(昭和 46 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

有限要素法による異方性板の熱弾塑性解析

—溶接応力の解析—

正員 岩 城 嵩* 正員 増 淵 興 一**

Thermo-elasto-plastic Analysis of Orthotropic plate by the Finite Element Method

—Welding Stress Analysis—

by Takashi Iwaki, *Member* Koichi Masubuchi, *Member*

Summary

The recent development of the finite element method has been giving a favor to analysis of complex subjects in structural engineering.

In this paper, the method is applied to analyze the stress and strain history during welding as the thermo-elasto-plastic problem of bilinear strain hardening orthotropic plate.

Though the plate has not only in-plane but also out-of-plane rigidities, the latter is neglected in this study because of the secondary importance in most welding problems.

The approach in this problem is based on the Mises yield criterion and the Prandtl-Reuss flow rule in conjunction with anisotropic parameters of elasticity and plasticity.

As a basic example of the application, the history of deformations and stresses under welding are analyzed in case of a rectangular plate.

The results indicate qualitatively the usefulness of the method.

1 ま え が き

船殻には、その建造過程において、溶接、熱塑性加工等、熱外力による、残留応力、永久変形が生じているが、その発生の機構を、力学的な観点から熱弾塑性解析を行うことによつて、加工時の最適プロセスを見出すとか、残留応力等を定量的に求めることは、重要なことと考えられる。

特に溶接中の応力変形に関する研究は、溶接残留応力、残留変形による構造強度の低下、溶接割れおよびミスマッチング等の問題に対処すべく、実験的、理論的な研究¹⁾が多くなされてきた。従来のこれらの問題に関する理論的解析法として、固有応力問題として取扱う方法²⁾、全歪論、歪増分論による一次元的な解析方法³⁾、又最近では、等方性体とした有限要素法による二次元熱弾塑性解析^{4),5)}があげられる。本文でも、平板の溶接時最も重要な因子である面内応力、変形について有限要素法によつて解析した。溶接応力のような比較的大きい塑性変形を問題にする場合、弾性域では等方性とみなせ得たものでも、塑性域では異方性を考慮しなくてはならない(選択方位による異方性)場合が、特に冷間圧延された鋼板等を対象とする場合表われる。ここでは、この効果を忠実に表現できるよう弾性域、塑性域とも統一的に直交異方性体として取扱った。なお塑性領域の要素には Von Mises の降伏条件、Reuss の構成方程式に従うものとした。なお、本文では材料定数の温度依存性は考慮しなかつた。

応力解析の外力となる温度分布の計算には、従来よく用いられている定速移動熱源の場合の理論解を用いた。解析例として、矩形板の中央を溶接した場合について、等方性体とした時との比較を、応力、変形の時間的变化

* 三井造船(株)玉野研究所

** マサチューセッツ工科大学(米国)

および残留応力について検討した。

2 熱伝導解析

溶接時の温度分布は、溶接施工法、その条件、物体の形状、周囲条件、材料定数の温度依存性等に関連しており、厳密な温度分布を求めるには、その前提条件となる多くの未解決な問題を残しているが、ここでは、これらの問題に言及することをさけて、従来溶接時の熱伝導解析に使用されている板表面からの熱放散を無視した無限平板上を点熱源が定速で移動する場合の、(1)式で示される理論解²⁾を用いた。

$$T(\xi, y) = \frac{q}{2\pi\lambda} \exp\left(-\frac{v}{2\kappa} \xi\right) K_0\left(\frac{v}{2\kappa} r\right) \quad (1)$$

ここで、 $T(\xi, y)$: ξ, y 点の温度

ξ : 移動座標系 $\xi = x + vt$

x, y : 直交座標系

q : 点熱源の流入熱量

κ : 温度伝導率 $= \lambda / c\gamma$

λ, c, γ : 熱伝導度, 比熱, 比重

v : 熱源移動速度

$r = \sqrt{\xi^2 + y^2}$

K_0 : 0 次第 2 種変形ベッセル関数

(1)式で、熱源の位置 ($r=0$) では温度が無限大になつていゝが実験的な見地から、溶解温度以上の領域の温度は溶解温度にするような補正をした。又流入熱量は、溶接条件との関連から、電圧、電流、効率の項で表現した。

