(昭和 47 年 10 月日本造船学会秋季講演会において講演)

粒状体の弾性挙動に関する基礎的研究

正員 山 本 善 之* 正員 浦 環**
正員 松 原 典 宏* 正員 信 太 明 人***

Basic Study on Elastic Property of Granular Media

by Yoshiyuki Yamamoto, *Member* Tamaki Ura, *Member*
Norihiro Matsubara, *Member* Akito Shida, *Member*

Summary

Hitherto, the Coulomb theory based on the theory of rupture surface has been adopted to estimate the ore pressure in a hold of an ore carrier. It introduces an approximate method for determining the stability of foundations, walls and slopes. As is indicated by experimental studies, this theory is inadequate for the present purpose.

Granular media compacted in a closed space show the elastic property accompanied with well-known characteristics as the dilatancy, and the elastic behaviors should be taken into consideration for the estimation of ore pressure.

Since Boussinesq, several authors have suggested constitutive equations for granular media by modifying Hooke's law. But these equations cannot be derived from elastic potentials, so that they cannot describe elastic deformations of granular media.

In this paper, the authors propose a nonlinear constitutive equation which shows the dilatancy phenomena. By choosing coefficients adequately, this equation is in conformity with the results of the triaxial compression test in a wide range. On the basis of this constitutive equation, stress distributions can be calculated easily by the finite element method. An experiment was performed with granular media in a cylinder subjected to non-uniform axial compression and the pressure distributions can be predicted approximately by the elastic theory.

For the precise determination of behaviors of ore, the elastic-plastic theory should be introduced, and the present constitutive equation may easily be applied with the aid of the Drucker-Prager theory of plasticity.

1 はじめに

船倉内の鉱石圧推定のための理論としては、従来、近似塑性土圧理論である Coulomb 塑性土圧論¹⁾が用いられてきた²⁾。この理論は塑性迂りに基づくもので、鉱石の積込時の圧力については一応の理論的根拠がある。しかし、実船による計測結果の報告³⁾によって知られるように、鉱石圧は一般には Coulomb 主働圧を示さず、船体変形による鉱石圧の再分配⁴⁾が起こり、また船倉底摩擦力などにより大きく異なった値を示す。模型実験によると、積込時についても、水平方向の変形が拘束されている支材の基部では鉱石圧が高くなり、船倉底付近の隔壁の受ける圧力はかえて減少する。もし鉱石圧推定のための計算法として Coulomb 受働圧を用いるならば、鉱石圧の推定値は数倍にも大きくなり、実用的ではない。実際、船倉内の鉱石は一般に主働状態でもなく、受働状態でもない。その中間の状態、すなわち弾性状態あるいは弾塑性状態にある。その観点に立って鉱石圧を推定

* 東京大学工学部

** 東京大学工学部大学院

*** 石川島播磨重工業(株)相生工場

しなくては、実際の値とかけ離れた値を用いて強度計算が行われることになりかねない。

以上は鉱石の積込時などに船倉の壁面に生ずる鉱石圧に関して述べたのであるが、逆に支材の外圧などによる応答を考えると、鉱石が支材の基部付近の隔壁を通じて支材を支持する現象がある。このように鉱石倉近傍の構造を解析するには、構造物をその内部にある鉱石を含んだ系として扱わなければならない。その意味でも、鉱石の挙動を正確に把握することは極めて重要である。

さて、不連続体である粒状体（ここでは鉱石ペレット）の静的あるいは動的挙動を考えると、何らかの統計的手法を用いるか、あるいは、ある特性を備えた連続体に置き換えて議論を進めるのが便利である。前者は電子計算機の進歩により様々な手法が可能になったとはいうものの、取扱いの複雑さにより、現在その第一歩を踏み出したに過ぎない。後者も非線型であるその挙動を的確に表わす確立された理論がなく、必要に応じて適当な仮定を設けて議論が進められている。

粒状体の示す性質の1つに dilatancy 現象⁵⁾がある。これは剪断を加えると見掛けの体積が増大する現象である。この dilatancy 現象および壁面摩擦現象などが、いわゆる arch 現象をもたらし、鉱石圧の再分配を引き起こす一因となる。粒状体の連続体モデルにおける応力・ひずみ関係は剪断変形の増大に伴う体積増加、すなわち dilatancy 現象を表わすものでなくてはならない。特に船倉のように限られた空間内に閉じ込められた粒状体は、その性質を示し易いと考えられる。

