル疲労破壊防止設計法では、たとえば ASME の Boiler and Pressure Vessel Code Sec. III や USAS B 31.7 規格などでは、後者の試験から得られた $\epsilon-N$ 線図を基礎として求められた疲労設計線図が設計理念の出発点とされている。

前者においては試験時間と経費の制約から同一系列について多数の試験片を試験することが困難であり、した

* 東京大学工学部

** 東京大学大学院工学系研究科

がつて試験系列相互の比較は定性的なものとなり易い。一方後者においては材料特性の差異を含めた寸法効果を特定値として明確に把握できない欠点, ならびに小型試験片による疲労試験の制御条件が果してどの程度実際の構造物の応力集中部における歪の繰返し挙動を再現しているか, あるいはどの程度の安全度が見込まれるのかといった不安が残る。

そこで両者の試験を合致させる試み, たとえば切欠付平板の荷重制御による疲労寿命と, 平板の切欠底における歪挙動を小型試験片で模擬することによつて得られる疲労寿命は同一であることを証明しようとする試みは, 低サイクル疲労の研究の流れとともに温存されてきたものであろうと考えられる。しかしながらこのような研究は実験技術上の難点のためか, これまでほとんど発表されておらず, わずかに J. H. Crews ら¹⁾の研究が挙げられるのみである。Crews らは 2024-T3 アルミ合金の側切欠付平板 ($K_t=2$) の完全片振りおよび完全両振りの荷重制御試験を行つて得られた切欠底の歪挙動を平滑試験片で模擬して応力の繰返し挙動を調べ, この応力挙動を媒体として切欠付平板試験片の疲労寿命と平滑試験片の応力制御疲労試験による疲労寿命とを比較した。その結果実断面公称応力の高い範囲ではほぼ良好な一致が得られたが低い範囲では大きく外れた。

近年疲労亀裂の伝播を stress intensity factor で整理することが多く行われている。高張力鋼またはアルミ合金などでは $(\Delta K)^n$ 法則に良く合うことが多くの研究者によつて示されているが, 軟鋼の場合には塑性変形量が多いので, K 値によつて整理することの妥当性が問題であり, 得られた n の値は研究者によつてかなり異なる²⁻⁴⁾。また制御応力の変動による亀裂伝播速さの変化を調べる実験^{5,6)}もなされているが, 亀裂伝播の一般的特性には不明な点が多い。

以上の背景のもとに著者らは構造用鋼材である SM 41 について 2 種の形状の切欠付平板試験片の静的引張り試験および低サイクル疲労試験における歪挙動を調べ, 切欠先端の歪の繰返し挙動を小型丸棒試験片で模擬することによつて両者の亀裂発生寿命を比較した。そして切欠付平板試験片について累積被害則の適用を試みた。さらに片振り引張り試験において実断面応力範囲が一定, および階段状増加・減少の制御条件で亀裂伝播速さと歪挙動を調べる実験を行い若干のデータが得られたのでここに報告する。

2 実験方法

2.1 切欠付平板試験片

供試材は SM 41 B で, その機械的性質を表 1 に示す。この材料について受納状態の板厚 13 mm の鋼板より, 図 1 に示す切欠付平板試験片を機械加工した。切欠形状は図に示すように 2 種類で, これを無限板中の橢円孔として応力集中係数を求めると⁶⁾ Type A は $K_t=5$, Type B は $K_t=10$ である。この試験片については 200/300 トンローゼンハウゼン型万能試験機により, 静的引張り試験と疲労試験を実施した。疲労試験は亀裂が発生し伝播を開始するまでは片振り引張りの荷重制御で行い, 伝播開始以後は実断面応力範囲が一定あるいは階段状に増加・減少するように, 亀裂長さに従つて荷重振幅を変化させた片振り引張り試験とした。

歪の計測はモアレ法により, あるサイクルでの零荷重時と最大荷重に達した後, 最大荷重よ

Table 1 Mechanical properties of SM 41 B steel (Test results by hour-glass shaped specimens)

yield stress σ_Y (kg/mm ²)	27.5(28.0)
nominal ultimate strength σ_u (kg/mm ²)	44.6(45.0)
yield to strength ratio σ_Y/σ_u	0.617(0.622)
fracture true stress σ_f (kg/mm ²)	97.0
reduction of area (%)	58.8
fracture ductility ϵ_f	0.887
elongation (%)	(30.0)

() : from Mill Sheet (G. L.=200 mm)

Fig. 1 Details of the plate specimen with a notch

り約 3~6% 低い荷重に保持して行つた。本研究で採用したモアレ法は永井ら⁷⁾の方法により 150 lines/in. の直交グリッドを試験片表面に食刻し、写真引伸し画像上にてモアレ干渉縞を出させ、W. Bossaert 氏⁸⁾の方法を linear mismatching 法に拡張して歪の解析を行つた。この歪解析法の概略については Appendix (a) に述べる。

2.2 小型丸棒試験片

平板試験片と同一鋼板より小型丸棒試験片を採用した。試験片形状は図 2 に示すように砂時計型で、最狭部直径は 8 mm、形状係数は Peterson 線図⁹⁾より $K_t=1.06$ であり、試験片表面を #800 エミリー紙まで研磨して試験に供した。用いた試験装置は荷重を与える油圧ジャッキおよび歪を制御する自動制御装置とからなる。制御条件は平板試験片の切欠先端の歪挙動を模擬する歪制御条件である。すなわち、モアレ法により計測された切欠先端の荷重方向全歪 ϵ_y は、著者の 1 人が従来より用いてきた方法¹⁰⁾に従つて

$$\ln \frac{d}{d_0} = -\frac{1}{2} \epsilon_y + \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{\sigma}{E} \quad (1)$$

d_0 : 変形前直径, d : 変形後直径, σ : 荷重方向真応力

E : ヤング係数, ν : ポアソン比

により直径変化に換算して、DTF 式径方向変位計を用いて直径変化を制御した。ただし (1) 式における σ は材料の引張り試験より求められた応力-歪曲線において ϵ_y に対応する応力であり、 ϵ_y が正であつても平板試験片の除荷時は切欠先端には残留圧縮応力が生じるので丸棒試験片は圧縮荷重となり、 σ は負の値とする。

