(昭和 46 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

帯板要素による平板構造の座屈解析

正員 吉 田 宏 一 郎*

Buckling Analysis of Plate Structures by the Strip Elements

by Koichiro Yoshida, *Member*

Summary

This paper provides a new approach to the buckling analysis of plate structures whose section are not varied along the longitudinal axis, for example, stiffened plates with one directional stiffeners, corrugated plates, polygonal tubes, sandwich plates with corrugated cores and so on.

In this approach, the prebuckling stresses are assumed to be normal stresses in the longitudinal direction only, however the distribution pattern may be arbitrary.

The fundamental concepts of this method are as follows. The plate elements which compose the section of the plate structures are divided into the narrow strip elements and then the stiffness matrixes of these strip elements are derived by assuming the displacement functions and using the energy theorems. In the subsequent processes, the usual techniques of matrix method can be applied and then buckling load is computed as the lowest eigen value. Several kinds of plate structures were analyzed by this method and experiments were also conducted. The coincidence was fairly good.

1 はじめに

一般に、平板構造とは、平板と平板とで組立てられた構造、あるいはそれらに防撓材として梁が付いている構造であり、大型複雑になるに従つて、その座屈解析には、いずれの解法を用いるにせよ、膨大な計算を要する。既に設計された構造の座屈チェックとしては、大容量計算も実行可能であるが、設計用プログラムに組み入れる解析法、あるいは設計用データ作製のための解析法としては、対象構造を理想化、局所化して一回の計算に要する時間が少なく、精度の高いものが必要になると思われる。

本論文では、断面形状が長さ方向に一定である平板構造、例えば一方防撓板、波板、各種断面を有する柱、桁、あるいは波板をコアとするサンドウィッチ板等が、座屈前応力として、長さ方向の任意の垂直応力分布を受ける場合の座屈を考える。

この種の構造の座屈については、W. H. Wittrick¹⁾が、解析解を用いる方法を論じてはいるが、数値計算例は、わずかしきと与えられていない。これは、元数が少し大きくなつた場合、固有値計算が容易でないためと思われる。そこで、断面を構成する平板要素を巾方向に分割してできる帯板要素を基礎として解析する方法を試みた。数種の構造例について計算を行うとともに、ウェブの大きい防撓材の付いた防撓板について、実験と計算を行い比較検討した結果、この解法が精度、計算時間の点で有効であることが判明したので、ここに報告する。

2 解 析 法

2.1 帯板要素の剛性行列

平板構造の断面を構成する平板要素の巾方向を分割し、その一つの巾を b 、座屈半波長を l として、 $b \times l$ を、一つの帯板要素と考え、その要素に関する局所座標を Fig. 1 に示す。 $y=0$ と $y=b$ が連続している次の要素との接合線(節線)であり、それぞれ i 辺、 j 辺と名付ける。座屈前応力として、 i, j 辺にそれぞれ σ_i, σ_j が作用

* 東京大学工学部

Fig. 1 帯板要素の局所座標

Fig. 2 境界力と境界変位

し、その途中では、線形に変化するものとする。座屈変形にともなう変位として、面外変位 w 、面内変位 u, v を考え、これらの変位関数を次の様に仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w &= \left[\left(y - \frac{2y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) \bar{\theta}_i + \left(1 - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2y^3}{b^3} \right) \bar{w}_i \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{y^2}{b} + \frac{y^3}{b^2} \right) \bar{\theta}_j + \left(\frac{3y^2}{b^2} - \frac{2y^3}{b^3} \right) \bar{w}_j \right] \sin \frac{\pi x}{l} \\ v &= \left[\left(1 - \frac{y}{b} \right) \bar{v}_i + \frac{y}{b} \bar{v}_j \right] \sin \frac{\pi x}{l} \\ u &= \left[\left(1 - \frac{y}{b} \right) \bar{u}_i + \frac{y}{b} \bar{u}_j \right] \cos \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