粒状体を適当な連続体に置き換え弾性体として考える場合、弾性率およびポアソン比を適当に仮定した線型弾性体として取り扱う方法は最も簡単である。この方法では dilatancy 現象を表わし得ないので、船倉内の鉱石に適用するには十分とは言えない。Boussinesq は Hooke 型の応力・ひずみ関係において“弾性率は平均圧力に比例する”という仮説を立てた⁶⁾。

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -p(1-2m\epsilon_x) & \tau_{xy} &= m\dot{p}\dot{\gamma}_{xy} \\ \sigma_y &= -p(1-2m\epsilon_y) & \tau_{yz} &= m\dot{p}\dot{\gamma}_{yz} \\ \sigma_z &= -p(1-2m\epsilon_z) & \tau_{zx} &= m\dot{p}\dot{\gamma}_{zx}\end{aligned}$$

ここで、 p は平均圧力、 m は粒状体により定まる定数である。この関係式はフックの法則を変形し、ポアソン比を 0.5 とすることによって得られるものであるが、容易にわかる通りエネルギーを持たず、また書き直すと対称性を欠くなど適当でない。Huang^{7,8)} は Boussinesq の仮説を変形して

$$E = E_0(1 + m^*p)$$

として有限要素法による計算を試みている。ここで E は弾性率で、 $E_0 m^*$ が先の m に対応している。 E_0 は $p=0$ のときに E が零とならないようにするための最小弾性率である。この方法も Boussinesq の式の欠陥が除かれていない。

これに対し、筆者達は dilatancy 現象を示す非線型の弾性応力・ひずみ関係を提案し、粒状体を弾性体として考えるときの基礎理論を本論文に示す。

なお、ここで実験研究に使用した鉱石ペレットはいわゆるカイザー・ペレットである。

2 応力・ひずみ関係

ここでは σ_{ij} , ϵ_{ij} , s_{ij} , J_1 , J_2 をそれぞれ応力テンソル、ひずみテンソル、偏差応力テンソル、第一次応力不変量および第二次応力不変量とする。すなわち s_{ij} , J_1 , J_2 は次式で定義される。

$$J_1 = \sigma_{ii} \quad (1)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} J_1 \delta_{ij} \quad (2)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \quad (3)$$

ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタである。

一般にひずみ ϵ_{ij} は弾性ひずみ ϵ^e_{ij} 、塑性ひずみ ϵ^p_{ij} および締固めにより生ずるひずみ ϵ^c_{ij} に分けて考えられる。しかし、ここでは締固められた状態を基準にとって弾性理論を展開する。

したがって

$$\epsilon_{ij} = \epsilon^e_{ij} \quad (4)$$

と考える。また、粒状体においては平均応力が非負のときには粒子が離散することになるので、そのような状態

は存在し得ない。すなわち

$$J_1 < 0 \quad (5)$$

である。

応力・ひずみ関係を次式で定義する。

$$\varepsilon_{ij} = 2 C_1 J_1 \delta_{ij} + C_2 s_{ij} + 2 C_3 (s_{ij} - J_2/J_1 \delta_{ij}) J_2/J_1^2 \quad (6)$$

ここで C_1, C_2, C_3 は正の定数である。この応力・ひずみ関係は

$$U_c = C_1 J_1^2 + C_2 J_2 + C_3 (J_2/J_1)^2 \quad (7)$$

で表わされるコンプリメンタリ・エネルギーを持つ。逆に言えば、(7) 式で表わされるコンプリメンタリ・エネルギーを持つ非線型応力・ひずみ関係は (6) 式で表わされる。ここで次の点に注意しておく。(6) 式より導かれる応力増分・ひずみ増分関係の係数行列は $J_1 = 0$ でない限り正定値対称である(附録 1 参照)。

