(昭和 46 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

構造物の塑性設計 (その 11)

—構造物の最高荷重について—

正員 藤 田 譲* 正員 大 坪 英 臣**

正員 湯 原 哲 夫**

Plastic Design of Steel Structure (11 th Report)

—Maximum strength of framed structure—

by Yuzuru Fujita, *Member* Hideomi Ohtsubo, *Member*

Tetsuo Yuhara, *Member*

Summary

In the previous report¹⁾, the authors studied the finite element method for large deflection and elastic-plastic analysis of plane frame works.

The behavior of the structure was analyzed by the incremental load procedure (Step-by-Step method). The incremental stiffness matrix of the deformed structure was derived from the principle of virtual work for an incremental theory taking into account the spreading of the plastic regions into members. It is possible to make analysis of the structure including both material and geometrical nonlinearity by this method.

In this report, the authors treat numerical analysis containing the unloading process of plasticity (strain reversal), so that they can practice to determine the maximum strength (ultimate load) of elastic-plastic structures, and also to pursue the behavior beyond the ultimate load by using this method.

Hitherto, many researchers have dealt with inelastic buckling strength and plastic behavior of compression members.

For the first numerical analysis the authors deal with the strength of eccentrically loaded column with the rectangular cross-section, and compare the obtained results with that of Chwallas. Next, the experiment of H-section columns with small imperfections is carried out to investigate the elastic-plastic characteristics, maximum strength, and behavior beyond the ultimate load of the column. The theoretical and experimental results are in close agreement. Moreover, beam-columns under high axial load and moment are calculated and discussed comparing with CDC's method and experiments at Lehigh University, relatively to next analysis of framed structures.

Secondly, the instability of elastic-plastic frame works is studied. This method is a general method to make it possible to solve easily the complex and multi-story frames, which, so far, have many difficulties in solving and computing the elastic-plastic behavior of unbraced frames including sidesway. To investigate the sidesway failure, the numerical analysis by this method is carried out for portal frames and three storied frame with large vertical loads with no brace, and compared with Prof. Wakabayashi's experiments⁷⁾ and that of Lehigh University. There are good agreements between authors numerical analysis and these experiments.

The computer program formulated by this method makes it possible to analyze 200 elements at

* 東京大学工学部

** 東京大学大学院工学系研究科

most by the use of HITAC 5020 with short computing time. Therefore this method is quite efficient to the analysis of elastic-plastic planar frames involving instability and of determining the ultimate load of framed structures.

1 緒 言

さきに著者等は、有限変形を考慮した平面骨組構造物の弾塑性挙動を、荷重増分法を用いた有限要素法による数値解析を行った¹⁾。

即ち、各荷重増分間において、既に変形して、それに伴う内部の応力が存在し、弾塑性領域が存在する構造物の微小の外荷重が変動したときの仮想仕事の原理を考え、剛性マトリックス（接線剛性）を求めることにより、構造物の材料非線形性と幾何学的非線形性を同時に、かつ、歪硬化の影響と除荷（unloading, strain reversal）をも考慮しつつ、step by step に構造物の挙動を追跡する方法である。

本報告においては、構造物の最高荷重を求め、更にそれ以後の不安定領域における構造物の挙動を数値解析時に追跡する手法が得られたので、これについて報告する。

従来、塑性変形をうける柱の圧縮強度については、多くの研究者によつて解析されてきたが、矩形断面の柱につき、Chwalla の計算との比較を行い、又、H型断面材に微小な初期不整量を与えて実験を行い、数値解析と比較し、最高荷重とそれ以後の挙動に対しても良好な一致を見た。

更に、多層の骨組構造物に対して数値解析を行った。とくに塑性設計法の高層骨組に対する適用をはばんでいた、不安定崩壊（Instability Failure）と呼ばれる現象につき、検討を行った。大きな鉛直方向荷重 P をうける構造物に微小な水平方向荷重が働き、水平方向に撓み Δ を生ずることにより、 $P \cdot \Delta$ による付加モーメントがさらに水平方向変位を増し、遂には崩壊する不安定崩壊（又は、Sidesway Failure）に対して、一層の門形ラーメンと京都大学で行われた実験⁷⁾ さらには、三層の骨組構造に対する同様の数値解析、リーハイ大学に於ける実験等と比較し良好な一致をみた。