3 実験結果と考察

3.1 切欠付平板試験片の静的引張り試験

Type A, B の 2 種類の切欠付平板試験片について静的引張り試験を行い歪の変化を計測した。 $K_t=5$ の切欠を有する平板試験片では亀裂発生時と最高荷重時はほとんど一致しその時の実断面応力は $\sigma_n=45.0 \text{ kg/mm}^2$ であるのに対し、 $K_t=10$ の切欠については亀裂発生時は $\sigma_n=41.8 \text{ kg/mm}^2$ で最高荷重時は $\sigma_n=44.0 \text{ kg/mm}^2$ であつた。

最小断面上における荷重方向歪 ϵ_y の分布の変化の様子を図 3 に示す。この歪は Appendix (a) の方法で計算されたものである。この図において、各分布曲線の左端が板幅中心より 15 mm の切欠先端位置に一致しているものは亀裂発生前に各実断面応力において計測されたものであり、それ以外のものは歪を計測する面の亀裂長さが付記してある値になつた時に亀裂の進展が停止する所まで荷重を下げて計測された亀裂先端を含む最小断面上の歪分布であり、その分布曲線の左端の点は亀裂先端に一致している。これより 2 種の切欠形状において亀裂の発生前に歪勾配が急なのは切欠先端より 10 mm 以内の範囲であり、その範囲は $K_t=10$ の方がわずかに狭い。2 種の切欠先端近くの値は同じ位の σ_n に対しては $K_t=10$ の方が小さくなっているが、これは板厚が比較的大きいために K_t の大きな切欠については板厚方向の拘束が大ききことによると考えられる。このために亀裂発生時の σ_n は $K_t=10$ の切欠の方が小さく、板厚減少から推定される亀裂発生時の歪も図 6 に見られるように小さくなっている。亀

Fig. 2 Details of the hour-glass type specimen

Fig. 3 Behaviours of the longitudinal strain ϵ_y on the minimum cross section of the plate specimen with a notch under static tensile test

Fig. 4 Behaviours of the displacement in 10 mm G.L. near the notch of plate specimen under static tensile test

の切欠付平板試験片の板厚減少率は切欠先端で 35.3% であり、半幅の中ほどでは 16.2% である。

図4は挿入図に示すように最小断面にそつて G.L.=10 mm となる平行線を野書き、モアレ縞より 2 本の野書き線間の変位を求め切欠先端近傍における変位の分布を描いたものである。この図において板幅中心よりの距離が 15 mm 以下の部分は開口変位 (COD) に対応するものである。 $K_t=10$ の切欠については変位の勾配が急なのは切欠先端の両側数 mm の範囲に限られる。

図5は $K_t=5$ の切欠付平板の静的引張り試験で計測された歪から歪増分理論に基づいて計算された最小断面上の引張り方向応力 σ_y の分布を描いたものである。本研究で用いたモアレスクリーンの線密度はかなり粗であるから、降伏歪のオーダーの歪は計測できないので、平板全面にかなりの塑性歪が生じてからの応力分布を示す。ここで用いた応力計算法の概略を Appendix (b) に述べる。2 種の切欠付平板について、切欠先端における荷重方向歪 ϵ_y と実断面応力 σ_n の関係を図6に示す。この図には破断後の切欠先端の板厚減少より、弾性変形を無視して

Fig. 5 Behaviour of the longitudinal stress σ_y on the minimum cross section of the plate specimen with a notch of $K_t=10$ under static tensile test

発生後の亀裂先端の歪は図に見られるように亀裂発生直前の切欠先端における歪よりも小さくなっている。これも同様に切欠先端よりも亀裂先端の方が板厚拘束が大きいことによると考えられ、このことは破断後の破面は切欠から遠ざかるにつれて板厚減少が小さくなっている事により裏付けられる。たとえば $K_t=5$

Fig. 6 Behaviours of the longitudinal strain ϵ_y at a tip of notch under static tensile test and fatigue test of the plate specimens

$$\epsilon_0 = 2 \ln(t_0/t)$$

(2)

(t_0 : 原板厚, t : 破断後板厚)

によって求められる歪を亀裂発生時の σ_n に対してプロットしてあり，これによりモアレ法による歪の信頼度を知ることができる。

3.2 切欠付平板試験片における疲労亀裂の発生

2種の切欠付平板試験片について完全片振り引張り試験を行い，切欠底および最小断面上での歪挙動と開口変位挙動を調べた。最小断面での公称応力範囲 S_n は $K_t=5$ の切欠については 34.9, 40.2 kg/mm², $K_t=10$ の切欠については 26.9, 31.9, 35.9, 39.5 kg/mm² である。切欠形状によって亀裂の発生の様相はかなり異なり， $K_t=10$ の切欠ではかなり早い時期に切欠先端の板厚中心部に1つの亀裂が発生し，それが徐々に板厚方向に成長していく。この間板表面には亀裂は存在しない。本研究ではモアレ法により計測された板表面の歪を対象にしているので，板厚中心部の亀裂が板表面に到達した時の荷重繰り返し数を亀裂発生寿命 N_c とする。 $K_t=5$ の切欠ではやはりかなり早い時期に切欠先端近傍の板厚内に5~10個位の小さな(1mm位)亀裂が発生し，そのうちのいくつかは徐々に成長し連続するが残りの多くは成長しない。この間にこれらの亀裂とは独立に切欠先端近くの板表面の淵に0.5mm程度の亀裂が発生するので，この時を亀裂発生寿命 N_c とする。この板表面の亀裂はしばらくして板厚内の亀裂と連続して板幅方向に伝播していく。

