(昭和 46 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

平板の弾塑性大たわみ問題の一解法

——特に平板の圧縮最終強度について——

正員 大 坪 英 臣

A Generalized Method of Analysis of Large-deformed Elastic-Plastic Plate Problems
—Ultimate Strength of Compressive Plates with Initial Deflection—

by Hideomi Ohtsubo, *Member*

Summary

This paper presents a generalized method of analysis of large-deformed elastic-plastic plate problems. The nonlinear geometric and material problems are solved by the incremental load procedure (step-by-step method).

The method of solution is outlined as follows.

(A) *Plastic analysis* is based on the flow theory of plasticity. The method of initial strains is applied considering the following characteristic feature. Structures can be treated by this method as if they had elastic stiffness and the effect of plastic deformation is transformed into the equivalent additional external force. So this method makes it possible for us to apply the principle of stationary potential energy of elastic plate with initial strains.

(B) *Finite deformation analysis* is performed at the respective loading steps in the following way.

- (1) Incremental deflection Δw is expanded in a series of functions with unknown coefficients $\Delta C_{[m]}$.
- (2) Inplane incremental displacement Δu_e is expressed in terms of $\Delta C_{[m]}$, considering inplane equilibrium condition. The finite element method for plane stress problems can be used in this process.
- (3) $\Delta C_{[m]}$ are determined to satisfy inplane and out-of-plane equilibrium conditions.

This method has a special merit to require only a short computing time owing to expansion of Δw in a series of functions. Whole application of the finite element method would result in intolerable time-and core-consuming troubles.

As numerical examples, two problems are studied with regards to the simply-supported square plates and the perforated square plates.

- (1) Laterally loaded plate
- (2) Ultimate compressive strength of the plates with various thickness and initial deflection.

A few experiments were performed to investigate the applicability of the method of solution.

1 序

船体、建築物等の構造物の巨大化・高層化競争は著しいが、この現状で構造物の部材のうち、大きな圧縮力を負担するものが多くなる。そして部材の1つが最終強度に達すると、そのことが構造物の崩壊をもたらすことがある。したがって部材の最終強度を知ることは、設計上重要なことであるが、このためには塑性解析のみなら

* 東京大学工学部

ず、有限変形も考慮しなければならない。

本論文においては、平板の弾塑性大たわみ問題に対する一般的な解法を提示し、これを適用して、面内圧縮荷重を受ける平板の最終強度を中心として解析を進める。

塑性変形が生じることにより座屈する、いわゆる塑性座屈現象に対して、山本は昭和30年前後に、彼の塑性座屈理論を展開した¹⁻²⁾。それは彼以前の、塑性変形理論より合理的な塑性流れ理論を基礎とした、Handelman, Prager, Pearson 等の塑性座屈理論結果が、実験結果とかけ離れる原因を究明する目的があつた。

そして、その原因は、実際の平板では避けられない初期たわみ等の初期不整の存在を無視したためであることを示し、平板の“不完全性”に立脚した座屈理論を建設した。それにより柱および平板において、横たわみが急激に増加し始める“Shanley 安定限,” および不安定となつて最高荷重を示す“Kármán 安定限”の両概念の意味づけを明確化した。

平板においては、初期たわみの存在による影響として、次の現象も考慮に入れる必要も指摘された。柱と異なり、平板では、面内合応力分布が圧縮過程が進むにつれて変化し、圧縮軸方向と垂直方向の合応力成分が生じ、このことが圧縮最終強度を決定的に左右することである。さらに、初期たわみの影響は、 E_T が小さいほど著しく、彼以前の流れ理論に基づく塑性座屈理論において、 E_T が小さいほど実験と合致しなくなることの理由が明らかになった。以上、山本の理論は平板中央部の模型としてのサンドイッチ板に基づいた解析結果を根拠として展開された。サンドイッチ板において、圧縮力および曲げモーメントは常に平に保たれる2枚の皮板が受け持つとして解析された。

ほぼ同じ頃、1953年に Onat, Drucker は圧縮荷重が作用する十字型断面の柱が、塑性ねじり変形を生じて座屈する場合の、初期ねじり角の影響を研究した³⁾。圧縮力は十字型の皮板のみで受けもつとした。解析は塑性流れ理論に基づいて行なわれ、微小な初期ねじり角の存在によつても、座屈荷重は大きく低下し、塑性変形理論に基づいて得られる値に近づくことがわかつた。

ここで重要なことは、いずれの理論においても、圧縮過程における時々刻々の平衡条件を追跡して解析がなされていることである。またこの方法によつてのみ、初期不整の影響を精確に知り得ると考えられる。

さて、本論文においては、変分原理に基づき、step-by-step に平衡条件を考える。さらに一般の平板の幾何学的特性を考え、塑性域の面内方向および板厚方向への進展も考慮する。これにより、初期たわみを有する平板の挙動を精確に解析し、初期たわみの最終強度等に対する影響を明らかにした。さらに困難な問題であると考えられていた、平板が弾性座屈し、その後に塑性変形が生じ最高荷重を示す場合の解析も行なう。そのほか、横圧を受ける平板の大たわみ弾塑性問題の解析を行なう。