本方法によつて作成された計算機プログラムは最高 200 要素の解析が可能であり（HITAC 5020, 65 K）平面骨組構造物に対して汎用性を有し、計算時間も短いので、構造部材ならびに構造物全体の弾塑性解析、最高荷重を求めるのに極めて有効であると思われる。

特に、本報告では、新たに次の 2 点を含めた数値解析である。

即ち、数値解析に除荷過程 unloading をも考慮し、strain reversal の生ずる現象を取り扱えるようにし、部材の耐える軸力の減少、さらには、構造物の最高荷重以後の挙動を追跡しうらうようになった。とくに複雑な構造物において、すでに圧縮応力が塑性域になつている状態から、不安定現象により、変形のモードが変り、逆に引張の応力増分をうけつつ、変形する構造物の挙動に対して有効である。

第 2 には、変形後、変形に即した応力分布から外力と平衡を保つている反力を求め、より実際の過程に近い、荷重—撓み曲線を得た。

2 塑性変形を伴う柱の圧縮強度

2.1 数値解析例と実験並びに他の解析解との比較

塑性変形を伴う柱の圧縮強度に対して、ここでは、本方法による数値解析結果を初期不整量をもつ種々の柱について行い、従来与えられていた座屈強度、最終強度との比較検討を行い、さらに著者等の行つた H 型断面柱の圧縮強度実験の結果と比較する。

i) 偏心荷重をとける柱の圧縮強度

初期不整として偏心荷重を受ける柱の圧縮強度についての解析を行う。柱の長さ、断面、材料定数が同じ柱で、荷重の偏心量を 2 通りに変えて計算をし、Chwalla が計算した解と比較し、検討する。

偏心量 e は断面の深さ h に対して e

$$e = 0.002 h$$

$$= 0.01 h$$

を与えて、Chwalla が計算した柱と同じものを選ぶ。長さ $L = 21.66$ inch, 断面 1 inch 平方の矩形断面両端支持の柱に対し、この偏心量は、それぞれ 0.01, 0.002 inch である。Fig.1 にその結果を示す。初期不整量によ

つて、最高荷重が大きく変化するのがみられる。

Chwalla の計算は柱の中央部における塑性域の進展をもつて柱全長に亘る挙動をとらえているので塑性域の広がりには、柱の長さ方向に一定である。実際は最大撓みをもつ柱の中央部から先づ、塑性域が生じ、次第に広がって行く過程である故に、Chwalla の解は、実際よりは低目を与えることになる。従つて、比較的大きな初期不整量をもち、塑性域の広がりが、中央部付近でのみ存在し全長に亘らないで、最高荷重に達するものには適用できないように思われる。

また Chwalla は、応力分布を図式積分する際に、応力、歪関係において、降伏応力に達する以前に、比例限をこえたところで切線係数 E_T の効果を算入しているの、降伏応力まではヤング率 E を用いる本方法よりも低目を与える。更に Chwalla は柱全長に亘つて、曲率を d^2W/dX^2 を用いているのに対し、本方法は、長さ方向に有限個に分割された各エレメントごとの局所座標系に対して解析を進めており、これは部材の弾性中立軸及びそれに直交する直線とが構成する曲線座標系の近似となつている。つまり、曲り梁に近い解析が行われている。Chwalla の解は実際よりも、大きい曲率を用いていることになり、従つて、荷重一撓み関係において、高目の撓みを与える。

Fig. 2 には本方法による数値解析における塑性域の進展の有様を $e=0.01h$ の柱について示す。

ii) H型断面柱の偏心荷重実験

H型断面をもつ柱に一定の偏心荷重を与え、長さを3通りに与えた柱の圧縮強度の実験と数値解析を行い、比較、検討を行う。曲げは、弱軸 weak axis 方向の曲げを考える。

2.5 mm の偏心荷重を保たせるため、Fig. 3 に示す特殊な治具を製作し、両端がピンで、所定の偏心荷重を与えられるようにした。核半径 (radius of core) S としたとき、このH型断面の弱軸方向曲げを生ぜしめる偏心量 $e=2.5$ mm は

$$S=0.2e$$

Fig. 3 偏心荷重を与える治具

に相当する。
ここに

$$S = \frac{z}{A} = \frac{r^2}{B/2}$$

z : 断面定数, A : 断面積, B : フランジ幅, r : 断面二次半径

Table 1 実験に用いた部材断面寸法
(単位 cm)