各試験片について切欠先端の歪の挙動を図7と図8に示す。この図において $N/N_c > 1$ なる位置に記されている計測値は亀裂発生直後の亀裂先端の歪である。図6には静的引張り試験結果とともに，疲労試験においてモアレ法により計測された1サイクル目の最高荷重時の歪，亀裂発生時の歪および破断後に板厚減少より(2)式によって計算される歪を実断面応力範囲 S_n に対して示す。これらの図に見られる歪の計測値にはかなり計測方法によると思われるバラツキが見られるが，切欠先端の歪挙動の傾向は把握される。すなわち亀裂発生近くなつて歪の増加率が増すのは $K_t=10$ の切欠における $S_n=39.5$ kg/mm² の場合のみで，他はすべて初期を除いて亀裂発生まで繰り返し数と共に直線的に増加していく。1サイクル目の最高荷重時から亀裂発生までの歪の増加量は

Fig. 7 Cyclic behaviours of the longitudinal strain ϵ_y at a tip of the notch of $K_t=5$ in the plate specimens

Fig. 8 Cyclic behaviours of the longitudinal strain ϵ_y at a tip of the notch of $K_t=10$ in the plate specimens

S_n が大きくなるにつれて増している。特に $K_t=5$ の切欠について $S_n=40.2 \text{ kg/mm}^2$ の場合の歪の増加量は非常に大きい。また荷重の繰り返しによる切欠先端の歪範囲は K_t および S_n によつて大きな差はなくいずれも 0.7~1.5% 程度であり、 S_n が大きくなるにつれてわずかに大きくなっているようである。また繰り返し数とともに歪範囲はわずかに増していくが、ほとんど一定とみなし得る程度の増加量である。

以上のことにより、切欠付平板試験片の亀裂発生寿命は 1 サイクル目の最大歪とその後の歪の増加率および切欠形状による板厚方向の拘束の影響に依存すると言える。従来、丸棒試験片による歪制御試験では平均歪の影響と歪の増加率の影響は個別に研究されてきた。J. T. P. Yao ら¹¹⁾は平均歪と歪振幅が変化する場合の疲労寿命を

$$\sum_{i=1}^N [(\epsilon_{PR}/C)^P]_i = 1$$

$$P = 1 + 0.86 \left(1 - \frac{\Delta \epsilon_m}{\epsilon_{PR}} \right)$$

(ϵ_{PR} : 塑性歪範囲, $\Delta \epsilon_m$: 1 サイクル当りの歪の増加量)

の形で与えている。塑性歪に較べて弾性歪が小さい時は ϵ_{PR} を全歪範囲 ϵ_{TR} におきかえても良い。さらに本研究で扱っている切欠付平板のように 1 サイクル目に非常に大きな歪を生じ、その後は小さな歪振幅の挙動を示す場合は、1 サイクル目の静的引張りによる損傷の項と 2 サイクル目以後の疲労損傷の項に分けるのが合理的である。さらに疲労損傷の項には、平均歪を有する歪制御疲労試験では平均歪の値だけ破断延性が減少したとすれば良いとする G. Sachs ら¹²⁾の考えを入れると

$$\left. \begin{aligned} \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} + \sum_{i=2}^{N_C} \left[\left(\frac{\epsilon_{TR}}{\epsilon_0 - \epsilon_1} \right)^P \right]_i &= 1 \\ P &= 1 + 0.86 \left(1 - \frac{\Delta \epsilon_m}{\epsilon_{TR}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

この式中の ϵ_1 は 1 サイクル目の最大歪とし、 ϵ_0 は静的引張り試験の破断後に板厚減少より (2) 式により求められる歪とする。ここで図 7, 8 に示される歪挙動を 2 サイクル目の上下限歪と $N=N_C$ における上下限歪を直線で結ぶ歪挙動で近似すれば P 一定となり (3) 式の左辺の損傷率は

$$D = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} + (N_C - 1) \left(\frac{\epsilon_{TR}}{\epsilon_0 - \epsilon_1} \right)^P \quad (4)$$

で表わされる。 ϵ_{TR} としては $N=N_C/2$ のときの値を用いる。このようにして求められた D の値を表 2 に示す。 $K_t=10$ の場合には比較的良く合うが、 $K_t=5$ の場合には 2 例ともに D は 1 よりかなり小さくなっている。これは静的引張り試験による破断後に計測される ϵ_0 は亀裂が切欠底において板厚方向に連続した後の歪であり、 $K_t=10$ の切欠の場合には $N=N_C$ のときは亀裂は切欠底において板厚方向に連続していて、 ϵ_0 の計測時と亀裂の状況は一致するが、 $K_t=5$ の場合には $N=N_C$ のときはまだ亀裂は板厚方向に連続していなくて、 ϵ_0 の計測時と亀裂の状況が一致するにはさらに荷重の繰り返しを要するためであると思われる。

図 9 は挿入図に示すように、切欠先端より板幅中心側へ 5 mm の位置における標点間距離 10 mm の変位挙動を示したものである。この図に見られる変位挙動の傾向はそれに対応する切欠底の歪の挙動に一致する。

3.3 切欠付平板試験片と小型丸棒試験片における亀裂発生寿命の相関

小型丸棒試験片の疲労試験は平板試験片の切欠先端の歪挙動を模擬する歪制御試験である。図 7, 8 に見られるようにモアレ法で計測された歪はかなりバラツキがあるので、これを考慮して歪挙動を実線と破線で示すよう fairing にして切欠先端の上下限歪とし、(1) 式によつて直径の変化に換算して丸棒試験片の制御量とした。