2 理 論

2.1 概 略

解析は次のように行なう。塑性変形および有限変形による非線形性は各微小荷重増分あるいは強制変位増分に対して、構造は線形に挙動するとみなし、<step-by-step 法 (荷重増分法)>を用いる。

塑性解析法は、現在<接線剛性法>と<初期ひずみ法>の2つの方法が用いられているが、ここでは<初期ひずみ法>を適用する。この解法を用いるとき、塑性変形の影響は等価な外力の変化として考えることができ、構造物の剛性は常に弾性として取り扱うことができる利点がある。

有限変形を考えると、横たわみと面内変位は独立でなくなるが、この大たわみ解析は、以下のことを利用し、横たわみと面内変位とは、異なる扱いをする。座屈問題あるいは分布横荷重問題等において、一般に平板の横たわみは単調な分布を示すのに対し、それに適合する面内変位分布は一般に複雑であり、さらに応力集中あるいは塑性変形等が現われるとき、より複雑となる。大たわみ問題に困難さをもたらしたのは、面内変位を精確に知ることの難しさであつた。特殊な問題以外、面内変位を解析的に得ることはできない。

本論文においては、この面内変位と横たわみの特性の差に着目し、横たわみ増分を未定係数を含んで関数展開する。これに適合する面内変位増分は<平面初期ひずみ問題>の解として得られることを示す。

これにより面内変位増分を得るに際して、横たわみおよび塑性ひずみの両者を“初期ひずみ”と考えることができる。このことを踏まえると、面内変位増分を平面応力場問題の有限要素法を用いて、未知数として横たわみの未定係数のみを含んだ形で表示できる。さらにこの未定係数は、変分原理から決定され、最終的に全ての変

位増分を求めることができる。この方法は既に著者等によつて平板の弾性大たわみ問題に適用された方法の発展でもある⁴⁾。横たわみの Rayleigh-Ritz 法的取り扱いの利点は、大巾な計算時間の短縮を可能にすることである。複雑な面内変位増分を求めるのと同じ要素分割により、曲げ問題を有限要素法で解析することは、実行上非常に多大の計算時間を要することは知られている。

2.2 初期ひずみ法

塑性解析を＜初期ひずみ法＞で行なうとき、次の手順に従う。現荷重段階を n step とする。前荷重段階 ($n-1$) step における塑性ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{ef}^p(n-1)$ とする。 $e, f=1, 2$ であり、Fig. 1 における座標軸方向成分を意味する。この $\Delta \epsilon_{ef}^p(n-1)$ を n step における塑性ひずみの最初の近似とする。塑性ひずみ増分が既知であるならば、これを初期ひずみと考へて、総ひずみ増分を得ることができる。つまり $\Delta \epsilon_{ef}^p(n-1)$ を初期ひずみと考へ、平衡条件、境界条件を満足する面内変位増分 $\Delta u_{e(n,1)}$, 横たわみ増分 $\Delta w_{(n,1)}$ が決定できる。ここで () 内の後の添字 1 は最初の近似解を意味する。さらに、よりよい塑性ひずみ近似として、変位増分に適合する総歪増分 $\Delta \epsilon_{ef(n,1)}$ に対して、塑性条件を満たす $\Delta \epsilon_{ef(n,1)}^p$ を得る。同時に応力増分 $\Delta \sigma_{(n,1)}^e$ も計算する。

必要ならば、 $\Delta \epsilon_{ef(n,1)}^p$ を初期ひずみとして、 $\Delta u_{e(n,2)}, \Delta w_{(n,2)}$ さらに $\Delta \epsilon_{ef(n,2)}^p, \Delta \sigma_{(n,2)}^e$ を得ることができる。このことを必要な回数繰り返した後、次の ($n+1$) step に進む。以上の解析を Flow chart で示したのが Fig. 2 である。

Fig. 1 Plate and Coordinates

Fig. 2 Calculation Scheme of Initial Strains Method

ここで tensor の添字は除いて表示している。点線で示したのが、弾性解析の手順であり、実線が塑性挙動を含めた解析方法である。 A において ($n-1$) step まで平板は弾性挙動をしていたかを調べ、塑性ひずみが存在しないならば、 C において後述するように平衡条件を満たす変位増分 $\Delta u_{(n)}$, $\Delta w_{(n)}$ を求め、 F で現荷重増分によつて塑性変形が生じたかどうかを調べる。生じていなければ ($n+1$) step に進む。 $(n-1)$ step までに塑性変形が生じているとき、 B に示す $\Delta \epsilon_{(n,0)}^p = \Delta \epsilon_{(n-1)}^p$ を初期ひずみとして、 C より $\Delta u_{(n,1)}$, $\Delta w_{(n,1)}$ を決定する。さらに D で得られた全ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{(n,1)}$ を基に E で塑性領域、 G で応力増分 $\Delta \sigma_{(n,1)}$, H において修正された塑性ひずみ $\Delta \epsilon_{(n,1)}^p$ を得る。さらに $\Delta \epsilon_{(n,1)}^p$ の精度を I において調べる。さらに修正が必要なら、 B に戻る。塑性ひずみ増分の精度が良ければ、($n+1$) step に進む。 E, G, H に関しては (2.7) で述べる。以上の手順において、 $\Delta \epsilon_{(n,\alpha)}^p$ が正解に収束するか、あるいは収束するなら、どの程度の繰り返しが必要であるかが問題となる。これに関しては、著者等は目下検討中であるが、簡単な問題においては収束を証明することができる。