D	B	t_w	t_f	I	r
10.0	10.0	0.6	0.8	13.40	2.47

Fig. 1 偏心荷重をうける柱の塑性圧縮強度

Fig. 2 塑性域の進展

Table 2 実験に用いた柱の長さ

l/r	l (cm)	P_Y (ton)	P_E (ton)
30	74.0	54.9	506.4
60	148.0	54.9	126.6
90	222.0	54.9	56.3

Fig. 4 H型鋼圧縮実験結果

また、実験において、変形が大きくなるに従い、両端の荷重点が、セットしたときの鉛直性からずれるを生じるために、誤差を含みうる。

Fig. 5 に $L/r=60$ の柱の数値解析の結果の塑性域の進展の有様を示す。

2.2 考察

塑性座屈現象が弾性座屈と比べて取り扱いを困難にしている原因は、塑性変形を伴うという材料特性によって、初期不整に対して非常に“sensitive”となり、微小な初期不整の差が、その結果を著しく変えてしまうことによる。初期不整によつて座屈直前の応力分布は座屈を生じ易い状態となる。

弾性座屈現象においては、剛性低下をもたらすのは、大撓みであるという幾何学的非線形性のみであるが、塑性座屈現象においては材料の非線形性が初期不整の影響に対しての加速装置の働きをする。

実際の E_T の比較的小さな柱は、僅かであつても必ず初期不整量が存在し柱は初めから圧縮荷重の増加とともに横たわみを生ずる。軸力 P と、横たわみ W によるモーメントの相乗効果が圧縮荷重の増加とともに著しくなり、柱の中央部 (PW によるモーメントが最大のところ) の圧縮側の縁応力が塑性域となり、急激に剛性が低下しはじめ、以後柱の長さ方向への塑性域の広がりと、断面の塑性域が更に増すことにより、最高荷重に達し、以後荷重の減少を来す。縁応力が塑性域になる時期は、初期不整量が直接影響するので、実際の柱の最高荷重は初期不整量の関数である。

Shanley は初めから横たわみを生ずる柱の最終強度を定性的に考察するため Shanley モデルを考え、このモデルに対し、時々刻々の塑性変形も考慮した平衡方程式を導きこれを追跡して解析を行い、換算係数荷重 P_R 、切線係数荷重 P_T のもつ意味と、位置付けを行い、より実際の柱の過程に近い解析を行つた。

これによつて初期不整の影響の拡大していく過程を解析に取り入れることができた。

Fig. 5 H型鋼の塑性域の広がり

試験片は規格品H型鋼（八幡製鉄製）を用い、試験片断面の主要寸法を表1に示す。柱の長さを表2の如く3通りに変え、実験行つた。

ヤング率、降伏応力は材料試験を行い、その結果を用いた。

以上の実験と本方法による数値解析の結果を Fig. 4 に示す。

与えられた偏心量の精度、及び撓みの非対称性を考慮するとき両者は良好な一致を示す。

即ち、正確に偏心量をつけるべく治具を工夫したが2メートル近い長さの柱に0.25 cmの偏心をつけることに精度上、限界があり、誤差を含みうる。またこの数値解析には、初期たわみ、残留応力の影響を考慮していない。（本方法によつて作成した計算プログラムには初期たわみ、残留応力を含んだ計算は可能である）

これに対して、従来の塑性座屈値、 P_T, P_R はその解法上から、初期不整を考慮することができず、その結果である座屈直後の塑性挙動のモデル化を行い、そのモデルに即した値とした決定されている。

Shanley の解析は、厳密な平衡方程式を考慮することにより初期不整の影響の成長過程は考慮されたが、提案された Shanley モデルが、どの程度、実際の柱の挙動を表わし得るかという問題が生じてくる。

既に述べたように本報告の解析においては、塑性変形と有限変形を考慮して平衡条件を考えていくことに特質があり、これにより初期不整により最高荷重等がどのように左右されるかを知ることが可能となる。

塑性変形をうける柱の圧縮強度に対し、secant formula がある。これは初期不整量をもつ柱の弾性解析を行う。得られた荷重-撓み曲線はオイラー座屈荷重に漸近する。この解に基づき柱の中央の最大圧縮応力が塑性域に達したところをもつて、柱の塑性圧縮強度とする。確かに、これ以後急激に剛性が低下し、まもなく最高荷重に達するが、secant formula で与えられる荷重は柱の最終強度ではない。