Table 2 Damage rates of plate specimens

K_t	ϵ_0 (%)	S_n (kg/mm ²)	N_C	ϵ_{TR} (%)	$\Delta \epsilon_m$ (%/cycle)	Damage Rate D
5	87.02	34.9	700	1.24	0.0153	0.672
		40.2	105	1.5	0.4333	0.774
10	42.35	26.9	1,400	0.73	0.00123	0.819
		31.9	470	0.91	0.0102	1.186
		35.9	200	0.94	0.0521	0.913
		39.5	43	1.22	0.2467	1.041

Fig. 9 Cyclic behaviours of the notch opening displacement in 10 mm G.L. in the plate specimens

丸棒試験片では肉眼観察による可視亀裂 (0.2~0.5 mm) が発生したときの荷重繰り返し数を亀裂発生寿命 N_c^* とした。

平板試験片の亀裂発生寿命 N_c とその歪挙動を模擬した丸棒試験片の N_c^* の相関を図 10 に示す。これによると、 $K_t=5$ の切欠付平板試験片の場合にはそれを模擬した丸棒試験片の N_c^* が短寿命側に、 $K_t=10$ では長寿命側になる傾向があるが、平板試験片と丸棒試験片の亀裂発生寿命にはきわめて良い相関があると言える。ただしこの際平板試験片と丸棒試験片、平板試験片でも K_t の差によって亀裂発生状況が異なり、したがって繰り返し数が N_c または N_c^* になったかどうかを決める判定基準が試験片形状によって異なることが考慮されるべきである。

平板試験片を模擬した各丸棒試験片の真応力と公称応力の変化の様子を図 11 に示す。図中に付記する K_t と S_n は模擬された平板試験片の値である。J. H. Crews¹⁾ はアルミ合金の実験によつて 10~20 サイクル以後は応力は安定するという結果を得ているが、本研究の軟鋼では各試験片ともに応力は最初の数サイクルは不安定な働きを示すが、その後は定常的に増加または減少していき、安定しないうちに亀裂の発生に達している。

従来、低サイクル疲労の分野で丸棒試験片を用いて多く行われている完全両振りまたは平均歪一定の歪制御疲労試験での亀裂発生寿命と平均歪が漸増する場合の亀裂発生寿命との対応を考察しておくのは有益である。この目的

Fig. 10 Correlation between crack initiation life of the plate specimen and that of the bar specimen simulating the cyclic behaviour of strain at a tip of notch in the plate specimen

Fig. 11 Cyclic behaviours of nominal and true stresses of the bar specimen simulating the cyclic behaviour of strain at a tip of notch in the plate specimen

Fig. 12 Fatigue tests of the bar specimens under conditions of linearly increasing mean strain and constant mean strain

り、いずれも平均歪漸増の場合より長寿命である。このことより平均歪の漸増が寿命に及ぼす影響は大きいと考えられる。平均歪漸増の試験と歪比一定の試験との相関についての今後の研究が待たれる。

3.4 平板試験片における疲労亀裂の伝播

切欠付平板試験片において亀裂発生以後は実断面応力範囲一定、階段状増加・減少の制御条件のもとに亀裂伝播速度と歪挙動を調べた。実断面応力範囲一定の完全片振り引張り試験において図13に示される3つの亀裂伝播型式が観察された。Type I は亀裂発生と同時に急激に伝播しその後速度を落し始める初期段階 (Stage I) と、それに続く定常的に伝播していく領域 (Stage II)、さらに亀裂が長くなつてきて、板側や偏心の影響が大きく現われる領域 (Stage III) とから成る。Type III の Stage I では Type I とは逆に亀裂発生直後の伝播速度は非常に小さく、その後徐々に速度を上げながら Stage II に入る。Type II は Type I と III の中間的な型であり、Stage I が存在せず亀裂発生直後に Stage II に入るものである。いずれの型でも Stage II では徐々に速度を落しながら定常的に伝播していくが、中には Stage II 内のかかなりの領域にわたって速度が一定のものもあつた。実断面応力範囲 S_n が同一の場合には切欠係数 K_t が大きいときは Type I、小さくなるにつれて Type II または Type III になる。このことはステンレス鋼についての大内田らの実験⁹⁾においても観察されている。また K_t が同一の場合には、 S_n が大きいときは Type I、小さくなるにつれて Type II または Type III になる。Stage I の継続期間は切欠先端より 3 mm 以内の領域であり、図3の静的引張りの歪分布に見られるようにこの領域の塑性変形は非常に大きい。このことより亀裂発生以前に切欠先端より 3 mm 位の領域が受ける損傷が非常に大きい場合には Type I になり、損傷よりも歪硬化の影響が支配的な場合には Type III になると思われる。

実断面応力範囲 S_n を終始一定に維持した場合と、階段状に増加させた場合の $K_t=10$ の切欠から発生した亀裂の伝播の様子を図14に示す。この図で $S_n=35.9, 31.9 \text{ kg/mm}^2$ の伝播の様子は Type I に近く、 $S_n=26.9 \text{ kg/mm}^2$ は Type II になつている。 $S_n=26.9 \text{ kg/mm}^2$ から 31.4 kg/mm^2 、さらに 35.9 kg/mm^2 増加させると、増加後の伝播の様子は Type I になり、すなわち増加直後 2 mm 位は急速に進むがそれ以後は定常的になる。 S_n を増加した後定常的になつた時の伝播速さは、 S_n を $31.9, 35.9 \text{ kg/mm}^2$ の一定値としたときの同一亀裂長さにおける伝播速さとほとんど同じ位かやや大きい。

図15に S_n を終始 34.9 kg/mm^2 に維持した場合と、 40.2 kg/mm^2 から 35.3 kg/mm^2 、さらに 30.4 kg/mm^2 に階段状に減少させた場合の $K_t=5$ の切欠から発生した亀裂の伝播の様子を示す。 S_n を 34.9 kg/mm^2 なる一定値としたときは Type III になつている。 S_n を減少させると、減少直後のしばらくは減少直前の伝播速さを