2.3 変分原理

Fig. 1 に示す平板の挙動を考える。外荷重としては、横分布荷重と面内荷重のみを考える。さらに横たわみは板周辺で 0 であるとする。

＜初期ひずみ法＞に従うとき、 n step における変分原理式は次のように書ける。ただし添字 n は省略する。

$$\delta \Delta \Pi = 0 \quad (\Delta u_e, \Delta w) \quad (1)$$

$$\text{ここで () 内は独立関数を意味する。} \quad \Delta \Pi = \Delta U - \Delta W \quad (2)$$

$$\Delta U = \iiint_{V_0} [\Delta A(\Delta u_e, \Delta w) + \sigma^e \frac{1}{2} \Delta w_{,e} \Delta w_{,f}] dV_0 \quad (3)$$

$$\Delta W = \iint_{S_{M_0}} \bar{\Delta p} \Delta w dx dy + \int_{C_{F_0}} \bar{\Delta N}^e \Delta u_e ds \quad (4)$$

Δu_e ($e=1,2$), Δw は求めるべき n step の面内変位増分, 横たわみ増分である。 σ^{ef} は $(n-1)$ step までの応力であり, $\Delta \bar{p}$, $\Delta \bar{N}^e$ は横分布荷重, 面内外荷重を示す。 V_0 , S_{M0} , C_{F0} は Fig. 1 に示すように, 変形前に平板の占めていた体積, 中央面面積, 面内荷重の加わる平板の縁の板厚中心線である。

さらに ΔA は総ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{ef}$ で表示すると

$$\Delta A(\Delta \varepsilon_{ef}) = \frac{1}{2} E^{efgh} (\Delta \varepsilon_{ef} - \Delta \varepsilon_{ef}^p) (\Delta \varepsilon_{gh} - \Delta \varepsilon_{gh}^p) \quad (e, f, g, h=1, 2) \quad (5)$$

$\Delta \varepsilon_{ef}^p$ は $(n-1)$ step における塑性ひずみ増分, あるいは n step における前 cycle から得られる近似塑性ひずみ増分である。 E^{efgh} は材料の平面応力場における弾性定数であり, 次式で与えられる。

$$E^{efgh} = -\frac{\nu E}{1-\nu^2} \delta_{ef} \delta_{gh} + \frac{E}{2(1+\nu)} (\delta_{eg} \delta_{fh} + \delta_{eh} \delta_{fg}) \quad (6)$$

ただし E, ν はヤング率, ポアソン比であり, δ_{ef} はクロネッカのデルタである。

さらにひずみ増分 $\Delta \varepsilon_{ef}$ は, 変位増分 Δu_e , Δw と次の関係がある。

$$\Delta \varepsilon_{ef} = \frac{1}{2} (\Delta u_{e,f} + \Delta u_{f,e}) + \frac{1}{2} (w_{,e} \Delta w_{,f} + w_{,f} \Delta w_{,e}) + \frac{1}{2} \Delta w_{,e} \Delta w_{,f} - z \Delta w_{,ef} \quad (7)$$

w は $(n-1)$ step までの総たわみである。

(1) 式の変分を実行すると, 次の平衡条件を得る。

$$\Delta N^{ef}, f=0 \quad \text{in } S_{M0} \quad (8)$$

$$\Delta N^{ef} n_f = \Delta \bar{N}^e \quad \text{on } C_{F0} \quad (9)$$

$$\{\Delta N^{ef} (w + \Delta w)_{,e}\}_{,f} + \{N^{ef} \Delta w_{,e}\}_{,f} + \Delta M^{ef}_{,ef} = 0 \quad \text{in } S_{M0} \quad (10)$$

$$\Delta M^{ef} n_f = 0 \quad \text{on } C_{F0} \quad (11)$$

ここで

$$\Delta N^{ef} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma^{ef} dz \quad (12)$$

$$\Delta M^{ef} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma^{ef} z dz \quad (13)$$