3 直交異方性板の熱弾塑性解析

外力となる、時々刻々の温度分布が、2章で述べたように与えられた場合、それによる応力、変形の応答を求めるために面内剛性のみを有する直交異方性板の熱弾塑性解析を有限要素法で取扱う際の問題点を以下に検討する。

3-1 直交異方性板の応力-歪マトリックス

1章で述べたように、塑性域の諸定数のみならず、弾性域の定数に対して直交異方性体として考えた。なお、異方性主軸は、系の座標系 (x, y) に一致するものとする。

平面応力問題における、Hill の異方性パラメーターを $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{44}$ とし、Mises の降伏条件を、塑性ポテンシャルとすると

$$2f = 2\bar{\sigma}^2 = A_{11}\sigma_x^2 - 2A_{12}\sigma_x\sigma_y + A_{22}\sigma_y^2 + 3A_{44}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yx}^2) \quad (2)$$

又、Reuss の構成方程式により、

$$d\varepsilon_x^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\lambda = (A_{11}\sigma_x - A_{12}\sigma_y) d\lambda$$

$$d\varepsilon_y^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\lambda = (-A_{12}\sigma_x + A_{22}\sigma_y) d\lambda$$

$$d\gamma_{xy}^p = 2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{xy}} d\lambda = 6A_{44} \tau_{xy} d\lambda$$

塑性仕事の増分 dW_p は次式で示される。

$$dW_p = \sigma_x d\varepsilon_x^p + \sigma_y d\varepsilon_y^p + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^p \quad (4)$$

(3)式を用いて変形すると

$$dW_p = [A_{11}\sigma_x^2 - 2A_{12}\sigma_x\sigma_y + A_{22}\sigma_y^2 + 6A_{44}\tau_{xy}^2] d\lambda = 2\bar{\sigma}^2 d\lambda$$

又定義から

$$dW_p = \bar{\sigma} d\varepsilon^p$$

従つて

$$d\lambda = \frac{d\varepsilon^p}{2\bar{\sigma}} \quad (5)$$

又(2)式を全微分して整理すると

$$d\bar{\sigma} = H^T d\sigma \quad (6)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{H}^T &= \left[\frac{1}{\bar{\sigma}} \left(-\frac{A_{11}}{2} \sigma_x - \frac{A_{12}}{2} \sigma_y \right), \frac{1}{\bar{\sigma}} \left(-\frac{A_{12}}{2} \sigma_x + \frac{A_{22}}{2} \sigma_y \right), \frac{3}{\bar{\sigma}} A_{44} \tau_{xy} \right] \\ d\tilde{\sigma} &= \{d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_{xy}\} \end{aligned}$$

歪硬化率 E_p を次式のように定義すると

$$E_p = \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}_p} \quad (7)$$

従つて

$$d\bar{\varepsilon}_p = \frac{d\bar{\sigma}}{E_p} = \frac{1}{E_p} \tilde{H}^T d\tilde{\sigma} \quad (8)$$

(5), (8)式を(3)式へ代入し, 又異方性を x 軸基準で考えると,

$$d\tilde{\varepsilon}^p = \tilde{D}_p^{-1} c d\sigma \quad (9)$$

ここで

$$\begin{aligned} d\tilde{\varepsilon}^p &= \{\varepsilon_{xx}^p, \varepsilon_{yy}^p, \gamma_{xy}^p\} \\ \tilde{D}_p^{-1} &= \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{2}, & -\frac{A_{12}}{2}, & 0 \\ -\frac{A_{12}}{2}, & \frac{A_{22}}{2}, & 0 \\ 0, & 0, & 3A_{44} \end{pmatrix} \\ c &= \frac{1}{E_{px} \bar{\sigma}^2} \begin{bmatrix} (A_{11} \sigma_x - A_{12} \sigma_y) \sigma_x / 2, & (-A_{12} \sigma_x + A_{22} \sigma_y) \sigma_x / 2, & 3A_{44} \tau_{xy} \sigma_x \\ (A_{11} \sigma_x - A_{12} \sigma_y) \sigma_y / 2, & (-A_{12} \sigma_x + A_{22} \sigma_y) \sigma_y / 2, & 3A_{44} \tau_{xy} \sigma_y \\ (A_{11} \sigma_x - A_{12} \sigma_y) \tau_{xy} / 2, & (-A_{12} \sigma_x + A_{22} \sigma_y) \tau_{xy} / 2, & 3A_{44} \tau_{xy}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