実験とこの secant formula との比較において、初期不整量が小さく（例えば偏心量 e が存在するとき $S/e=0.1$; S は核半径）、比較的長い柱（細長比 l/r が 80 以上）に対しては、比較的よく合うが、 $S/e=1.0$ で $l/r=80\sim 40$ では 30~40%、 $l/r=40$ 以下では 50% 近くの誤差を生ずる²⁾。

これは、一断面内の応力即ち中央部の最大圧縮応力のみによつて柱の圧縮強度を定めるからである。

長い柱では、塑性域が一断面に生ずると、短い柱に比して横たわみ W が急激に生じ、断面における塑性域の進展は速におこり、じきに最高荷重に達する。

これに対し、短い柱で最大圧縮応力が塑性域に達しても、横たわみ W は長い柱に比して徐々にしか生じず、長さ方向に塑性域の進展が広がり、やがて最高荷重に達する。

著者等の行つた実験（初期不整量は比較的小さく $S/e=0.2$ ）と数値解析と secant formula との比較を Fig. 6 に示す。

偏心 e が小さいので、細長比 60~80 においてはよく一致するが、短い柱では、secant formula と実験本方法による数値解析とは一致しなくなる傾向を示している。

Fig. 6 Secant Formula との比較

3 Beam-Column の最高モーメント

高層骨組構造物における、柱部材は大きな軸力 ($0.4 P_y \sim 0.8 P_y$; P_y 降伏軸力) をうけ、長さは細長比にして 40~80 程度の、比較的短い柱である。しかも両端部から曲げモーメントを受ける謂ゆる Beam-Column の弾塑性解析を必要とする部材から成る。そのため一定の高い軸力をうける柱の端部における曲げモーメントと回転角

の関係、並びに耐えうる最高モーメントを知ることが重要な問題になつてくる。ここでは、この種の Beam-Column の弾塑性解析、並びに最高荷重を本方法による数値解析によつて求め、リーハイ大学における実験⁴⁾、および Column Deflection Curve's Method (C. D. C. 法)⁵⁾ との比較、検討を行う。

Table 3 Beam-Column の断面寸法

8 WF 31 (単位 inch)					
D	B	t_w	t_f	I	r
8.0	8.0	0.288	0.433	109.7	3.47

例として ASTM 規格材 8 WF 31 (H 型鋼)、強軸曲げ (Strong Axis Bending)、細長比 $L/r=55$ を取り上げ 3 通りの一定軸力を与えたときのモーメント回転角の関係を求める。三通りの一定軸力 P として、

$$P/P_y = 0.326, 0.487, 0.647 \quad (P_y \text{ は降伏荷重})$$

をえらび、解析に用いた材料定数はリーハイ大学の実験によつた。

Fig. 7 に本方法による数値解析、リーハイ大学に於る実験、CDC 法による数値解析を示す。

高層骨組の塑性設計法にとつて、高軸力と曲げモーメントをうける柱の最終強度を知ることとは不可欠であつたにもかかわらず、CDC 法が導入されるまで、明確な解法がなかつた。リーハイ大学の塑性設計研究グループは、

Fig. 7 Beam-Column のモーメント・回転角の関係

この Beam-Column の塑性域にも亘る強度を解析するため Chwalla の考え方を一般化して CDC 法を確立した⁵⁾。即ち、WF 鋼 (H 型鋼) の軸力 P -モーメント M -曲率 ϕ の関係を用い、電子計算機を充分に利用することにより均合いの状態にある曲げと軸力をうける柱がとりうるたわみ形状を、モーメントの平衡方程式に基づき、先の M - P - ϕ の関係を用いて、近似的に数値積分を行うことにより求める。こうして得られた軸力、一定で両端部の傾斜がパラメータとなつた柱のたわみ形状 (CDC) から、定められた長さが CDC の一部であり、かつ端部に働くモーメントが、一定軸力 P と CDC の撓み W により P - W である、柱部材が切り出され、モーメントと回転角が一つ得られ、同様の手順を繰り返す、1 つの Beam-Column (軸力一定) に対する、モーメントと回転角の関係を求めるのであるが、この方法による数値解析は、次の諸点について不十分である。

1) 厳密に CDC はの一部と、それに対応する

Beam-Column の実際の変形は一致しない。横たわみ W による軸力の変化、軸方向の変形を無視している。

- 2) 歪硬化 E_T は考えない。
- 3) 軸力は一定に固定し、モーメントと回転角の関係 M - θ curve をうる計算であり、軸力が同時に変化する場合は、多数の軸力一定の M - θ curve が必要になる。
- 4) 単部材の場合については、初期不整量は考えない。
- 5) Strain reversal は考えない。