さらに Δu_e , Δw は, 次の境界条件を満している。

$$\Delta u_e = \Delta \bar{u}_e \quad \text{on } C_{D0} \quad (14)$$

$$\Delta w = 0 \quad \text{on } C_0 \quad (15)$$

C_0, C_{D0} は板の外周縁の板厚中心線, その面内幾何学的境界を示す。

2.4 横たわみの関数展開

さて(1)式を解くに際し, 横たわみ分布の単調性を利用して, Δw を次のように関数展開する。

$$\Delta w = \sum_m \Delta C_{[m]} w^{[m]} \quad (16)$$

ここで $w^{[m]}$ は幾何学的境界条件を満すように適当に選ばれた関数であり, $\Delta C_{[m]}$ は未定係数である。

2.5 面内平衡条件を満す面内変位増分の $\Delta C_{[m]}$ による表示

(8)~(11)式の平衡条件を全て満す変位増分が正解となる訳であるが, 最初に面内平衡条件(8), (9)式のみを考えてみる。これは(1)式において Δu_e のみを独立関数と考えればよい。

$$\delta \Delta \Pi = 0 \quad (\Delta u_e) \quad (17)$$

$\Delta \Pi$ のうち Δu_e に関する項のみを考えると, (17)式は次のように書き直すことができる。

$$\delta (\Delta U' - \Delta W_U) = 0 \quad (\Delta u_e) \quad (18)$$

ここで $\Delta U'$, ΔW_U は

$$\Delta U' = \frac{h}{2} \iint_{S_{M0}} E^{efgh} \left(\frac{1}{2} (\Delta u_{e,f} + \Delta u_{f,e}) - \Delta \varepsilon_{ef}^{(0)} \right) \left(\frac{1}{2} (\Delta u_{g,h} + \Delta u_{h,g}) - \Delta \varepsilon_{gh}^{(0)} \right) dx dy \quad (19)$$

$$\Delta W_U = \int_{C_{F0}} \Delta \bar{N}^e \Delta u_e ds \quad (20)$$

ただし $\Delta \varepsilon_{ef}^{(0)}$ は

$$\Delta \varepsilon_{ef}^{(0)} = -\frac{1}{2} (w_{,e} \Delta w_{,f} + w_{,f} \Delta w_{,e}) - \frac{1}{2} \Delta w_{,e} \Delta w_{,f} + \Delta \varepsilon_{Mef}^p \quad (21)$$

また

$$\Delta \varepsilon_{Mef}^p = -\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \varepsilon_{ef}^p dz \quad (22)$$

(18)式は初期ひずみ $\Delta \varepsilon_{ef}^{(0)}$ を有する平面問題にほかならない。

つまり、横たわみの影響は、平面問題の初期ひずみとして考えることができることを意味する。

したがって、 Δu_e は次のように未定係数 $\Delta C_{[m]}$ に関しての2次形式で表示できる。

$$\Delta u_e = \Delta u_e^0 + \Delta u_e^I + \Delta u_e^{II} \quad (23)$$

ここで

$$\Delta u_e^I = \sum_m \Delta C_{[m]} u_e^{[m]} \quad (24)$$

$$\Delta u_e^{II} = \sum_{m,n} \Delta C_{[m]} \Delta C_{[n]} u_e^{[m,n]} \quad (25)$$

ただし Δu_e^0 , $u_e^{[m]}$, $u_e^{[m,n]}$ は次に示す各平面問題の解である。

Δu_e^0 : 初期ひずみ $\Delta \varepsilon_{Mef}^0$, 面内荷重増分 ΔN^e , 面内強制変位 Δu_e が与えられた平面問題解

$u_e^{[m]}$: 初期ひずみ $-\frac{1}{2}(w_{,e}w_{,f}^{[m]} + w_{,f}w_{,e}^{[m]})$ が存在し, 面内荷重増分が作用しない, 面内変位境界拘束の平面問題解

$u_e^{[m,n]}$: 初期ひずみ $-\frac{1}{4}(w_{,e}^{[m]}w_{,f}^{[n]} + w_{,e}^{[n]}w_{,f}^{[m]})$ が存在し, 面内荷重が作用しない, 面内変位境界拘束の平面問題解

以上の Δu_e^0 , $u_e^{[m]}$, $u_e^{[m,n]}$ は平面応力場の有限要素法を適用すると精度よく求めることができる。

2.6 面外平衡条件を満たす未定係数 $\Delta C_{[m]}$

(16), (23)式より Δu_e , Δw が未定係数 $\Delta C_{[m]}$ のみで表示された。これを(1)式に代入して, $\Delta C_{[m]}$ に関する第1変分を0とすると, 面内平衡条件と同時に面外平衡条件を満たす $\Delta C_{[m]}$ を決定することができる。

$$\delta \Delta \Pi = 0 \quad (\Delta C_m; m=1, 2, 3\cdots) \quad (26)$$

$\Delta \Pi$ の $\Delta C_{[m]}$ による具体的な表示は, 次のようにして求めることができる。演算を容易にするため(21)式を次のように置き換える。

$$\Delta \varepsilon_{ef} = \Delta \varepsilon_{Mef} + z \Delta \varepsilon_{Bef} \quad (27)$$

$$\text{あるいは} \quad = \Delta \varepsilon_{Uef} + \Delta \varepsilon_{Gef} + \Delta \varepsilon_{Hef} + z \Delta \varepsilon_{Bef} \quad (28)$$