体積ひずみ $\Delta (= \varepsilon_{ii})$ は (6) 式より導かれて

$$\Delta = 6 C_1 J_1 - 6 C_3 J_2^2/J_1^3 \quad (8)$$

である。 $J_1 < 0$ である圧縮応力に対しては C_1 の項が体積減少を、 C_3 の項が体積増加を表わす。すなわち (6) 式において非線型項である第 3 項が dilatancy を表わす項になっている。線型項に関しては Hooke の法則と次のように対応している。(6) 式および (7) 式において非線型項の係数を $C_3 = 0$ とし、

$$C_1 = \frac{1-2\nu}{6E} = \frac{1}{18K} \quad (9)$$

$$C_2 = \frac{1+\nu}{E} = \frac{1}{2G} \quad (10)$$

とすれば、(6) 式および (7) 式は Hooke の法則を示している。ここで G は剛性率、 K は体積弾性率である。

なお、(6) 式のように定められた応力・ひずみ関係は、Drucker-Prager⁹⁾ の塑性理論を応用する際に都合が良いことに注意しておく。

上式に用いた C_1, C_2, C_3 の各定数は粒状体に関する三軸圧縮試験を行うことにより決定できる。この試験では Fig. 1 に示す装置を用いて、ゴムスリーブ内に充填された粒状体の供試体に一様水圧 p を加えて支持し、軸方向の圧縮応力 $(s+p)$ をひずみ制御により加え、軸方向の圧縮ひずみ e^* 、体積ひずみ Δ^* および圧縮応力 $(s+p)$ が計測される。ここで * が付してあるのは、一様水圧 p が加わった状態 ($s=0$) を原点としているからである。(6) 式および (8) 式にこの応力状態を代入して、 $s=0$ を原点に取れば、軸ひずみ e^* と体積ひずみ Δ^* は

$$e^* = -\varepsilon^*_{xx} = 2 C_1 s + \frac{2}{3} C_2 s + \frac{2}{9} C_3 \left(\frac{s}{s+3p} \right)^3 (s+6p) \quad (11)$$

Fig. 1 三軸圧縮試験装置

Fig. 2 三軸圧縮試験結果

Fig. 3 鉦石ペレットの粒径分布

Fig. 4 壁面摩擦実験装置

Fig. 5 壁面摩擦角

$$\Delta^* = -6 C_1 s + \frac{2}{3} C_3 \frac{s^4}{(s+3p)^3} \quad (12)$$

となる。

著者達が東京大学土木工学科で行った鉦石ペレットに関する三軸圧縮試験の結果により鉦石ペレットの C_1 , C_2 , C_3 を定めることができ、

$$C_1 = 0.03, \quad C_2 = 0.25, \quad C_3 = 1.5 \quad (13)$$

となる。三軸圧縮試験は $p = 0.5, 0.7, 1.0, 1.2, 1.5 \text{ kg/cm}^2$ について行ったが、本理論による結果と実験結果の比較を $p = 0.7 \text{ kg/cm}^2$ の場合について Fig. 2 に示す。 p の他の値に関しても同様の傾向を示す。ちなみに、同時に得られた鉦石ペレットの内部摩擦角は 44° である。なお、本論文において実験に使用したペレットの粒度分布は Fig. 3 に示されるように、平均粒径 11.03 mm 、標準偏差 1.41 mm である。これはペレット 250 個について調べたものである。また見掛けの比重 γ は、締め固めの程度状態により変化するが、 $\gamma = 2.2$ としている。

静止した状態の粒状体とその容器の間には Coulomb の静止摩擦法則が成り立っていないなければならない。壁面垂直圧縮応力を s 、剪断力を τ_H とすれば

$$|\tau_H| \leq s \tan \delta \quad (14)$$

である。 δ は静止摩擦角であり、粘着力はないものとする。すなわち、粒状体の境界条件の1つとして (14) 式があり、(14) 式の不等号が成立するときには壁に平行な変位 (沁り) はなく、(14) 式の等号が成り立つとき最大静止摩擦力が働いて変位 (沁り) が起こる。したがって、解析に際してこのような関係を考慮しなくてはならない。

Fig. 4 に示す角筒に鉦石ペレットをつめ、垂直力 N と最大静止摩擦力との関係を求める実験を行った。Fig. 5 を見て容易にわかるように、(14) 式が粒状体に関しても成立することが実証される。以下、鉦石ペレットの壁面摩擦角 δ を 23° 、摩擦係数 $\mu (= \tan \delta)$ を 0.42 として取り扱う。有限要素法を用いて計算するとき、摩擦力を考慮する方法を附録 2 に示す。