節線変位は次の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} w_i &= \bar{w}_i \sin \frac{\pi x}{l}, & w_j &= \bar{w}_j \sin \frac{\pi x}{l} \\ \theta_i &= \bar{\theta}_i \sin \frac{\pi x}{l}, & \theta_j &= \bar{\theta}_j \sin \frac{\pi x}{l} \\ v_i &= \bar{v}_i \sin \frac{\pi x}{l}, & v_j &= \bar{v}_j \sin \frac{\pi x}{l} \\ u_i &= \bar{u}_i \cos \frac{\pi x}{l}, & u_j &= \bar{u}_j \cos \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2) 式中—は節線変位の大きさを表わす。(1) 式中の w の変位関数は、Y. K. Cheung²⁾ が平板の曲げ解析に用いている。節線変位に対応する節線力は、

$$\left. \begin{aligned} V_i &= \bar{V}_i \sin \frac{\pi x}{l}, & V_j &= \bar{V}_j \sin \frac{\pi x}{l} \\ M_i &= \bar{M}_i \sin \frac{\pi x}{l}, & M_j &= \bar{M}_j \sin \frac{\pi x}{l} \\ N_i &= \bar{N}_i \sin \frac{\pi x}{l}, & N_j &= \bar{N}_j \sin \frac{\pi x}{l} \\ S_i &= \bar{S}_i \cos \frac{\pi x}{l}, & S_j &= \bar{S}_j \cos \frac{\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

V, M, N, S は、それぞれ边上における単位長さ当りの合剪断力、曲げモーメント、 y 方向面内力、 x 方向面内力 (Fig. 2 参照) を示す。

帯板要素の座屈変形にともなうポテンシャルエネルギー π は、変形が微小で、面外と面内との連成は無いものとする、以下の様に表わされる。ここで、 $x=0, l$ の辺では、変位関数を (1) 式の形に仮定した場合、変位又は、対応する境界力が 0 となりエネルギーに寄与しない。

$$\begin{aligned} \pi &= \frac{D}{2} \int_0^l \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ &\quad + \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^l \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad - \frac{t}{2} \int_0^l \int_0^b \left\{ \sigma_i - (\sigma_i - \sigma_j) \frac{y}{b} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ &\quad - \int_0^l \{ (M_i \theta_i + V_i w_i + N_i v_i + S_i u_i) + (M_j \theta_j + V_j w_j + N_j v_j + S_j u_j) \} dx \end{aligned} \quad (4)$$

(1), (2) 及び (3) 式を、(4) 式に代入し、 π の停留原理を用いれば、帯板要素の剛性行列が求められる。

節線力ベクトル、節線変位ベクトルを

$$\mathbf{f} = \{ \bar{M}_i/b_0, \bar{V}_i, \bar{N}_i, \bar{S}_i, \bar{M}_j/b_0, \bar{V}_j, \bar{N}_j, \bar{S}_j \} \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = \{ b_0 \bar{\theta}_i, \bar{w}_i, \bar{v}_i, \bar{u}_i, b_0 \bar{\theta}_j, \bar{w}_j, \bar{v}_j, \bar{u}_j \}^T \quad (6)$$

とすれば、

$$\mathbf{f} = \mathbf{k} \mathbf{u} \quad (7)$$

面外変形のみを考える場合には、

$$\mathbf{f} = \{ \bar{M}_i/b_0, \bar{V}_i, \bar{M}_j/b_0, \bar{V}_j \}^T \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \{b_0 \bar{\theta}_i, \bar{w}_i, b_0 \bar{\theta}_j, \bar{w}_j\}^T \quad (9)$$

となる。上記の各ベクトル中の b_0 は、基準にとる帯板要素の巾である。 $(\mathbf{k})$ の具体的な内容については附録参照)

2.2 防撓材の剛性行列

防撓材を断面の変形しない梁要素として取扱うときには、この剛性行列を求めこれを防撓材と板との接合線で附加すれば良い。防撓材断面の剪断中心に原点をとり、局所座標を Fig. 3 に示す様にとる。 y, z は、断面の主軸方向である。図心 G の x 方向変位 u_G 、剪断中心 S の y, z 方向変位 v_S, w_S 、断面の回転角 θ 、ゆがみ関数 ω とすれば、任意点の変位 u, v, w は、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_G - \frac{dw_S}{dx} (z - z_G) - \frac{dv_S}{dx} (y - y_G) + \frac{d\theta}{dx} \omega \\ v &= v_S - z\theta \\ w &= w_S + y\theta \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$(y_G, z_G), (y_P, z_P)$ を、それぞれ図心 G 、接合点 P の座標、 A, EI_y, EI_z, EF, GJ を、それぞれ防撓材の断面積、 z, y 軸まわりの曲げ剛性、曲げ振り剛性、サンプナン振り剛性とし、接合点 P におけるモーメント、力を Fig. 3 に示す様にとると、圧縮応力 σ_P が作用している場合の座屈変形にともなうポテンシャルエネルギー π_S は、次の式となる。

$$\begin{aligned} \pi_S &= \frac{EA}{2} \int_0^l \left(\frac{du_G}{dx} \right)^2 dx + \frac{EI_z}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w_S}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EI_y}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 v_S}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{EF}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 \theta}{dx^2} \right)^2 dx \\ &+ \frac{GJ}{2} \int_0^l \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \sigma_P \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\} dA dx \\ &- \int_0^l (M_P \theta_P + V_P w_P + N_P v_P + S_P u_P) dx \end{aligned} \quad (11)$$