Fig. 13 Three types of crack propagation curves of the plate specimens under pulsating tension of constant net section stress range

のもとに丸棒試験片によつて図12に示される疲労試験を行つた。すなわち 15.75% の予歪を与えた後、全歪範囲を $\epsilon_{TR}=1.5\%$ の一定値に保ち平均歪が 1 サイクル当り $\Delta\epsilon_m=0.05\%$ 増加する試験を行つたところ亀裂発生寿命は $N_c^*=350$ であり、このときの平均歪は 33.25% であつた。次に全歪範囲を上記試験片と同一にし、平均歪 ϵ_m を 15.75% と 33.25% の一定値とした歪比一定の疲労試験を行つたところ $\epsilon_m=15.75\%$ では $N_c^*=1300$ 、 $\epsilon_m=33.25\%$ では $N_c^*=960$ であ

Fig. 14 Crack propagations in the plate specimens with a notch of $K_t=10$ under the conditions of constant and stepwise increased net section stress ranges

Fig. 15 Crack propagations in the plate specimens with a notch of $K_t=5$ under the conditions of constant and stepwise decreased net section stress ranges

維持し、その後急速に速さは減少していき定常的になる。 S_n を 35.3 kg/mm^2 に減少させて定常的になったときの速さは、 34.9 kg/mm^2 の一定値に維持した試験片の同一亀裂長さにおける速さより著しく小さい。これは S_n を減少させたときの亀裂先端近くは、 S_n が大きいときに非常に大きな損傷を受けており、亀裂より遠い所は損傷よりも歪硬化の影響を多く受けているためであろう。このことより S_n を減少させたときの伝播速さは S_n を一定にしたとき、あるいは増加させたときとは同一に扱えない。

図 16, 17, 18 はそれぞれ S_n を一定、階段状増加、階段状減少としたときの引張り方向歪 ϵ_y の挙動と亀裂伝播速さの変化の様子を示したものである。これらの図における歪分布曲線はそれに付記してあるサイクルにおける最高荷重時と除荷したときの亀裂先端を含む最小断面上の歪分布であり、各分布曲線の左端の丸印と三角印は切欠先端または亀裂先端位置に一致する。なお図 18 は最高荷重時の歪分布である。亀裂先端の歪の求め方については Appendix (a) に述べるが、この解析方法の性質上これらの曲線は巨視的な歪分布と言える。図 16 に見られるように S_n を一定とした場合、亀裂の伝播とともに亀裂先端の歪は小さくなり、これにともなつて伝播

Fig. 16 Behaviours of the longitudinal strain ϵ_y on the minimum cross section with a crack and crack propagation rate in the plate specimen with a notch of $K_t=10$ under the condition of constant net section stress range of 39.5 kg/mm^2

Table 3 Marks used in Figs. 19, 20, 21

Notch Type	Mark	S_n (kg/mm^2)	Remark
Type A $K_t=5$	▽	34.9	
	◇	40.2	before step down
	◆	35.3	after the 1st step down
	◆	30.4	after the 2nd step down
Type B $K_t=10$	△	41.3	
	▲	39.5	
	□	35.9	
	■	31.9	
	○	26.9	before step up
	●	31.4	after the 1st step up
$K_t=9$	×	37.8	Miya's data*
	+	25.8	(ref. 13)

* SS 41 steel, thickness=5 mm, width=300 mm, central notch length=30 mm

Fig. 17 Behaviours of the longitudinal strain ϵ_y on the minimum cross section with a crack and crack propagation rate in the plate specimen with a notch of $K_t=10$ under the condition of stepwise increased net section stress range

Fig. 18 Behaviours of the longitudinal strain ϵ_y on the minimum cross section with a crack and crack propagation rate in the plate specimen with a notch of $K_t=5$ under the condition of stepwise decreased net section stress range

速さも小さくなっている。しかし亀裂先端の歪振幅はほぼ一定に保たれている。亀裂から遠方の位置の歪は繰り返し数とともに徐々に増加していく。 S_n を階段状に増加させたときは図 17 に見られるように、増加させる毎に S_n 一定のときと同様の歪挙動を示す。しかし S_n を階段状に減少させた時は図 18 に見られるようにこれらとは著しく異った挙動を示す。すなわち $N=210$ において S_n を減少させた後は亀裂の伝播とともに亀裂先端の歪は $N=211$ のときの分布曲線にそつて急速に小さくなつていき、亀裂から遠方の点における歪はほとんど増加しない。この間伝播速さは急速に小さくなつていく。 $N=1830$ での 2 回目の S_n の減少後は、このときのなだらかな歪分布曲線にそつて亀裂先端の歪は徐々に減少していき、亀裂伝播速さはほぼ一定に保たれる。以上のように亀裂先端の最高荷重時の歪 ϵ_y と、亀裂伝播速さには相関があり、これを示したのが図 19 である。なお図 19, 20, 21 に用いられる記号は一括して表 3 にかかげる。これによると S_n を減少させた後のデータは他のものから著しく外れる。それ以外のものについてもかなりのバラツキが見られるが、およそ

$$dl/dN \propto (\epsilon_y)^n \quad (5)$$

(l : 切欠を含まない片側亀裂長さ)

の関係にあると言える。この n の値は約 1.3 である。

Stage II における亀裂伝播速さを K 値によつて整理することを試みた。永井の review⁴⁾ に引用されている有限幅修正を考慮した K 値の計算式を用いて求めた stress intensity factor range ΔK と亀裂伝播速さの関係は図 20 のようになる。なおこの図には S_n の減少後のデータは除かれ、宮が行つた SS 41 の実断面応力範囲一定の片振り引張り試験の結果¹³⁾ も 1 部分含まれる。これによると個々のデータは直線に乗らないが、全体として直線的に分布して

$$dl/dN \propto (\Delta K)^n \quad (6)$$

と表わし得る。この n の値は約 8 である。横堀らは SS 41 の荷重制御片振り引張り試験で ΔK が約 50~70 kg $\sqrt{\text{mm}/\text{mm}^2}$ の範囲で $n=2.9$ を得ており⁹⁾、永井は SM 41 の荷重制御片振り引張り試験で ΔK が約 30~100 kg $\sqrt{\text{mm}/\text{mm}^2}$ の範囲で $n=6$ を得ている⁴⁾。本研究で得られた n の値はこれよりかなり大きい。