ただし

$$\Delta \varepsilon_{Uef} = \frac{1}{2}(\Delta u_{e,f} + \Delta u_{f,e}) \quad (29)$$

$$\Delta \varepsilon_{Gef} = \frac{1}{2}(w_{,e}\Delta w_{,f} + w_{,f}\Delta w_{,e}) \quad (30)$$

$$\Delta \varepsilon_{Hef} = \frac{1}{2}\Delta w_{,e}\Delta w_{,f} \quad (31)$$

$$\Delta \varepsilon_{Bef} = -\Delta w_{,ef} \quad (32)$$

ここで添字 M は膜力成分, U は面内変位, G は初期撓み, H は高次項, B は曲げを意味する。

(27)式を(2)式に代入すると

$$\Delta \Pi = \Delta U_{MM} + \Delta U_{BB} + 2\Delta U_{SH} - 2\Delta U_{MP} - 2\Delta U_{BP} - \Delta W_U - \Delta W_B \quad (33)$$

ただし, 各歪エネルギー項 U , 外力仕事項 W の添字は以下に示すように関係する歪および変位を示す。

$$\Delta U_{MM} = \frac{h}{2} \iint_{SM_0} E^{efgh} \Delta \varepsilon_{Mef} \Delta \varepsilon_{Mgh} dx dy \quad (34)$$

$$\Delta U_{BB} = \frac{h^3}{24} \iint_{SM_0} E^{efgh} \Delta \varepsilon_{Bef} \Delta \varepsilon_{Bgh} dx dy \quad (35)$$

$$\Delta U_{SH} = \frac{1}{2} \iint_{SM_0} N^{ef} \Delta \varepsilon_{Hef} dx dy \quad (36)$$

$$\Delta U_{MP} = \frac{h}{2} \iint_{SM_0} E^{efgh} \Delta \varepsilon_{Mef} \Delta \varepsilon_{Mgh}^p dx dy \quad (37)$$

$$\Delta U_{BP} = \frac{h^3}{24} \iint_{SM_0} E^{efgh} \Delta \varepsilon_{Bef} \Delta \varepsilon_{Bgh}^p dx dy \quad (38)$$

$$\text{ここで} \quad N^{ef} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^{ef} dz, \quad \Delta \varepsilon_{Bef}^p = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} z \Delta \varepsilon_{ef}^p dz \quad (39), (40)$$

さらに

$$\Delta W_U = \int_{CF_0} \Delta N^e \Delta u_e ds \quad (41)$$

$$\Delta W_B = \iint_{S_{M_0}} \bar{\Delta p} \Delta w dx dy \quad (42)$$

(28)式を使つて, (33)式をさらに展開すると,

$$\begin{aligned} \Pi = & \Delta U_{UU} + \Delta U_{GG} + 2 \Delta U_{UG} + 2 \Delta U_{UH} + 2 \Delta U_{SH} \\ & - 2 \Delta U_{UP} - 2 \Delta U_{GP} - 2 \Delta U_{HP} - 2 \Delta U_{BP} - \Delta W_U - \Delta W_B \end{aligned} \quad (43)$$

ここで高次項 ΔU_{HH} , ΔU_{GH} は省略している。さらに(23)式を考慮に入れて,

$$\Delta \epsilon_{ef}^0 = \frac{1}{2} (\Delta u_{e,f}^0 + \Delta u_{f,e}^0) \quad (44)$$

$$\Delta \epsilon_{ef}^I = \frac{1}{2} (\Delta u_{e,f}^I + \Delta u_{f,e}^I) \quad (45)$$

$$\Delta \epsilon_{ef}^{II} = \frac{1}{2} (\Delta u_{e,f}^{II} + \Delta u_{f,e}^{II}) \quad (46)$$

と置き, $\Delta C_{[m]}$ で(26)式を整理すると, 最終的に次の連立1次方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_n \{ & 4 U_{0H}^{[m,n]} + 4 U_{0G}^{[m,n]} + (U_{IG}^{[m,n]} + U_{IG}^{[n,m]}) \\ & + 2 U_B^{[m,n]} + 4 U_{SH}^{[m,n]} - 4 U_{HP}^{[m,n]} - 4 U_{HP}^{[n,m]} - 2 W_H^{[m,n]} \} \Delta C_{[n]} \\ & + 2 U_{0I}^{[m]} + 2 U_{0G}^{[m]} - 2 U_{IP}^{[m]} - 2 U_{GP}^{[m]} - 2 U_{BP}^{[m]} - W_I^{[m]} - W_B^{[m]} = 0 \quad (m, n=1, 2, 3 \dots) \end{aligned} \quad (47)$$

ここで $[m, n]$ および $[m]$ は, 各エネルギー項, 外力仕事項の $\Delta C_{[m]}$, $\Delta C_{[n]}$ および $\Delta C_{[m]}$ の係数を意味し, さらに添字は (34)~(38) 式と同様に關係するひずみあるいは変位成分を表わす。