P 点において、ゆがみによる軸変位を小として無視して、 θ, u_G, v_S, w_S を、 θ_P, u_P, v_P, w_P で置換すると、

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_P \\ u_G &= u_P + \left(\frac{dw_P}{dx} - y_P \frac{d\theta_P}{dx} \right) (z_P - z_G) + \frac{dv_P}{dx} + z_P \frac{d\theta_P}{dx} (y_P - y_G) \\ v_S &= v_P + z_P \theta_P \\ w_S &= w_P - y_P \theta_P \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

u_P, v_P, w_P, θ_P は、接合している板と同一の変位になるとして、次の様に表わされる。

$$u_P = \bar{u}_P \cos \frac{\pi x}{l}, \quad v_P = \bar{v}_P \sin \frac{\pi x}{l}, \quad w_P = \bar{w}_P \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \theta_P = \bar{\theta}_P \sin \frac{\pi x}{l} \quad (13)$$

(10), (12) 及び (13) 式を、(11) 式に代入して、 π_S の停留原理を用いれば、防撓材を梁要素と考える場合の、接合点 P に関する剛性行列が求められる。

節線力ベクトル、節線変位ベクトルを、

$$\mathbf{f}_S = \{\bar{M}_P / b_0, \bar{V}_P, \bar{N}_P, \bar{S}_P\}^T \quad (14)$$

$$\mathbf{u}_S = \{b_0 \bar{\theta}_P, \bar{w}_P, \bar{v}_P, \bar{u}_P\}^T \quad (15)$$

とすれば、

$$\mathbf{f}_S = \mathbf{k}_S \mathbf{u}_S \quad (16)$$

面外変形のみを変える場合には、

$$\mathbf{f}_S = \{\bar{M}_P / b_0, \bar{V}_P\}^T \quad (17)$$

$$\mathbf{u}_S = \{b_0 \bar{\theta}_P, \bar{w}_P\}^T \quad (18)$$

となる。 $(\mathbf{k}_S)$ の具体的な内容については、附録参照)

2.3 座屈応力計算

上記 2.1, 2.2 で求められた要素剛性行列を、 $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{B}$ の形に整理する。ここで λ は、座屈前応力を代表する基準応力の無次元量である。各帯板要素、防撓材要素の剛性行列を、上の $\mathbf{A}$ 及び $\mathbf{B}$ のおのおのについて、その要素の位置に応じて、全体座標系への座標変換を行い、境界条件を考慮しつつ足しこんで得られた系全体の剛

Fig. 3 梁要素の局所座標

性行列の最小固有値を, power method で求めた。

3 計 算 例

3.1 試 計 算

Fig. 4 は, 一様圧縮応力を受ける, 各種境界条件の単一平板について, 分割数 N を変えて, 収束状況を示したものである。縦軸は, 座屈係数 $k(=\sigma_k b^2 t / D \pi^2)$, 横軸は分割数 N である。図から明らかな様に, N が 3 以上になると, いずれの境界条件の場合も, 誤差は非常に小さい, 又 N が大きくなるに従い, k は高目から一様に収束しており, その収束値は, 既知の値と比較して, その誤差は, ほぼ 0 である。

面内の純曲げを受けるアスペクト比 $\beta=0.6$, 周辺単純支持の単一平板についての計算結果が, Fig. 5 である。傾向は, Fig. 4 の場合とほぼ同一であるが, N が 4 以上で, 誤差が非常に小さくなっている。

次に, 閉断面の例として, 正方形断面で, 長さが断面の一辺に等しい箱型断面柱に, 一様圧縮荷重が作用した場合の k を, 一辺を 4 等分割した閉断面として解いた結果は, 単純支持単一板の解と小数 3 桁迄一致した。これらの試計算結果より, 一つの平板要素を, 3~4 個の帯板要素に分割すれば十分な精度が期待される。

Fig. 4 分割数による k の収束状況 (圧縮)

Fig. 5 分割数による k の収束状況 (曲げ)