E_{px} : x 方向の歪硬化率

弾性域に対しては,

$$d\tilde{\varepsilon}^e = \tilde{D}_e^{-1} d\sigma \quad (10)$$

ここで

$$\tilde{D}_e^{-1} = \begin{bmatrix} 1/E_x, & -\nu_{xy}/E_y, & 0 \\ -\nu_{xy}/E_x, & 1/E_y, & 0 \\ 0, & 0, & 1/G \end{bmatrix}$$

従つて全歪と応力の増分量の関係は, (9), (10)式を用いて,

$$d\tilde{\varepsilon} = d\tilde{\varepsilon}^e + d\tilde{\varepsilon}^p = \tilde{D}_e^{-1} d\sigma + (\tilde{D}_e^{-1} + \tilde{D}_p^{-1}) d\sigma \quad (11)$$

$\tilde{D}_e$ マトリックスは, 山田らが導いた式⁸⁾と等価な形で表現できるがここでは省略する。

直交異方性パラメータ A_{11} , A_{12} , A_{22} , A_{44} は降伏点の異方性のみならず, 歪硬化率の異方性にも依存するものである。初期異方性パラメータを A_{11}° , A_{12}° , A_{22}° , A_{44}° として x 方向基準に異方性を考えると,

$$\begin{aligned} A_{11}^\circ &= \frac{2\bar{\sigma}_0^2}{\sigma_{0x}^2} = \frac{\sigma_{0x}^2}{\sigma_{0x}^2} \equiv 2 \\ A_{22}^\circ &= 2 \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_{0y}} \right)^2 \\ A_{44}^\circ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\tau_{0xy}} \right)^2 \\ A_{12}^\circ &= 1 + \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\sigma_{0y}} \right)^2 + \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\tau_{0xy}} \right)^2 - \left(\frac{2\bar{\sigma}_0}{\sigma_{045}} \right)^2 \end{aligned} \quad (12)$$

ここで, σ_{0x} , σ_{0y} , σ_{045} , τ_{0xy} はそれぞれ x 方向, y 方向, 45° 方向の引張降伏点, 剪断降伏点である。

歪硬化域に入つた要素に対しては, 歪硬化率の異方性も考えると⁶⁾,

$$\begin{aligned} A_{11} &= 2.0 \\ A_{22} &= \frac{2\bar{\sigma}^2}{\frac{E_{py}}{E_{px}} (\bar{\sigma} - \sigma_{0x}^2) + \sigma_{0y}^2} \end{aligned} \quad (13)$$

$$A_{44} = \frac{\bar{\sigma}^2}{3 \left[\frac{G_p}{E_{px}} (\bar{\sigma}^2 - \sigma_{0x}^2) + \tau_{0xy}^2 \right]}$$

$$A_{12} = 1 + \frac{A_{22}}{2} + 3A_{44} - \frac{4\bar{\sigma}^2}{\frac{E_{p45}}{E_{px}} (\bar{\sigma}^2 - \sigma_{0x}^2) + \sigma_{045}^2}$$

ここで、 E_{px} 、 E_{py} 、 E_{p45} 、および G_p は x 、 y 、 45° 方向の引張り試験時の歪硬化率および、剪断試験の歪硬化率である。

等方性の場合、異方性パラメータは次のようになる。

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{22} = 2.0 \\ A_{12} &= A_{44} = 1.0 \end{aligned} \quad (14)$$