(47)式を解くことにより, $\Delta C_{[m]}$ が決定でき, さらに得られた $\Delta C_{[m]}$ を(16)式, (23)式に代入すると, 変位増分 Δu_e , Δw を求めることができる。(7)式より総ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{ef}$ も得られる。

Fig. 3 Flow Chart for Determination of Δu_e , Δw

以上の各 step における変位増分を求める過程を示したのが, Fig. 3 である。A において Δw は未定係数 $\Delta C_{[m]}$ を含んで関数展開され, 面内平衡条件のみを考慮すると, B のように Δu_e も $\Delta C_{[m]}$ の2次形式で表示できる。さらに C で基本のポテンシャル・エネルギー停留原理に立ち戻ると, 面外平衡条件をも満足する $\Delta C_{[m]}$ が決定され, Δu_e , Δw が求まることになる。

2.7 応力増分 $\Delta \sigma^{ef}$ および塑性歪増分 $\Delta \epsilon_{ef}^p$ の決定

次に得られた総ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{ef}$ から, 現荷重段階の応力増分 $\Delta \sigma^{ef}$ および塑性歪増分 $\Delta \epsilon_{ef}^p$ を求める。ここでは, 材料を弾性-完全塑性体とするが, ひずみ硬化材の場合もほとんど同様に計算の実行ができる。

von Mises の降伏条件式は次のように書ける。

$$f \equiv \frac{1}{3} \left((\sigma^{11})^2 - \sigma^{11} \sigma^{22} + (\sigma^{22})^2 + 3 (\sigma^{12})^2 \right) = \frac{1}{3} \sigma_s^2 \quad (48)$$

ここで σ_s は単純引張りの場合の降伏応力である。このとき $\Delta \sigma^{ef}$ および $\Delta \epsilon_{ef}^p$ は次のように得られる。

$$\Delta \sigma^{ef} = E^{ef} g^h \Delta \epsilon_{gh} - \beta \frac{3G}{\sigma_s^2} s^{gh} \Delta \epsilon_{gh} \cdot s^{ef} \quad (49)$$

$$\Delta \epsilon_{ef}^p = \beta \frac{3 s^{gh} \Delta \epsilon_{gh}}{2 \sigma_s^2} s^{ef} \quad (50)$$

ここで s^{ef} は偏差応力であり, β は次に示される。

$$\beta = \begin{cases} 1 \dots \dots \left(f = \frac{1}{3} \sigma_s^2 \text{ and } s^{ef} d\epsilon_{ef} \geq 0 \right) \\ 0 \dots \dots \left(f < \frac{1}{3} \sigma_s^2 \right) \text{ or } \left(f = \frac{1}{3} \sigma_s^2 \text{ and } s^{ef} d\epsilon_{ef} < 0 \right) \end{cases} \quad (51)$$

(49), (50)式は板の全領域で成立しなければならないが, 全領域に渡つて両式を使用すると, 演算は非常に煩雑になり, 実行不可能となるので, 次の仮定を行う。平面応力場の有限要素法は3角形要素を使用しているが,

Fig. 4 に示すように各要素内での塑性域の深さは一様とする。さらに各塑性域内の応力、応力増分、塑性ひずみ増分分布は、深さ方向に線形に変化し、同じ要素内では、同じ深さでの各分布値は同一であるとする。そして板の上、下面および弾塑性境界における応力値あるいは塑性ひずみ値は(49)、(50)式の厳密式から計算し、この値を基に上記仮定に従って分布は決定される。塑性域の板厚方向の深さは、各要素毎(48)式および(51)式の unloading を考慮して求められる。また以上全ての計算は、各要素毎の重心点における応力分布、総ひずみ分布に基づいてなされる。

Fig. 4 Assumed Element Plastic Zone and Distribution of σ^{ef} , $\Delta\sigma^{ef}$, $\Delta\epsilon^{ef}$

3 解 析 例

前節までに述べた解法に従い、計算プログラムを作成した。これを用いて周辺単純支持の正方形板を中心として (i) 一様横圧を受ける問題、(ii) 面内圧縮問題の数値解析を行なった。

特に塑性座屈問題に関しては、板厚および初期たわみ量の変化により、どのように挙動が異なるかは大いに興味がかれる問題である。この問題については、併せて実験も行い、測定された初期たわみ量を計算に代入することにより、解析結果と実験結果は、荷重の偏心の存在を考慮に入れるとき、良好な一致を示した。

なお、この解析法においては、(16)式の横たわみ増分の関数展開が、比較的少数項によつて実際の横たわみを表現しうならば、板の形状および境界条件は任意でよいことは明らかである。ここで解析を正方形板と有孔正方形板に限定したのは、従来からの解の存在と、その実用上の重要性による。