3.2 圧縮を受ける防撓板

幅方向の等間隔の位置に, 長さ方向の数本の防撓材を有する周辺単純支持の防撓板が一様圧縮を受ける場合を考える。ここでは, 防撓材の深さがあまり深くなく, 梁として解析できるものとする。防撓材の大きさは, 面積, 曲げ剛性, 捩り剛性の無次元量が, それぞれ $\delta=A/bt=0.0566$, $\gamma=EI/Db=14.04$, $\epsilon=GJ/Db=0.216$ として, 防撓材の本数, 位置, 捩り剛性の有無についてシリーズ計算を行つた結果が, Fig. 6, 7, 8, 9 である。

防撓材 1 本の Fig. 6 において, ①は, 板の中央面に関して対称の位置に防撓材が付き (以後, 対称防撓材と称する), 捩り剛性を無視して $\epsilon=0$ としたものの, ②は, 対称防撓材で, ϵ を考慮したもの, ③は, 防撓材が片面に付いて (以後, 非対称防撓材と称する), ϵ を考慮したものである。図から判る様に, β の小さい領域で, 接合線を節として座屈する場合, 捩り剛性を無視すると, k が低く目に過ぎ, 又 β が大きい領域では, 対称防撓材の場合, 接合線も変位するモードに移行して, k は急激に下がる。Fig. 7 の防撓材 2 本の場合も, 1 本とほぼ同様の傾向であるが, 対称防撓材で接合線も変位するモードの場合, 捩り剛性を考慮する方がわずかに高くなるが, 図では一本の曲線で示してある。Fig. 8 の 3 本の場合, ①は, 対称防撓材で ϵ を考慮, ②は, 非対称防撓材で ϵ を考慮したもので, Fig. 9 の 4 本の場合も同様である。

 Fig. 6 防撓材 1 本の場合の k - β 関係

 Fig. 7 防撓材 2 本の場合の k - β 関係

 Fig. 8 防撓材 3 本の場合の k - β 関係

 Fig. 9 防撓材 4 本の場合の k - β 関係

Table 1 帯板要素法と有限要素法の比較

方 法	要 素 形 状	要素数	自由度	アスペクト比 β	防 撓 材 曲 げ 剛 性 r	防 撓 材 断 面 積 δ	座屈係数 k	計算時間 (sec)
帯板要素法	帯 板 要 素 + 梁 要 素	12	24	2.5	14.25	0.0833	11.14	1.4(平均)
有限要素法	三 角 形 要 素 + 梁 要 素	320	451	2.5	14.25	0.0838	11.04	110

帯板要素法による場合の計算時間と比較するため、対称防撓材1本、捩り剛性無視の場合につき、有限要素法によっても解き、比較したのが Table 1 である。

座屈係数の値に少し差があるが、 δ の違い及び有限要素法の計算で用いた変位関数が、Zienkiewicz の Non-conforming function⁹⁾ であることから此の差の傾向は説明ができ、又計算時間について大きな差があるのは、行列の大きさが非常に違うから当然のことではあるが、この種の問題における帯板要素法の有効性は明白である。

3.3 圧縮を受ける折板

Fig. 10 は、図中に示された2枚の板で構成された折板構造が、一様圧縮を受ける場合の折れ角度 θ による座屈係数 k の変化を示している。 $\theta=0^\circ$ の完全な平板から、微少な角度が付くに従って急激に k が上昇し、 $\theta=10^\circ$ と 20° の間で不連続変化が生じて、接合線が単純支持の場合の k の値になり、 $\theta=180^\circ$ に近づくにつれて、接合線に変位が生じ k は減少しはじめ、最終的に急激に降下する。接合線で単純支持と考えられるのは、 $\theta=10^\circ \sim 130^\circ$ の範囲である。以上のことは、角度毎に座屈モードの概略を示している Table 2 でも明瞭になっている。表中に示されている β の値は与えた角度で k が最小値をとるときの値である。計算条件は、 $b/t=30$ 、境界で、面外について単純支持、面内について自由、分割数は一枚当り4等分割である。

Fig. 10 折板の座屈係数の折れ角による変化

3.4 面外曲げを受ける波板

Fig. 11 は、図中に示す様に13枚の平板で構成され3個の山を有する波板が、面外の曲げを受けて局部座屈する場合の計算結果で、縦軸に k 、横軸に $\beta (=l/b, l=\text{半波長}, b=\text{山, 谷, 傾斜部の板巾})$ がとつてある。通常この種の構造では、 b に比べて長さ a が十分長いので、 k が最小値をとる $\beta=0.9$ 附近で座屈が生ずることとなり、 $k \approx 5.4$ である。この値は、一様圧縮を受ける山の頂部の平板が接合線で単純支持される場合の k と、固定の場合の k とのほぼ平均値となっている。計算条件は、 $b/t=50$ 、境界で、面外について単純支持、面内について自由であり、分割数は、両端の板が2等分割、他は4等分割である。