なお、 C_1, C_2, C_3 の各定数を決定する三軸圧縮試験結果には、ある程度バラツキがある。これは、粒径の大きな不連続体の持つ確率的な要素の原因もあるが、実験が小規模であったことにも由来する。使用した三軸圧縮試験機の機構上、供試体は直径 5 cm 、高さ 18 cm で、鉦石ペレットの平均粒径に対して十分の大きさがあるとは言えず、さらに大型の実験装置を用いての精密な実験を行う必要があろう。

3 実 験

圧縮実験 粒状体の弾性挙動を示すような基本的実験を行った。Fig. 6 に示すように、鉦石ペレットを内径 80 mm の円筒に深さ 76 mm つめ、底に土圧計を設置し、荷重をある範囲に上下して、繰返し加え、変位および底圧の計測を行った。応力・ひずみ関係を Fig. 7 に、荷重摩擦力比関係を Fig. 8 に示す。なお摩擦力比 η は荷重 P に対する摩擦力 F の比で、次式で定義される。

$$\eta = F/P = 1 - sA/P$$

ここで s は底部において土圧計より得られる平均鉦石圧、 A は筒の断面積である。

Fig. 6 圧縮実験装置

Fig.7 軸ひずみ

Fig.8 摩擦力

Fig.7 に見られるように、最初に荷重を加えたときのひずみは、第2回目以後に比べて十数倍もの大きな値を示している。これはランダムであった粒子の配列が、外力によってより安定な粒子配列へと締め固められたためである。第2回目以後はそのような締め固め現象がほとんど起こらないのも当然である。これに対して摩擦力は、Fig.8 に見られるように、荷重に対してはほぼ一定の値を示している。ここには第4回目以後の実験値の記入を省略してあるが、第2回目、第3回目とほとんど変わらない。載荷状態に比べて、除荷状態の摩擦力が小さく現われているのは、鉱石ペレットが伸長しようとするときに、摩擦力が荷重と同じ方向に働く部分があるからである。第1回目の載荷状態が他と異なる傾向を示すのも同様の理由による。このように一度大きな荷重がかかると、荷重が除去された後も、壁面における摩擦力のために、元の状態にもどらないという現象が起こる。この実験において、鉱石ペレット粒子が互いにすれあい、鉱石の粉末がかなりの量生じたことを付記しておく。このような鉱石の粉末が摩擦現象（内部摩擦現象、壁面摩擦現象）に対して、潤滑剤の効果を及ぼすのではないと思われる。

以上を総合して考えると、この実験のように、剛な壁面を持つ容器につめ込まれた粒状体の挙動は弾性的であると考えられる。

模型実験 鉱石船の支材基部の応力分布の特徴を知るための基礎実験を日本海事協会技術研究所において行った¹⁰⁾。これは理論解析との比較の便も考慮して、内径 89 cm の大型土槽を用い、その中に鉱石を入れ、上面から不均一圧縮を行った。Fig.9 に示されるように、槽底板に直径 10 cm の土圧計 21 個を槽の中心より 0, 12, 18, 24, 30, 36 cm の位置に埋め込み、鉱石ペレットをつめ、その上面に外径 89 cm の環状の厚い鋼板を置くことにより一定荷重を掛け、環状板の内径 32.5 cm にほとんど一致する円形の加圧板を環状板の内側にはめ込む。この加圧板をジャッキを用いて押し込み、各荷重段階毎の圧力分布を土圧計により、加圧板および環状板の変位をダイヤルゲージによりそれぞれ測定した。環状板重量 400 kg (平均圧縮応力 0.0742 kg/cm²) のとき、鉱石ペレット深さを 30 cm, 50 cm, 70 cm で荷重を 2 ton (平均圧縮応力 $s=2.41$ kg/cm²) 加えたときの底圧の分布を Fig.10 に示す。鉱石ペレット深さ 30 cm のとき、各荷重に対する次の値を Fig.11, Fig.12 に示す。

$$\epsilon_a = (\text{加圧板の変位}) / (\text{鉱石ペレット深さ})$$

$$\epsilon_b = (\text{環状板の上昇量}) / (\text{鉱石ペレット深さ})$$

この実験に際して遭遇した問題の一つに土圧計からの測定値の信頼性あるいは精度の問題がある。土圧計は受圧面が圧力により僅かに変位し、それをなんらかの方法により電気的に取り出すものである。土圧計の存在により、その近傍の応力分布が変化するばかりでなく、受圧面の変位および土圧計の局部的剛性の差により、土圧計の示す値が鉱石ペレットの圧力に対して信用のできないものになる場合があるということがNK技研の土圧計検定装置による予備実験