3.1 一様横圧を受ける正方形板

周辺で単純支持され、面内変位が拘束されている正方形板が、一様分布横荷重を受ける問題を解く。平面応力場問題を解くのに際し、Fig. 5 のように板の 1/4 を 50 要素分割をする。横たわみ増分 Δw は次式のように 4 項近似を行う。

$$\begin{aligned} \Delta w = & \Delta C_{[1]} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} + \Delta C_{[2]} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{a} \\ & + \Delta C_{[3]} \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{a} + \Delta C_{[4]} \cos \frac{3\pi x}{a} \cos \frac{3\pi y}{a} \end{aligned} \quad (52)$$

解析結果のうち、横分布荷重-最大たわみ曲線を Fig. 6 に示す。この種の問題において、微小変形理論が成立するのは、横たわみが極く小さい場合に限定されていることが知られている。特に塑性変形を考慮するとき、さらに違いは著しくなる。微小変形理論によると、横分布荷重が $\bar{p} = 6\sigma_s(h/a)^2$ 近傍になると、急激に横たわみは増す結果を得る。ところが有限変形を考慮すると、いわゆる塑性膜状態となり、横圧とたわみはほぼ比例してくる結果を得る。

Fig. 5 50 Element Idealization for Analysis of Inplane Displacement (1/4 Plate)

Fig. 6 Lateral Load-Def. Curve

3.2 面内圧縮荷重を受ける正方形板および有孔正方形板

次に周辺単純支持の正方形板が荷重辺が一様面内変位で、一軸方向に圧縮される問題の解析を行う。荷重辺以外の側辺においては、面内変位は拘束されないものとする。

横たわみ関数展開および要素分割は(3-1)の横圧問題と同じである。材料は軟鋼材を想定し、この程度の変形ではひずみ硬化はないと考えるので、解析においては最高荷重が降伏荷重を超えることはない。さて(a)同じ正方形板で板厚が変わるとどのように挙動が異なるか、(b)初期たわみによつて最高荷重がどの程度減少するか、(c)その減少する理由は何か等、いくつかの興味を引く問題があるが、これらの解析結果を示す。正方形板はヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、降伏応力 $\sigma_s=35 \text{ kg/mm}^2$ とし、1辺の長さ a と板厚 h の比 h/a は次の4例について初期たわみを種々に変えて計算を行なつた。

① $h/a=0.01$, $p_E/\sigma_s=0.217$ (Fig. 7) ② $h/a=0.015$, $p_E/\sigma_s=0.488$ (Fig. 8)

③ $h/a=0.02$, $p_E/\sigma_s=0.868$ (Fig. 9) ④ $h/a=0.04$, $p_E/\sigma_s=3.47$ (Fig. 10)

ここで p_E は弾性座屈応力である。結果は各々()内の図に平均応力-最大たわみ曲線図を示す。平均応力とは圧縮荷重を断面積で除した値である。各場合の現象は次のように説明することができる。

- ① $h/a=0.01$ の場合、弾性座屈現象が生じ、大きくたわんだ後に塑性変形が生じ、最高荷重に達する。
 ② $h/a=0.015$ の場合、①と同様に弾性座屈後に塑性変形が生じるが、①より最高荷重は弾性座屈荷重に近い

Fig. 7 Load-Def. Curve of Square Plate under Edge Compression
 ($p_E/\sigma_s=0.217$)

Fig. 8 Load-Def. Curve of Square Plate under Edge Compression
 ($p_E/\sigma_s=0.488$)

Fig. 9 Load-Def. Curve of Square Plate under Edge Compression
 ($p_E/\sigma_s=0.868$)

Fig. 10 Load-Def. Curve of Square Plate under Edge Compression
 ($p_E/\sigma_s=3.47$)

Fig. 11 Ultimate Load vs. Initial Def.
($P_E/\sigma_s = 3.47$)

Fig. 12 Surface Stress Distribution at the Center of Plate

値である。

③ $h/a=0.02$ の場合、弾性座屈現象が始まると同時に塑性変形が生じる。また、初期たわみが比較的小きくても、最高荷重は弾性座屈荷重を超えることができない。ただし、初期たわみが 0 のときは板厚によらず最高荷重は降伏荷重になることは当然である。

④ $h/a=0.04$ の場合、典型的な塑性座屈現象が現われ、横たわみがほとんど生じることなしに、最高荷重に達する。

$h/a=0.04$ について、初期たわみによつて、最高荷重がどのように低下するかを、Fig. 11 に示す。この場合の最高荷重の減少する理由を考えてみる。Fig. 12 に $h/a=0.04$ の場合の、正方形板の中央における上、下面の、圧縮方向の応力 σ^{11} とその直角方向の応力 σ^{22} の変化の様子を示す。純粋圧縮状態では、圧縮方向成分の応力 σ^{11} のみが分布しており、 σ^{22} , σ^{12} は 0 である。 $w_{\max}^{(0)}/h=0.05$ の場合、確かに σ^{22} は微小であり、板両面同様に降伏曲面に達し、両面の σ^{11} の平均は、ほぼ $-\sigma_s$ であることが図よりわかる。しかし、初期たわみが増大するにつれて、 σ^{22} が相対的に大きくなってきて、 σ^{11} の平均の絶対値が σ_s より小さくなるのがわかる。 $w_{\max}^{(0)}/h=0.5$ 以上においては、圧縮されている、凸側では引張り応力が生じている。以上のような最高荷重減少の理由説明はすでに山本²⁾によつて行なわれている。