4 防撓板の圧縮実験

4.1 試験片

これまでに述べて来た解析法の精度をチェックし、ウェブ深さが非常に深い防撓材の付いた防撓板の圧縮による座屈、座屈後挙動、最高荷重を知る目的で Fig. 12 に示す試験片を作製した。矩形平板は、長さ 1400

Table 2 折板の座屈モードの変化

0° $\beta=2.0$ $k=1.000$	3° $\beta=2.1$ $k=1.412$	5° $\beta=1.5$ $k=1.995$
10° $\beta=1.1$	20° $\beta=1.0$ $k=4.000$	30° $\beta=1.0$ $k=4.000$
40° $\beta=1.0$ $k=4.000$	90° $\beta=1.0$ $k=4.000$	140° $\beta=1.0$ $k=3.947$
150° $\beta=1.0$ $k=3.899$	160° $\beta=1.0$ $k=3.769$	170° $\beta=1.1$ $k=3.169$
175° $\beta=1.5$ $k=1.998$	177° $\beta=3.3$ $k=1.193$	180° $\beta=\infty$ $k=0.425$

Fig. 11 波板の座屈係数と座屈モード

mm, 巾 600 mm の一定で, 防撓材のフランジに当るティップの巾は一律 30 mm とし, ウェブの深さを, 50, 100, 200, 300 mm の 4 種類に変え, それぞれ A, B, C, D 試験片と名づけ, 同種類の 2 個を, 例えば, A-1, A-2 の如くに区別する。板厚は, 全試験片にわたって矩形平板, 防撓材のウェブ, フランジともすべて 4 mm である。試験片の境界は, 非荷重辺ではナイフエッジで, 荷重辺は浅い溝で支えた。材料は軟鋼で $E=19325 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_Y=22.5 \text{ kg/mm}^2$ である。

4.2 計算値との比較

前項に述べた試験片について, 矩形板は 8 分割, 防撓材は, ウェブを 1~4 分割, フランジを梁要素として帯

Table 3 防撓板圧縮の実験値と計算値の比較

specimen		A-1	A-2	B-1	B-2
experiments	buckling mode				
	buckling load(ton)	39.8	38.5	43.2	42.0
	buckling stress(kg/mm ²)	15.1	14.6	15.2	14.8
calculation	buckling mode				
	k - β curves				
	buckling load(ton)	41.3	41.3	43.4	43.4
	error(%)	+3.6	+7.1	+0.5	+3.4
specimen		C-1	C-2	D-1	D-2
experiments	buckling mode				
	buckling load(ton)	43.7	43.3	38.1	45.1
	buckling stress(kg/mm ²)	13.5	13.4	10.5	12.4
calculation	buckling mode				
	k - β curves				
	buckling load(ton)	47.5	47.5	45.7 (37.1)	45.7
	error(%)	+8.7	+9.7	+20.0 (-2.6)	+1.4

Fig. 12 圧縮試験片

Fig. 14 ウェブ深さによる座屈係数及び座屈モードの変化

ことが認められたので、計測結果を参考として、Fig. 13 の様な応力分布を仮定して計算した結果が () 内に示してある。以上の結果を縦軸に k 、横軸に防撓材のウェブ深さをとつて整理したのが Fig. 14 である。

5 ま と め

定断面を有する平板構造が、長さ方向の任意の垂直応力分布荷重を受ける場合の座屈を、帯板要素を用いて解析する方法を述べ、数種の構造の計算を行った結果、精度、計算時間の点で良好であることが判つた。続いてウェブ深さの大きい防撓材を有する防撓板の圧縮実験を行った結果と、上述の方法による計算結果を比較して、座屈モード、座屈荷重ともかなり良い相関を得た。

謝 辞

本論文の最後にあたり、東大藤田教授には、終始暖かく励まして戴き深く感謝致します。又、本研究の実施にあたって、実験、数値計算について、東大大学院荒井宏範氏、並びに卒業論文⁶⁾としてこれを行つた、当時船舶工学科学生であつた西原誠一郎、北野公夫両氏のご協力に対し心よりお礼申し上げますとともに、実験、図面作製等についてご助力戴いた東大船舶工学科金子幸平、大塚守三氏を始めとする強弱実験室の方々に感謝致します。