Fig.9 模型実験装置

Fig.10 鉱石圧分布

Fig. 11 加圧板の変位

Fig. 12 環状板の変位

Fig. 13 鉍石圧に対する土圧計の精度

によりわかった。Fig. 13 に示されるように荷重の履歴が異なると、土圧計は異なった値を示す可能性がある。すなわち、第一回目の載荷時以外は、その測定誤差は非常に大きいことになるので、土圧計を使用するときには、この点を十分に考慮しなくてはならない。これは土圧測定用に作られた土圧計を粒径の大きな鉍石ペレットに対して使用することに多少の無理があるためと思われる。なお模型実験では、第1回目の載荷時の値を信用できるものとして、実験毎に鉍石ペレットを土槽より出し、土圧計を往復荷重の加わった状態より無荷重の状態にもどしている。荷重は二往復加え、いずれかの土圧計が容量近くなるまで、あるいは塑性変形が大きくなり、それ以上荷重の加えられない状態までのいずれか小さい方を最大荷重としている。塑性変形でおさえられているときには、環状板の重量が増大すると、最大荷重は増加する傾向にあった。

Fig. 10 に見られるように、鉍石ペレット層が深くなるにつれて、中心部の圧力は減少し、その周囲の圧力は増大する傾向がある。深さ 70 cm では中心部の圧力がかなり小さな値を示している。これは arch 現象ではないかと思われる。

ここで、次の点に注意しておく。計測値は中心の値をのぞいて、4つの土圧計の値を平均したものである。この4つの各々の値はかなりのバラツキがあるのだが、粒状体としての性質や加圧板および環状板を正確に水平に設置できないことなどがその原因として考えられる。

この実験を実船での状態と対応させて考えれば、船倉幅の狭い場合と広い場合では、支材基部近傍における鉍石圧の分布状態および支材への反力にはかなりの相違があると考えられる。また、その際には支材基部の上下の隔壁の剛性が重大な影響を及ぼすものと考えられる。

4 理論解析

有限要素法を用いて粒状体内の応力分布を求めるためには、(6) 式を応力で微分して応力増分・ひずみ増分の線型関係に書き直し、逐次計算を行う方法がもっとも簡単である。(6) 式で応力テンソル、歪テンソルおよび偏差応力テンソルを物理量で表わし、ベクトルとして表現すると応力増分 $\Delta\sigma$ とひずみ増分 $\Delta\epsilon$ は

$$\Delta\sigma = \{\Delta\sigma_x, \Delta\sigma_y, \Delta\sigma_z, \Delta\tau_{xy}, \Delta\tau_{yz}, \Delta\tau_{zx}\}^T$$

$$\Delta\epsilon = \{\Delta\epsilon_x, \Delta\epsilon_y, \Delta\epsilon_z, \Delta\gamma_{xy}, \Delta\gamma_{yz}, \Delta\gamma_{zx}\}^T$$

である。ただし $\epsilon_x = \epsilon_{11}, \dots, \tau_{xy} = 2\epsilon_{12}, \dots, \sigma_x = \sigma_{11}, \dots, \tau_{xy} = \sigma_{12} = \sigma_{21}, \dots$ である。(6) 式より導かれる応力増分・ひずみ増分関係は係数行列 D を用いて

$$\Delta\epsilon = D^{-1}\Delta\sigma$$

と書け、 $\Delta\epsilon_x, \Delta\gamma_{xy}$ が具体的に

$$\begin{aligned} \Delta\epsilon_x = & \left[2C_1 - \frac{1}{3}C_2 + 2C_3 \left\{ 3(J_2/J_1^2)^2 - \frac{1}{3}J_2/J_1^2 - 2(J_2/J_1^3)s_x \right\} \right] \Delta J_1 \\ & + 2C_3[s_x/J_1^2 - 2J_2/J_1^3] \Delta J_2 + [C_2 + 2C_3(J_2/J_1^2)] \Delta\sigma_x \end{aligned}$$

$$\Delta\gamma_{xy} = -8C_3(J_2/J_1^3)\tau_{xy}\Delta J_1 + 4C_3(\tau_{xy}/J_1^2)\Delta J_2 + [2C_2 + 4C_3(J_2/J_1^2)]\Delta\tau_{xy}$$