有限幅の影響が小さいときは $\Delta K = S_g \sqrt{\pi a}$ (a : 切欠半長を含む片側亀裂長さ, S_g : 全断面応力範囲) であるから (6) 式は

$$dl/dN \propto S_g^n a^{n/2} \quad (7)$$

となる。実際には有限幅の影響などがあるから

$$dl/dN \propto S_g^{n_1} a^{n_2} \quad (8)$$

と表わす。 a を一定としたときの $\log dl/dN - \log S_g$ は図 21 に示されるように直線になり、 a によつて n_1 の値は異なるがほぼ 7~9 である。同様に $\log dl/dN - \log a$ 線図より n_2 を求めると約 3~5 である。なお本節で

Fig. 19 Crack propagation rate vs. maximum strain at the tip of crack

Fig. 20 Crack propagation rate vs. stress intensity factor range

Fig. 21 Crack propagation rate vs. gross section stress range

扱った亀裂長さ l または a としてはモアレ法によつて歪を計測した平板の片側表裏の亀裂長さの平均値をとつた。ただし宮のデータは両側表裏の平均値を用いた。

5 結 び

SM 41 を供試材とする切欠付平板試験片の静的引張り試験による歪挙動および低サイクル疲労試験による歪挙動と亀裂発生寿命、亀裂伝播速さの関係を調べ、さらに切欠先端の歪挙動を模擬した丸棒試験片による歪制御疲労試験を行い次の結論を得た。

(i) 静的引張り試験において亀裂発生前に非常に大きな歪を生じるのは切欠先端から数 mm 以内であり、伝播中の亀裂先端の歪は亀裂発生直前の切欠先端の歪より小さい。

(ii) 疲労試験による切欠先端の歪は、初期を除いて歪振幅をほぼ一定に保ちながら平均歪は直線的に増加していき、 $K_t=10$ の切欠についての 1 例を除いて他は亀裂発生近くになつても歪は急速には増加しない。

(iii) 切欠の開口変位の繰り返し挙動の傾向は切欠先端の歪挙動の傾向に一致する。

(iv) 切欠付平板の亀裂発生寿命は、静的引張りによる損傷と繰り返し荷重による損傷の項に分けた (3) 式の累積被害則で比較的良く表わし得る。

(v) 切欠付平板試験片の亀裂発生寿命とそれを模擬した小型丸棒試験片の亀裂発生寿命の間にはきわめて良い相関があるが、 $K_t=5$ の切欠の場合には丸棒試験片が短寿命側に、 $K_t=10$ では長寿命側になる傾向がある。

(vi) 歪振幅一定の疲労試験において亀裂発生寿命におよぼす平均歪漸増の影響は大きい。

(vii) 平板の実断面応力範囲一定の試験において図 13 に示される 3 種の亀裂伝播型式が観察され、 K_t あるいは実断面応力範囲 S_n が大きいと Type I で、小さいと Type III になる。

(viii) S_n を階段状に減少させた場合の亀裂伝播速さの減少は著しい。

(ix) S_n を減少させた場合を除いて、亀裂先端の歪と亀裂伝播速さの間におよそ $dl/dN \propto (\epsilon_y)^n$ なる関係があり、この n の値は約 1.3 である。

(x) 亀裂伝播速さを $(\Delta K)^n$ 法則にあてはめると n の値は約 8 となり、これは他の研究者によつて得られている値よりかなり大きい。

謝 辞

本研究に対して造船研究協会第 109 研究部会の寺沢一雄部会長をはじめ各委員の方々から種々有益なご意見をいただいた。モアレ格子の食刻・写真撮影技術は広島大学工学部永井欣一教授、岩田光正講師、西村誠二氏にご指導いただいた。新日本製鉄 (株) 中央研究所の宮 健三博士は参考データを提供して下さい。実験および解析にあたり、日立製作所 (株) 日立研究所の福田嘉男博士の労を多とする。以上の方々から心から謝意を表します。

Appendix

(a) linear mismatching 法による歪解析

W. Bossaert ら⁸⁾の matching 法による歪解析は、次のように簡単に linear mismatching 法に拡張される。モアレ法の linear mismatching によつて得られる縞模様は仮想引張あるいは仮想圧縮による変位を含んだ変位場を現わしている。このモアレ縞に引張り圧縮を考慮して順次番号をつけ、これを縞次数とする。歪を求めようとする点 P の近傍のある領域内における x, y 両方向の縞次数分布 U, V が

$$\left. \begin{aligned} U(x, y) &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7x^2y + a_8xy^2 + a_9y^3 \\ V(x, y) &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + b_6x^3 + b_7x^2y + b_8xy^2 + b_9y^3 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

の形に近似されるものとする。この式における係数は最小自乗法により定める。点 P の近傍に図 22 (a) に示す

ように 5×5 の正方形格子を描き格子番号を $1, 2, \dots, 25$ とし、その座標を (x_i, y_i) ($i=1 \sim 25$) とする。またモアレ縞より読み取られた各格子点における縞次数を U_i^* , V_i^* とすれば最小自乗法により

$$\sum_{i=1}^{25} (U(x_i, y_i) - U_i^*)^2 = \min. \quad (10)$$

(9) 式の U を

$$U(x, y) = \sum_{j=0}^9 a_j f_j(x, y) \quad (11)$$

と表わして (10) 式を a_m ($m=0 \sim 9$) で微分すれば

$$\sum_{i=1}^{25} [f_m(x_i, y_i) \{ \sum_{j=0}^9 a_j f_j(x_i, y_i) - U_i^* \}] = 0 \quad (12)$$