Fig. 13 修正応力分布

板要素法で座屈荷重を計算した。計算結果を、実験結果とともに Table 3 に示す。表中、実験座屈荷重の欄には、 $P-\delta^2$ 法⁴⁾あるいは $\epsilon-\delta^2$ 法⁵⁾で決定した座屈荷重を、実験座屈モードの欄には、この座屈荷重に近い荷重段階で測定された長さ方向及び巾方向の変形モードを示した。左側の図は、長さ方向のモード、白丸、黒丸は左右の板の巾の中央における変形を示し、D試験片を除きほぼ5半波で座屈していることが判る。右側の図は、図の基線の高さにおける巾方向の変形モードである。ウェブの小さい領域では、フランジ部分の横変位がほとんど無いが、ウェブの大きいD試験片になると急激に横変位が出て、明らかに座屈モードに違いがみられる。計算から得られた座屈係数アスペクト比の関係を $k \sim \beta$ 曲線の欄に示す。D試験片を除いては、試験片のアスペクト比の値では、半波数がほぼ5となり、D試験片では1となる。これに対応する k から計算された座屈荷重及び巾方向の座屈モードをそれぞれの欄に示す。誤差の欄には、座屈荷重の差を、実験値を基準とした % で表示してある。

D-1 試験片のみが 20% と実験値が大巾に低くなつてはいるが、実験中の歪分布の計測から、この実験では、応力分布が断面にわたつて一様ではなく、防撓材のフランジ附近に他より大きな圧縮応力が作用していたこ

参 考 文 献

- 1) Wittrick, W. H.: A Unified Approach to the Initial Buckling of Stiffened Panels in Compression, Aero. Quart., Vol.14 (1968).
- 2) Cheung, Y. K.: The Finite Strip Method in the Analysis of Elastic Plates with Two Opposite Simply Supported Ends, Proc. I. C. E. (1968).
- 3) 藤田 譲, 吉田宏一郎, 荒井宏範: 有孔板の座屈強度について (その 3), 日本造船学論文集, 第 127 号 (1970).
- 4) 吉識雅夫: 圧縮力を受ける矩形平板の座屈限界の決定法の試案, 日本応用力学論文集 (1948).
- 5) 吉識雅夫, 藤田 譲, 吉田宏一郎: 構造物の塑性設計 (その 6), (塑性域における構造要素の圧縮強度), 日本造船学会論文集, 第 118 号 (1965).
- 6) 西原誠一郎, 北野公夫: 板構造物の圧縮強度, 東京大学船舶工学科卒業論文 (1971).