以上の諸点が、実験と CDC 法における差を生ぜしめる。これ等の諸点に対して本方法による数値解析は、次のように、一つの解決を与えることになると思われる。

- 1) 有限変形に基き、一つの要素内に於て、弾性域と塑性域に分けて考えているので、変形状による剛性の低下 (即ち変形後の平衡を考える) を、塑性域の広がりも含めて Step-by-Step に追跡する。したがって、strain reversal をも含む、最高荷重以後の不安定領域をも追跡しうる。一定の高軸力の存在により、ある以上変形が進行し、剛性が材料非線形性、幾何学的非線形性により、著しく低下し、それ以上モーメントを加えなくても、或いは、減少しても変形は進む、モーメント・回転角の関係において、耐えうる最高モーメントとそれ以後のモーメントの減少の起る不安定領域の挙動を、strain reversal も考えて、追跡しうる。
- 2) 歪硬化 E_T を含んだ解析である。
- 3) 軸力とモーメントを独立に変えて計算を進めて行くことができるので構造物の計算にとつて有利である。
- 4) 初期不整を含んで解析しうる。
- 5) strain reversal, (unloading) を含む。

4 構造物の最高荷重

— 水平方向に変位する骨組構造物の不安定崩壊 —

4.1 門形ラーメン

構造物の数値解析例として、先づ、一層の骨組構造物を取り扱う。この門形ラーメンの柱部材は鉛直方向に一定の大きな軸荷重をうけ、さらにその上端部に軸荷重に比較して、小さい水平方向荷重をうける。門形ラーメンの柱部材の細長比が、鉛直方向の一定軸荷重によつて、門形ラーメンが弾性座屈し水平荷重を加えなくても水平方向に変形することがない程度に、小さい場合、水平荷重に対して、水平方向の変位は非線形性を有しながら、次第に増加して行くが、塑性域が一部に生じはじめ、急激に水平変位が増加し、ある点で、この門形ラーメンは

Fig. 8 門形ラーメンの最高荷重 (I)

Fig. 9 門形ラーメンの最高荷重 (II)

それ以上の増加する水平方向荷重に対して平衡を保ち得なくなり、最高荷重となる。さらに変形が進むと、減少する水平方向荷重増分に対してのみ平衡な状態を保つ。

数値解析において、このような門形ラーメンの水平方向荷重に対する最高荷重と、それ以後の不安定現象の挙動を追跡する。比較する実験は、京都大学若林教授によつて行なわれた模型実験⁷⁾であり、数値解析解の比較としては Vogel による二次形弾塑性解析 (軸力と横たわみによる付加モーメントの影響を考慮し、塑性ヒンジ以外の領域は弾性計算を行う、塑性ヒンジによる方法) を用いる。

ここでとり上げられる門形ラーメンは柱部材の両下端が固定され、梁材、柱材とも 20 cm の長さをもつ矩形断面材から成る。矩形断面は幅 1.0 cm、深さ 1.39 cm である。柱部材に加わる軸力 P は

$$\begin{aligned} P &= 742 \text{ kg} \doteq 0.2 P_y \\ &= 1490 \text{ kg} \doteq 0.4 P_y \end{aligned}$$

の 2 通りについて行い、結果を Fig. 8, Fig. 9 に、また、Fig. 8 における数値解析の最高荷重時の広がりを見 Fig. 10 に示す。なお計算時間は、要素 30 間荷重増分 16 段階で 2 分弱である。数値解析に用いた降伏応力 σ_y については文献 7) には $\sigma_y = 2.50$ 又は $\sigma_y = 2.73 \text{ ton/cm}^2$ と与えてあるので、Fig. 8 のケースにおいてこの 2 通りにつき計算し、比較してある。

又歪硬化については、部材における歪が最高荷重に達した後においても、歪硬化を考慮するほど大きくないと

Fig. 10 最高荷重における塑性域の広がり

Fig. 11 歪硬化の影響

考え $E_T=0$ として計算を行つたが一ケースにつき参考のため $E_T=E/100$ として計算し、Fig. 11 に示す。

実験と本方法による数値解析の差が、すでに水平荷重が 100 kg 以下から生じているが、この領域では未だ全体に弾性挙動であり、数値解析は有限変形解析を行つているのでこれは、実験における不整から来るものと思われる。