3-2 要素特性

要素特性としては、図1に示す最も簡単な長方形要素を考え、(15)式に示す適合変位関数を用いる。

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \quad (15)$$

変位法による有限要素法の一般的な誘導に従って要素剛性マトリックス $\tilde{K}$ は(16)式で示される。

$$\tilde{K} = \int_A t B^T D B dA \quad (16)$$

ここで、

$$B = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & y, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & x \\ 0, & 0, & 1, & x, & 0, & 1, & 0, & y \end{bmatrix}$$

t : 要素の板厚

D : 弾性域に対しては(10)式で示す D_e

塑性域に対しては(11)式で示す D_t

図1 要素の形状

3.3 熱外力による等価節点力

熱膨張を等価な節点荷重に置きかえる手順は、通常の手法に従って、(18)式のように示される。

$$\tilde{dL}_t = t \cdot \tilde{c}^{-1T} \left(\int_A B^T dA \right) \tilde{D} \alpha dT \quad (18)$$

ここで

$$\begin{aligned} dL_t &= \{dF_{1x}, dF_{1y}, dF_{2x}, dF_{2y}, dF_{3x}, dF_{3y}, dF_{4x}, dF_{4y}\} \\ \tilde{c}^{-1} &= \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} ab, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ -b, & 0, & 0, & 0, & b, & 0, & 0, & 0 \\ -a, & 0, & a, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & -1, & 0, & -1, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & ab, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -b, & 0, & 0, & 0, & b, & 0, & 0 \\ 0, & -a, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & -1, & 0, & -1, & 0, & 1 \end{bmatrix} \\ \tilde{\alpha} &= \{\alpha, \alpha, 0\} \quad \alpha : \text{線膨張係数} \\ dT &: \text{要素の温度増分} \end{aligned}$$

α のベクトルの第3項が0であるのは、直交異方性の場合でも、熱膨張によつて剪断歪が生じないことによる。

移動熱源による弾塑性解析を行なう場合、一般外力のように比例荷重でなく、各増分に於て、要素の弾性から塑性、塑性域からの除荷、除荷域からの再降伏を常に判定しなければならない。

又熱荷重の場合は、(16)、(18)式から判るように、同一温度増分に対して、要素の状態が変ることによつて、剛性マトリックスも、荷重ベクトルも、同時に変化するので、増分区間において、解の安定性が悪く、過渡要素

の取扱い方が問題になる。

本論では、時間増分を任意に与えられるようにし、植田らが提案している手法⁷⁾を若干修正する方法を採用した。弾性から塑性への過渡要素に対しては、(11)式中の D_i マトリックス中の歪硬化率を補正しながら、1つの増分内で繰返し計算を行う。

即ち、ある時間で要素の相当応力が B 点にあり、弾性域にあつたこの要素が次の時間増分で C 点に到達したとすると、この補正法として、 B 点から塑性域に入つたとみなして、歪硬化率として、 E と E_p との中間の値 E_{p1} を用いて計算し、 C_1 点を求め順次計算を繰返して、 C_2 点 C_3 点を求め C_n 点が応力-歪曲線上に充分近づくまで繰返し計算を行つた。(図2参照)

図2 過渡要素の歪硬化率のとり方

又除荷の判定は $d\epsilon^p$ の符号により判定した。再降伏点は Isotropic な硬化則を採用した。

上述のように、時間増分法と、反復法を混用して解く場合、時間増分が大き過ぎると、反復回数を多くしても、収斂しないことがあり、適切な時間増分を定める方が、計算時間が短縮される。この理由から、プログラム上では、一増分間の最大繰返し数を指定して、この繰返し数で収斂しない場合は自動的に時間増分を小さくするようにした。

4 解 析 例

前述の解法に従つてプログラムを作成し、その解析例として、矩形板に溶接と対応する移動熱源を作用させた時の解析を、異方性体と等方性体について解析しその効果を検討し、又従来溶接解析に採用されている、移動熱源と等価とみなされる線熱源を負荷した場合について計算を行い、溶接中の変形の履歴、応力発生機構、残留応力、変形について検討した。

4-1 計算条件

125×150×6 の板を図3に示すように分割して、板の中央を溶接する場合について計算した。

計算条件を次に示す。(表1参照)