附 録

1. 帯板要素の剛性行列

無次元化記号

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \text{基準板幅} & \sigma_e &= \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t_0}{b_0} \right)^2 \\
 t_0 &= \text{基準板厚} & \lambda_i &= \sigma_i / \sigma_e \\
 \eta &= b/b_0 & \lambda_j &= \sigma_j / \sigma_e \\
 \xi &= t/t_0 & \sigma_0 &= \text{基準初期応力} \\
 l &= \text{半波長} & \lambda &= \sigma_0 / \sigma_e \\
 \beta &= l/b_0 & k_i &= \lambda_i / \lambda = \sigma_i / \sigma_0 \\
 r &= b_0/t_0 & k_j &= \lambda_j / \lambda = \sigma_j / \sigma_0 \\
 D_0 &= \frac{Et_0^3}{12(1-\nu^2)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} \bar{M}_i/b_0 \\ \bar{V}_i \\ \bar{N}_i \\ \bar{S}_i \\ \bar{M}_j/b_0 \\ \bar{V}_j \\ \bar{N}_j \\ \bar{S}_j \end{Bmatrix} = \frac{D_0\pi^4}{b_0^3\beta^2} \begin{Bmatrix} b_0\bar{\theta}_i & \bar{w}_i & \bar{v}_i & \bar{u}_i & b_0\bar{\theta}_j & \bar{w}_j & \bar{v}_j & \bar{u}_j \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & a_{83} & a_{84} & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0\bar{\theta}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_i \\ b_0\bar{\theta}_j \\ \bar{w}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix} \\
 a_{11} &= \left\{ \frac{1}{105} \frac{\eta^3\xi^3}{\beta^2} + \frac{4}{15\pi^2} \eta\xi^3 + \frac{4}{\pi^4} \frac{\xi^3\beta^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{105} k_i\eta^3\xi - \frac{1}{280} (k_i - k_j) \eta^3\xi \right\} \\
 a_{12} &= \left\{ \frac{11}{210} \frac{\eta^2\xi^3}{\beta^2} + \frac{1}{5} \frac{1+\nu}{\pi^2} \xi^3 + \frac{6}{\pi^4} \frac{\xi^3\beta^2}{\eta^2} \right\} - \lambda \left\{ \frac{11}{210} k_i\eta^2\xi - \frac{1}{60} (k_i - k_j) \eta^2\xi \right\} \\
 a_{15} &= \left\{ -\frac{1}{140} \frac{\eta^3\xi^3}{\beta^2} - \frac{1}{15\pi^2} \eta\xi^3 + \frac{2}{\pi^4} \frac{\xi^3\eta^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ -\frac{1}{140} k_i\eta^3\xi + \frac{1}{280} (k_i - k_j) \eta^3\xi \right\} \\
 a_{16} &= \left\{ \frac{13}{420} \frac{\eta^2\xi^3}{\beta^2} - \frac{1}{5\pi^2} \xi^3 - \frac{6}{\pi^4} \frac{\xi^3\beta^2}{\eta^2} \right\} - \lambda \left\{ \frac{13}{420} k_i\eta^2\xi - \frac{1}{60} (k_i - k_j) \eta^2\xi \right\} \\
 a_{22} &= \left\{ \frac{13}{35} \frac{\eta\xi^3}{\beta^2} + \frac{12}{5\pi^2} \frac{\xi^3}{\eta} + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi^3\beta^2}{\eta^3} \right\} - \lambda \left\{ \frac{13}{35} k_i\eta\xi - \frac{3}{35} (k_i - k_j) \eta\xi \right\} \\
 a_{26} &= \left\{ -\frac{13}{420} \frac{\eta^2\xi^3}{\beta^2} + \frac{1}{5\pi^2} \xi^3 + \frac{6}{\pi^4} \frac{\xi^2\beta^2}{\eta^2} \right\} - \lambda \left\{ -\frac{13}{420} k_i\eta^2\xi + \frac{1}{70} (k_i - k_j) \eta^2\xi \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{26} &= \left\{ \frac{9}{70} \frac{\eta \xi^3}{\beta^2} - \frac{12}{5} \frac{\xi^3}{\pi^2} - \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\eta^3} \right\} - \lambda \left\{ \frac{9}{70} k_i \eta \xi - \frac{9}{140} (k_i - k_j) \eta \xi \right\} \\
a_{33} &= \left\{ \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \eta \xi \gamma^2 + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{3} k_i \eta \xi - \frac{1}{12} (k_i - k_j) \eta \xi \right\} \\
a_{34} &= \frac{3(3\nu-1)}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \\
a_{37} &= \left\{ \frac{(1-\nu)}{\pi^2} \eta \xi \gamma^2 - \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{6} k_i \eta \xi - \frac{1}{12} (k_i - k_j) \eta \xi \right\} \\
a_{38} &= \frac{3(1+\nu)}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \\
a_{44} &= \left\{ \frac{4}{\pi^2} \eta \xi \gamma^2 + \frac{6(1-\nu)}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{3} k_i \eta \xi - \frac{1}{12} (k_i - k_j) \eta \xi \right\} \\
a_{47} &= -\frac{3(1+\nu)}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \\
a_{48} &= \left\{ \frac{2}{\pi^2} \eta \xi \gamma^2 - \frac{6(1-\nu)}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{6} k_i \eta \xi - \frac{1}{12} (k_i - k_j) \eta \xi \right\} \\
a_{55} &= \left\{ \frac{1}{105} \frac{\eta^3 \xi^3}{\beta^2} + \frac{4}{15} \frac{\xi^3}{\pi^2} - \frac{4}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{105} k_i \eta^3 \xi - \frac{1}{168} (k_i - k_j) \eta^3 \xi \right\} \\
a_{56} &= \left\{ -\frac{11}{210} \frac{\eta^2 \xi^3}{\beta^2} - \frac{1}{5} \frac{\xi^3}{\pi^2} - \frac{6}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\eta^2} \right\} - \lambda \left\{ -\frac{11}{210} k_i \eta^2 \xi + \frac{1}{28} (k_i - k_j) \eta^2 \xi \right\} \\
a_{66} &= \left\{ \frac{13}{35} \frac{\eta \xi^3}{\beta^2} + \frac{12}{5} \frac{\xi^3}{\pi^2} + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi^3 \beta^2}{\eta^3} \right\} - \lambda \left\{ \frac{13}{35} k_i \eta \xi - \frac{2}{7} (k_i - k_j) \eta \xi \right\} \\
a_{77} &= \left\{ \frac{2(1-\nu)}{\pi^2} \eta \xi \gamma^2 + \frac{12}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{3} k_i \eta \xi - \frac{1}{4} (k_i - k_j) \eta \xi \right\} \\
a_{78} &= -\frac{3(3\nu-1)}{\pi^3} \xi \beta \gamma^2 \\
a_{88} &= \left\{ \frac{4}{\pi^2} \eta \xi \gamma^2 + \frac{6(1-\nu)}{\pi^4} \frac{\xi \beta^2 \gamma^2}{\eta} \right\} - \lambda \left\{ \frac{1}{3} k_i \eta \xi - \frac{1}{4} (k_i - k_j) \eta \xi \right\}
\end{aligned}$$