となり、これは未定係数 $a_0, a_1, \dots, a_9$ についての 10 元線型連立方程式であるから、これを解いて $a_0, a_1, \dots, a_9$ は定まる。 $b_0, b_1, \dots, b_9$ についても同様に定まる。linear mismatching 法において負荷前に観察される x, y 方向の縞間隔をそれぞれ h_x, h_y (仮想引張りのときは正、仮想圧縮のときは負) とし、変形後の変位を u, v , モアレスクリーンの線間隔を d とすれば、任意点 $P(x, y)$ における変位の微分形は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= d \left(\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \frac{1}{h_x} \right), & \frac{\partial u}{\partial y} &= d \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= d \frac{\partial V(x, y)}{\partial x}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= d \left(\frac{\partial V(x, y)}{\partial y} - \frac{1}{h_y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

と表わされるから歪は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

として得られる。

本研究で用いたモアレスクリーンの線間隔は $d=1/150$ in. ($=0.169267$ mm) であり、モアレ縞読み取り用の格子間隔は 2.5 mm である。図 22 における実線の格子線は試験片表面に野書かれた格子であり、破線は変形を考慮して実線の中間線としてモアレ写真上に描いた。通常の点における歪を求めるときは図 22 (a) に示されるように、その点が格子点 13 にもつとも近い位置になる格子を用いた。切欠先端またはそのごく近傍点の歪を求めるときは図 22 (b) に示されるように格子点 11 が切欠先端に一致する格子を用いた。亀裂先端あるいはそのごく近傍の歪を求めるときは、図 22 (c) のように先端位置が格子点 13 にもつとも近くなる格子を用いて計算を行つた。先端位置が格子点 12 に近くなる格子を用いると亀裂先端の歪は前者の場合よりわずかに低めになる。しかし亀裂先端の歪を精密に計測するには本研究で用いたモアレスクリーンの線密度では粗すぎ、歪分布のおよその傾向を求めるに留まっているので、この程度の差を論ずるのは意味がない。

(b) 歪計測値を用いた応力計算法

著者らは前報¹⁴⁾において弾塑性問題の歪増分理論に基づく理論的解析法の例を示したが、この方法は実験において計測された歪成分から応力成分を計算するのに適用され得る。ここでは平面応力状態での応力計算法につい

Fig. 22 Square grid for strain analysis by moiré method

て述べる。荷重の増加によるある点Pにおける全歪成分 ϵ_x , ϵ_y , γ_{xy} の挙動が実験によつて計測されているものとする。変形過程をいくつかのステップに分け、各ステップ毎に応力と塑性歪増分を決定していく。前報¹⁴⁾の(1), (5), (6), (7) 式より、 n 番目のステップにおける応力歪関係式は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \epsilon_x + \nu \epsilon_y - \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta \epsilon_{xi}^P + \nu \Delta \epsilon_{yi}^P) - (\Delta \epsilon_{xn}^P + \nu \Delta \epsilon_{yn}^P) \right\} \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \epsilon_y + \nu \epsilon_x - \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta \epsilon_{yi}^P + \nu \Delta \epsilon_{xi}^P) - (\Delta \epsilon_{yn}^P + \nu \Delta \epsilon_{xn}^P) \right\} \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{1+\nu} \left\{ \gamma_{xy} - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \gamma_{xyi}^P - \Delta \gamma_{xyn}^P \right\} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\frac{\Delta \epsilon_{xn}^P + \Delta \epsilon_{yn}^P}{\sigma_x + \sigma_y} = \frac{\Delta \epsilon_{xn}^P - \Delta \epsilon_{yn}^P}{3(\sigma_x - \sigma_y)} = \frac{\Delta \gamma_{xyn}^P}{3\tau_{xy}} = \frac{\Delta \epsilon_{en}^P}{2\sigma_e} \quad (16)$$

$$\sigma_e = \{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2\}^{1/2} \quad (17)$$

$$\Delta \epsilon_{en}^P = \frac{2}{\sqrt{3}} \{(\Delta \epsilon_{xn}^P)^2 + \Delta \epsilon_{xn}^P \cdot \Delta \epsilon_{yn}^P + (\Delta \epsilon_{yn}^P)^2 + (\Delta \gamma_{xyn}^P)^2\}^{1/2} \quad (18)$$

$$\sigma_e = F\left(\sum_{i=1}^n \Delta \epsilon_{ei}^P\right) \quad (19)$$

である。(19) 式は材料の引張り試験より得られる真応力-塑性歪曲線を表わす。 $\Delta \epsilon_{xn}^P = \Delta \epsilon_{yn}^P = \Delta \gamma_{xyn}^P = 0$ として(15), (17) 式より得られる σ_e と $F\left(\sum_{i=1}^{n-1} \Delta \epsilon_{ei}^P\right)$ の大小関係によつて n 番目のステップにおいて新たな塑性歪増分が生じているか否かが判定される。新たな塑性歪増分が生じていないときは(15) 式より応力が求められ、生じているときには以下の方法によつて $\Delta \epsilon_{xn}^P$, $\Delta \epsilon_{yn}^P$, $\Delta \gamma_{xyn}^P$ を定める。

$$z_1 = \Delta \epsilon_{xn}^P + \Delta \epsilon_{yn}^P, \quad z_2 = \Delta \epsilon_{xn}^P - \Delta \epsilon_{yn}^P, \quad z_3 = \Delta \gamma_{xyn}^P \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \epsilon_x + \epsilon_y - \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta \epsilon_{xi}^P + \Delta \epsilon_{yi}^P) \\ a_2 &= \epsilon_x - \epsilon_y - \sum_{i=1}^{n-1} (\Delta \epsilon_{xi}^P - \Delta \epsilon_{yi}^P) \\ a_3 &= \gamma_{xy} - \sum_{i=1}^{n-1} \Delta \gamma_{xyi}^P \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$c_1 = E/(1-\nu), \quad c_2 = E/(1+\nu) \quad (22)$$