ケースA：2次元温度分布を用い、材料は異方性を考える。

ケースB：2次元温度分布を用い、材料は等方性を考える。

図3 分割図

表1 計算条件

	ケース A	ケース B	ケース C
材 料 定 数	$E_x=7,030 \text{ kg/mm}^2$	$E_x=E_y=7,030 \text{ kg/mm}^2$	ケース B と同一
	$E_y=3,515 \text{ "}$	$G=2,700 \text{ "}$	
	$G=2,700 \text{ "}$	$\nu=0.3$	
	$\nu_{xy}=0.3$	$E_{px}=E_{py}=E_{p45}=420 \text{ "}$	
	$E_{px}=420 \text{ "}$	$G_p=140 \text{ "}$	
	$E_{py}=280 \text{ "}$	$Y_x=Y_y=Y_{45}=7 \text{ "}$	
	$E_{p45}=350 \text{ "}$	$Y_{xy}=4.1 \text{ "}$	
	$G_p=140 \text{ "}$		
	$Y_x=7 \text{ "}$		
	$Y_y=5.6 \text{ "}$		
溶 接 条 件	$\alpha=2.25 \text{ }^\circ\text{C}$	ケース A と同一	ケース A と同一
	$\lambda=38 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$		
	$c=0.22 \text{ kcal/kg}^\circ\text{C}$		
	$\rho=2,700 \text{ kg/m}^3$		
	$V=15 \text{ volt}$ $i=300 \text{ Amp}$ $eff=60\%$ $v=13 \text{ mm/sec}$		
備考	移動熱源	ケース A と同一	線熱源

ケースC：1次元温度分布を用い，材料は等方性を考える。

なお又ケースCの1次元温度分布は， y ＝一定の要素は，全時間に対して同一とみなしたものである。

4.2 計算結果とその考察

図4に要素番号④，⑤，⑥の温度履歴を示す。要素の寸法が大きいため，要素平均温度は低いものになっている。この温度分布は，(1)式で示した解析解を用いているので，他の要素の温度履歴もこれを平行移動することによって求められる。例えば要素番号⑬の温度は，要素番号④の温度を6秒遅らせることによって求められる。

図4 要素4, 5, 6の温度履歴

図5 温度分布図

図6(a)~(e) 溶接中の変形の履歴

要素番号④, ⑤, ⑥の最大温度到達時間には時間遅れがあり, 各瞬間の温度分布は, 図5に示すような前面に鋭い絶壁をもち, 後方に緩かな丘陵をもつ形となつている。熱放散は, 熱伝導のみによるとしているが, 実際は, 板表面からの対流伝達によるものも無視できないと思われるから全体により急斜面をもつ温度分布となる。

図6(a)~(e)に, ケースAの溶接中の変形の履歴を示す。なおケースBもほぼ同一の結果である。

溶接トーチが板中央部に到達するまでは, 板の左半分は大きな膨張をして, 右半分の部分を裂こうとしており溶接トーチが右半分の領域に進んだ状態では, 左半分の部分も余熱があり, この部分には熱源部の局部高温に基づく裂こうとする力が作用していないことがわかる。この余熱の効果によつて後述する残留応力の一様性がみられたと思われる。

図7(a), (b)に要素番号④, ⑤, ⑥の応力履歴を, ケースA, Bについて示している。

図 7(a) 要素 4, 5, 6 の x 方向応力履歴

図 7(b) 要素 4, 5, 6 の y 方向応力履歴

図 8(a) 要素 10, 11, 12 の x 方向応力履歴 図 8(b) 要素 10, 11, 12 の y 方向応力履歴

ケースBについては、3.6 秒後（熱源位置が板の左端にある時を 0 秒としている）に、要素④、⑤はそれぞれ、 x 方向の圧縮応力、 y 方向の引張応力成分が支配的な役割をして降伏している。要素④は 4.8 秒後に、要素⑤は 4.4 秒後に除荷が開始し、時間が経るに従って除荷が進行して最終的に、最高温度時圧縮降伏した要素は引張残留応力最高温度時引張降伏した要素は圧縮残留応力が発生している。

ケースAについては、3.6 秒後に、要素④は、 x 方向の圧縮応力成分が支配的な役割をして降伏し、4.8 秒後に除荷が開始しているが、要素⑤は、弾性係数が半減したことが原因して、降伏が現われていない。ケースBと比較して、 x 方向応力の履歴はほぼ同一だが、 y 方向応力のレベルは弾性係数がケースAの 1/2 であることから、全履歴を通じて小さい値になっていることがわかる。