2. 防撓材の剛性行列

無次元化記号

$$\begin{aligned}
\alpha &= A/b_0 t_0 & \zeta_1 &= EI_y/D_0 b_0 \\
\mu_1 &= z_P/b_0 & \zeta_2 &= EI_z/D_0 b_0 \\
\mu_2 &= z_G/b_0 & \zeta_3 &= EI'/D_0 b_0^3 \\
\mu_3 &= y_P/b_0 & \zeta_4 &= GJ/D_0 b_0 \\
\mu_4 &= y_G/b_0 & k_P &= \sigma_P/\sigma_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \bar{M}_P/b_0 \\ \bar{V}_P \\ \bar{N}_P \\ \bar{S}_P \end{pmatrix} &= \frac{D_0 \pi^4}{b_0^3 \beta^2} \begin{bmatrix} b_0 \bar{\theta}_P & \bar{w}_P & \bar{v}_P & \bar{u}_P \\ C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \bar{\theta}_P \\ \bar{w}_P \\ \bar{v}_P \\ \bar{u}_P \end{pmatrix} \\
C_{11} &= \left[12(1-\nu^2) \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2} \{ \mu_3^2 (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_1^2 (\mu_3 - \mu_4)^2 + 2 \mu_1 \mu_3 (\mu_1 - \mu_2) (\mu_3 - \mu_4) \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\zeta_1 \mu_1^2}{\beta^2} + \frac{\zeta_2 \mu_3^2}{\beta^2} + \frac{\zeta_3}{\beta^2} + \frac{\zeta_4}{\pi^2} \right] - \lambda k_P \left[\alpha \mu_1^2 + \alpha \mu_3^2 - 2 \alpha \mu_1 \mu_2 \right. \\
&\quad \left. - 2 \alpha \mu_3 \mu_4 + \alpha \mu_2^2 + \alpha \mu_4^2 + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{\gamma^2} (\zeta_1 + \zeta_2) \right] \\
C_{12} &= \left\{ -12(1-\nu^2) \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2} \mu_3 (\mu_1 - \mu_2)^2 + 12(1-\nu^2) \frac{\alpha \gamma^2}{\beta^2} \mu_1 (\mu_1 - \mu_2) (\mu_3 - \mu_4) \right. \\
&\quad \left. - \zeta_2 \frac{\mu_3}{\beta^2} \right\} - \lambda k_P \{ -\alpha \mu_3 + \alpha \mu_4 \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{13} &= \left\{ 12(1-\nu^2) \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \mu_1(\mu_3-\mu_4)^2 - 12(1-\nu^2) \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} \mu_3(\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_4) \right. \\
&\quad \left. + \zeta_1 \frac{\mu_1}{\beta^2} \right\} - \lambda k_P \{ \alpha\mu_1 - \alpha\mu_2 \} \\
C_{14} &= -\frac{12(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\alpha\gamma^2}{\beta} \mu_3(\mu_1-\mu_2) + \frac{12(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\alpha\gamma^2}{\beta} \mu_1(\mu_3-\mu_4) \\
C_{22} &= 12(1-\nu^2) \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} (\mu_1-\mu_2)^2 + \frac{\zeta_2}{\beta^2} - \lambda k_P \alpha \\
C_{23} &= 12(1-\nu^2) \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} (\mu_1-\mu_2)(\mu_3-\mu_4) \\
C_{24} &= \frac{12(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\alpha\gamma^2}{\beta} (\mu_1-\mu_2) \\
C_{33} &= 12(1-\nu^2) \frac{\alpha\gamma^2}{\beta^2} (\mu_3-\mu_4)^2 + \frac{\zeta_1}{\beta^2} - \lambda k_P \alpha \\
C_{34} &= \frac{12(1-\nu^2)}{\pi} \frac{\alpha\gamma^2}{\beta} (\mu_3-\mu_4) \\
C_{44} &= \frac{12(1-\nu^2)}{\pi^2} \alpha\gamma^2
\end{aligned}$$