Fig. 13 に板厚および初期たわみによつて、最高平均応力がどのように変化するかを示す。この図によれば次のようなことが言える。板厚が厚く $\sqrt{\frac{\sigma_s}{E} \cdot \frac{a}{h}}$ が約 1.9 以下であるとき、初期たわみが小さいほど最高応力は降伏応力値に近づく。 $\sqrt{\frac{\sigma_s}{E} \cdot \frac{a}{h}}$ が 1.9 から 2.1 程度までは、最高応力はただだか弾性座屈応力値であると言えよう。2.1 程度以上であるなら、板は弾性座屈をしたあと、塑性変形し最高応力値に達する。板厚が薄くなると、最高応力値は板厚、つまり弾性座屈値によつては大きな影響を受けないと言える。また、初期たわみが大きいほど、板厚による最高応力値の変動は小さい。

Fig. 13 Ultimate Mean Stress vs. Thickness Curve

以上の解析結果を確かめるために、1 辺の長さ $a=580$ mm の正方形板の圧縮実験を行なつた。板厚は 6 mm, 9 mm, 12 mm の 3 種類であり、各板厚について初期たわみを種々に変えた。工作上自然に生じる初期たわみ以外、焼き入れ、焼き戻しによつて強制的にも与えた。その 1 例、6 mm 板の最大初期たわみ $1.1h$ を有する場合の解析・実験結果の荷重-最大たわみ曲線を Fig. 14 に示す。この例は偏心荷重等の影響が大きく現われず、比較的成功的な実験例と言える。

Fig. 14 Load-Def. Curve of Square Plate under Edge Compression
($p_E/\sigma_s = 0.348$)

最後に周辺支持された有孔正方形板が、一軸方向に荷重一様面内変位で圧縮される問題を考えよう。Fig. 15に示すように面内変位を求めるときの有限要素分割は板の1/4に対して68要素である。 Δw の関数表示は、孔が小さいとして、孔の無い場合の(52)式を使用している。Fig. 16に荷重-最大たわみ曲線を示す。塑性変形を考慮した解析曲線を実線で、弾性変形のみを考えた解析曲線を2点鎖線で示す。実験は580 mm × 580 mm × 12 mmの軟鋼鉄板で行なつたが、その結果も併せ載せている。図中の弾性座屈値は著者等が文献5において求めた計算結果である。この例においても、最高荷重は弾性座屈荷重とほぼ等しいことがわかる。

Fig. 15 68 Element Idealization for Analysis of Perforated Plate (1/4 Plate)

Fig. 16 Load-Def. Curve of Perforated Plate

4 結 論

塑性変形を考慮した平板の大たわみ問題に対する解法を提示し、圧縮強度問題を中心に解析した。解法は塑性解析に対して〈初期ひずみ法〉を適用し、変分原理に基づいて、横たわみに適合する面内変位を平面応力場の有限要素法を用いて求め、さらに横たわみは〈Rayleigh-Ritz〉法によつて解析した。この解法の利点は、計算時間の短縮を可能にすることであり、上記問題においては、各荷重 step に要する時間は約5秒である(HIITAC 5020 E)。

なお、計算精度は(a)荷重増分法、(b)塑性解析の初期ひずみ法、(c)面内変位解を求める有限要素法、(d)横たわみの関数展開などその解法上誤差の入る余地が多いが、従来の弾性大たわみ問題と比較するとき、満足すべき精度が得られていると思う。ただし、長方形板の弾性変形問題を解析する場合等では、従来のairyの応力関数を導入して求める方法が(a)および(c)の誤差を含まないので、精度はよい。

最後に、本論文を書くにあたり、ご指導・ご援助をいただきました東京大学、山本善之教授、藤田譲教授に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 山本善之：“初期撓みを有する柱と板の塑性変形を伴う座屈”，造船協会論文集97号，昭和30年
- 2) 山本善之：“A General Theory of Plastic Buckling of Plate”，造船協会論文集96号，昭和29年
- 3) E. T. Onat & D. C. Drucker：“In elastic Instability and Incremental Theories of Plasticity”，J. Aeronautical Science, Vol. 20, No. 5, March, 1953
- 4) 川井忠彦，大坪英臣：“平板の幾何学的非線形問題の一解法 (I)”，造船学会論文集126号，昭和44年
- 5) T. Kawai, H. Ohtsubo：“A Method of Solution on the Complicated Buckling Problems of Elastic Plates with Combined Use of Rayleigh-Ritz's Procedure and Finite Element Method” 2nd Conf. on the Matrix Methods, Dayton, Ohio, U. S. A. 1968