図 8(a), (b) に要素番号⑩、⑪、⑫の応力履歴を、ケースA、Bについて示している。

ケースBについては、要素⑩は 7 秒後に熱源が到達し、約 9 秒後に最高温度になるが、要素④の場合と比較し

て最も異なる点は、5.2～5.8 秒の間で、引張の y 方向応力成分で降伏していることである。この時間では、熱源は要素⑦の位置にあり、最高温度点は要素④の位置であるが、これらの高温部による膨張効果によつて、要素⑩の部分に、 y 方向に裂こうとする力が作用して降伏したものと考えられる。要素⑩が最高温度に達した 7.2～8.4 秒の間では、要素④の場合と同様に、圧縮の x 方向応力成分で再度降伏している。

ケース A についても同様な応力履歴を経ているが、要素⑩が降伏したのは 7.2～8.4 秒の間のみである。

図 9 にケース B について、各要素の降伏-時間関係を示している。要素が大きいいため、要素間の規則性が若干欠ける点があるが、定性的には、図 7, 8 図で述べたことが全体について言える。

図 10(a)～(c) に、ケース A, B, C の残留 x 軸方向応力分布を示す。加熱時に圧縮応力であつた個所は引張の又引張応力であつた個所は圧縮応力の残留応力となつている。ケース A は、ケース B と比較して、絶体値は僅か小さい値で、全体の傾向は、左右非対称になつているが、その差は大きくない。ケース C は一次元温度分布で二次元応力解析を行つたものであるので、残留応力も左右対称になつている。ケース A, B と比較して、全体の分布形は滑らかになつているが、絶体値はあまり離れておらず、加熱時には比較ができない程の差が生じていたものが、残留応力ではあまり差のないことがわかる。

図 9 降伏要素-時間 (ケース B)

図 10(a)～(c) x 方向残留応力分布

図 11(a), (b) に, ケース A の残留 y 方向, および剪断応力分布を示す。 x 方向応力分布と比較して, 絶対値は小さく, 又左右の対称性がより保たれていることがわかる。

x, y 方向の残留応力分布は, 従来実測されている分布の傾向とよく一致しており, これらの図から, 溶接による固有歪が溶接線の中央部を頂点として分布していることが類推できる。

計算時の時間増分の数はいすケース A, B で 51, ケース C で 15 である。計算時間は IBM 360/M 65 を用いてケース A で 4 分, B で 3 分, C で 1 分であった。

5 あとがき

面内剛性のみを考慮した, 直交異方性板の熱弾塑性応力解析プログラムを作成し, 板の中央に, 溶接したことに対応する, 移動熱源を与えて, 等方性, 異方性体について数値実験を行い検討した結果, 従来行なわれている溶接中の歪履歴の実測結果, 残留応力分布の実測値と, 定性的により一致を示し, 本解法の有用性が一応確認された。なお詳細な確認実験は今後行う予定である。

数値計算例では, 弾性, 塑性の諸定数に異方性を与えて, 等方性の場合とそれらの結果の差を比較し異方性の及ぼす効果の大きいことが判った。

参 考 文 献

- 1) 例えば, K. Masubuchi: Control of Distortion and Shrinkage in Welding, WRC 149 (1970)
- 2) 渡辺, 佐藤: 溶接力学とその応用, 朝倉書店, 昭和 40 年, p. 142~158
- 3) 同上, p. 276
- 4) 田中, 井上: 負荷関数を用いた弾塑性熱応力の解析, JSSC, マトリックス構造解析, 論文集, 1971, p. 282
- 5) 上田, 山川: 有限要素法による熱弾塑性熱応力の解析, JSSC, マトリックス構造解析, 論文集, 1971, p. 290
- 6) B. Whang: Elastoplastic Analysis of orthotropic Plates and Shells, MIT Research Report R 68-83, 1968.
- 7) 植田, 井上, 平: 有限要素法による弾塑性熱応力の解析, JSSC, マトリックス構造解析, 論文集, 1969, p. 396.
- 8) 山田, 中桐, 横内: 異方性材料の応力-歪マトリックスとその応用, JSSC, マトリックス構造解析論文集 1969, p. 371.