なる置き換えを行なうと(16), (18) 式は

$$\frac{z_1}{c_1(a_1 - z_1)} = \frac{z_2}{3c_2(a_2 - z_2)} = \frac{z_3}{3c_2(a_3 - z_3)} = \frac{\Delta \epsilon_{en}^P}{2\sigma_e} \quad (23)$$

$$\Delta \epsilon_{en}^P = \left\{ z_1^2 + \frac{1}{3} z_2^2 + \frac{4}{3} z_3^2 \right\}^{1/2} \quad (24)$$

となる。

(i) $a_1 \neq 0$ のとき、 $z_1 \neq 0$ だから(23) 式より

$$\left. \begin{aligned} z_2 &= a_2 z_1 P(z_1), \quad z_3 = a_3 z_1 P(z_1) \\ \text{ただし } P(z_1) &= \frac{3c_2}{c_1 a_1 - (c_1 - 3c_2) z_1} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(24) 式より

$$\left. \begin{aligned} \Delta \epsilon_{en}^P &= |z_1| Q(z_1) \\ Q(z_1) &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} (a_2^2 + a_3^2) P(z_1)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(25), (26) 式を(23) 式に代入すると

$$\sigma_e \mp \frac{1}{2} c_1 (a_1 - z_1) Q(z_1) = 0 \quad (27)$$

ただし複号は、 $a_1 > 0$ のとき、 $a_1 < 0$ のとき+をとる。

(ii) $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ のとき(23), (24) 式より

$$z_1 = 0, \quad z_3 = \frac{a_3}{a_2} z_2 \quad (28)$$

$$\Delta \epsilon_{en}^p = \frac{|z_2|}{\sqrt{3}} \left\{ 1 + 4 \left(\frac{a_3}{a_2} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (29)$$

ゆえに (23) 式より

$$\sigma_e \mp \frac{\sqrt{3}}{2} c_2 \left\{ 1 + 4 \left(\frac{a_3}{a_2} \right)^2 \right\}^{1/2} (a_2 - z_2) = 0 \quad (30)$$

ただし複号は、 $a_2 > 0$ のとき－、 $a_2 < 0$ のとき＋をとる。

(iii) $a_1 = a_2 = 0$, $a_3 \neq 0$ のとき、 $z_1 = z_2 = 0$ だから (24) 式より

$$\Delta \epsilon_{en}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} |z_3| \quad (31)$$

となり、(23) 式より

$$\sigma_e \mp \sqrt{3} c_2 (a_3 - z_3) = 0 \quad (32)$$

ただし複号は、 $a_3 > 0$ のとき－、 $a_3 < 0$ のとき＋とする。以上の (27), (30), (32) 式における σ_e は (19) 式により定められるものであり、この 3 つの方程式を逐次近似法を用いて数値的に解けば z_1 , z_2 , z_3 が定まり、(20) 式より塑性歪成分が、さらに (15) 式より応力が求められる。

参 考 文 献

- 1) J. H. Crews and H. F. Hardrath : "A Study of Cyclic Plastic Stresses at a Notch Root", Exp. Mech. (1966 June)
- 2) たとえば H. W. Liu and N. Iino : "A Mechanical Model for Fatigue Crack Propagation", The 2nd International Fracture Conference (Brighton England 1969) ; P. C. Paris : "The Fracture Mechanics Approach to Fatigue", Fatigue-An Interdisciplinary Approach, Syracuse University Press (1964)
- 3) 横堀武夫, 川崎 正 : "大型鋼材の低サイクル疲労き裂伝播", 第 15 回材料強度と破壊国内総合シンポジウム論文集 (昭和 45 年 4 月)
- 4) 永井欣一 : "疲労亀裂伝播特性について", 造船学会誌第 479 号 (昭和 44 年 5 月)
- 5) 大内田 久, 西岡章夫, 宇佐美三郎 : "疲れ亀裂の発生ならびに進展, 第 1 報, 中央切欠き平板の低サイクル領域における挙動", 機械学会講演論文集 No. 203 (昭和 44 年 4 月)
- 6) 西田正孝 : "応力集中", 森北出版 (昭和 42 年)
- 7) 永井欣一, 大塚昭夫, 小川量也 : "低サイクル片振り引張り疲れにおける鋼材の塑性ひずみ挙動", 造船学会論文集第 124 号 (昭和 43 年 12 月)
- 8) W. Bossaert, D. Dechaene and A. Vinckier : "Computation of Finite Strains From Moiré Displacement Patterns", J. of Strain Analysis, Vol. 3, No. 1 (1968)
- 9) R. E. Peterson : "Stress Concentration Design Factors", John Wiley & Sons, Inc. (1962)
- 10) 飯田国広, 井上 肇, 小林佑規 : "歪制御低サイクル疲労における累積被害, 第 1 報", 造船学会論文集第 121 号 (昭和 42 年 6 月)
- 11) J. T. P. Yao and W. H. Munse : "Low-Cycle Axial Fatigue Behaviour of Mild Steel", Symposium of Fatigue of Aircraft Structures, ASTM STP No. 338 (1968)
- 12) G. Sachs, W. W. Gerberich, V. Weiss and J. V. Latorre : "Low-Cycle Fatigue of Pressure-Vessel Materials", Proc. ASTM, Vol. 60 (1960)
- 13) 宮 健三 : "低サイクル疲労破壊の発生と伝播に関する歪論的研究", 学位論文 (昭和 43 年)
- 14) 安藤良夫, 飯田国広, 征矢勇夫 : "切欠きを有する有限平板の弾塑性解析", 造船学会論文集第 124 号 (昭和 43 年 12 月)