最高荷重以後の挙動は実験と本計算による数値解析は傾向的によい一致を示す。文献 5) の 13 章にこの種のフレームの最高荷重以後の定性的な検討がなされているが、二次形弾塑性解析と実験における Fig. 9 におけるような不一致を歪硬化の影響と考えているが、本方法による数値解析の結果によれば、それはむしろ、unloading の領域が存在することによるものであると思われる。

4.2 多層構造物の Sidesway 崩壊

表 4 に示すような、三層のフレームを考える。このフレームは鉛直方向に総計 180 kips にもなる、大きな荷重を受け、その状態から水平方向に 3 ヶ所から荷重 H を加えていくと、 $H=1.6$ kips 付近で不安定崩壊する現象である。この構造物中の梁部材にも鉛直荷重が加わり、梁中の塑性域の存在もまたフレーム全体の不安定性に寄与する。

リーハイ大学でなされた実験に合せ、数値解析には、すべて ASTM 規格の H 型鋼の寸法を用いた。表 4 にそれを示す。降伏応力は今回の計算に対しては、A7 シリーズの規格に用いられる $\sigma_y=33.0$ ksi を用いた。この種の実験では材料試験による σ_y は規格の σ_y より 10~15% 高目であるが、実験材の σ_y を知る事ができなかったため規格値を用いた。また、このような大型鋼構造物実験では、試験体に対して、荷重点の補強、接合部の補強が施こされるが、数値解析には、そのことを考慮していない。Fig. 12 に実験と本方法による数値解析の結果を示す。

数値解析の結果が、実験より低目を与えるのは上述の理由によるものと思われる。

Table 4 三層フレームの主要寸法

(単位 inch)

	D	B	t_w	t_f
10 WF 25	10.0	5.76	0.252	0.430
5 M 18.9	5.0	5.0	0.313	0.473

Fig. 12 三層フレームの Sidesway

5 結 語

有限変形をする平面骨組構造物の弾塑性挙動を、荷重増分法に基づき、有限要素法を適用して数値解析を行つた。特に構造部材及び構造物の最高荷重とその後の挙動についての数値解析を行い、実験等と良好な一致を見た。

1965 年、Lehigh Univ. の Summer Seminar において、従来の塑性設計法の高層骨組構造物への適用を阻むものとして、以下の 3 点が指摘された。

- ① $0.6 P_y$ (P_y : 降伏荷重) 以上の軸力を受け、しかも種々の端部条件をもつ柱の挙動に対する明確な解法の欠如

- ② 剛節骨組構造物における, Sidesway failure を含む不安定現象に対する解法の未開発
- ③ 高次不静定度を有する, しかも有限変形を考慮する必要がある高層建築物にも適用可能な解析方法の未研究

①に対しては C. D. C. 法が提唱され, ②, ③に対しては近似解法, 試行錯誤法による試案が提出されたが, 以上3点が統一的に解決された訳でなく, 本方法が3点を同時に解決する数値解析法として有効であることが確かめられた。

最後に, 東京大学工学部座屈研究委員会を通じ, 倉西正嗣教室, 林毅教授はじめ委員の方々から終始有益な教示と励ましを与えられました。ここに厚くお礼申し上げます。実験を手伝っていただいた船舶工学科構造強度実験室高沢 誠助手に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 藤田 譲, 大坪英臣, 湯原哲夫:「構造物の塑性設計 (その 10)」(高軸力をうける平面フレーム構造の大撓み弾塑性問題の一解法) 日本造船学会論文集 126 号 44 年 12 月
- 2) Bleich, F.: "Buckling Strength of Metal Structure" McGraw Hill, 1952
- 3) 吉識雅夫, 山本善之:「弾性安定論」, 応用力学講座 10, 共立出版, 1958
- 4) Galambos, T. V., Lay, M. G.: "Studies of Ductility of Steel Structures" ASCE, ST 4, August, 1965
- 5) Beedle et al.: "Plastic Design of Multi-Story Frame" Fritz Engineering Laboratory, Lehigh University, 1965
- 6) Timoshenko, S., Gere, J.: "Theory of Elastic Stability" McGraw Hill, 1952
- 7) M. Wakabayashi: "The restoring force characteristics of Multi-Story Frames" Bulletin of the disaster prevition research institute, Vol.14, Part 2, February, 1965
- 8) Beedle et al.: "Recent Developments in plastic design practice" ASCE, ST 6, September, 1969