であるので、これらの式より D^{-1} を具体的に求めることができる。ただし $s_x = s_{11}, \dots$ で $\Delta J_1, \Delta J_2$ は

$$\Delta J_1 = \Delta\sigma_x + \Delta\sigma_y + \Delta\sigma_z$$

$$\Delta J_2 = s_x \Delta \sigma_x + s_y \Delta \sigma_y + s_z \Delta \sigma_z + 2 \tau_{xy} \Delta \tau_{xy} + 2 \tau_{yz} \Delta \tau_{yz} + 2 \tau_{zx} \Delta \tau_{zx}$$

である。

計算に当っては $J_1=0$ とすることはできないので、初期応力状態を適当に定めなくてはならない。つめ込んだ状態では塑性状態にあるものとして、Rankine 塑性土圧論を用い、深さ y の垂直応力 σ_y 、水平応力 σ_x および σ_z は、 K_a を Rankine 主働土圧係数、 γ を粒状体の比重量として、

$$\sigma_y = -\gamma y$$

$$\sigma_x = \sigma_z = K_a \sigma_y$$

となる。 K_a は内部摩擦角 ϕ を用いて

$$K_a = \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right)$$

と表わせる。上式で定められる $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ を初期応力状態とし、この状態より逐次計算を行う。2 節で述べたように、鉱石ペレットの内部摩擦角は 44° であるから $K_a = 0.18$ となる。

先に述べたように、粒状体は一般には無張力 (no tension) 物質であり、 $J_1 < 0$ であることが原則である。物理的には $J_1 \geq 0$ となると破壊して自由表面が生ずる。この問題は塑性問題と同様に本論文では扱わないが、重要な問題である。有限要素法を用いて計算を行う際には、この点を考慮しなくてはならない。

本論文の計算例は、計算を簡単にするために平面ひずみ状態 ($\Delta \varepsilon_z = \Delta \gamma_{yz} = \Delta \gamma_{zx} = 0$) として解いた。 $C_1 = 0.03, C_2 = 0.25, C_3 = 1.5$ として模型実験と対応して鉱石ペレット深さ 30 cm および 70 cm の壁面における応力分布を Fig. 14 a, b に示す。計算によって arch 効果は十分導くことができなかったが実験と理論はおおむね一致した。

Fig. 14-a 解析結果 (平均圧縮応力 2.41 kg/cm^2) 鉱石圧深さ 30 cm

Fig. 14-b 解析結果 (平均圧縮応力 2.41 kg/cm^2) 鉱石深さ 70 cm

5 おわりに

Coulomb 塑性土圧論に代る鉱石圧分布を推定する手段として、弾性あるいは弾塑性解析が行われなくてはならない。そのための基礎理論として、鉱石ペレットのような粒状体の連続体非線型弾性モデルについて検討してきたが、得られた主な結論を次に列記する。

(1) 船倉内の鉱石圧分布を推定するには、Coulomb 塑性理論では必ずしも適当ではない。船倉近傍の構造との応答を考え、船倉内の鉱石を弾性体あるいは弾塑性体として取り扱わなくてはならない。

(2) 締め固められた粒状体の弾性体モデルを考えると、dilatancy 現象を示す非線型弾性モデルが用いられるべきで、(6)式の応力・ひずみ関係はこのような現象を良く表わす。また、逐次計算を行うことも容易である。

さらに今後に残される問題の主なもの

(1) 平均圧力の小さい範囲では塑性変形が起こり易い。また、剪断力が極端に大きくなるときは、弾性理論だけではカバーできないので、弾塑性理論を展開しなくてはならない。

(2) 計算過程で張力が生じた場合の処理はどうかされるべきか。新たに生じた自由表面を有限要素法で取り扱う方法。

などが挙げられる。これらの問題に関しては次の機会に報告したい。

謝 辞

本論文を書くに当り、模型実験に関して渋谷享所長、山口勇男室長、平岡善博氏をはじめとする日本海事協会技術研究所の方々、および東京大学教養学部本間康之博士から多大なご便宜、ご協力をたまわった。また、東京大学工学部土木工学科の石原研而博士、吉越洋氏より理論および三軸圧縮試験に関して種々ご教示をたまわった。ここに深く感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 例えば最上武雄編著：土質力学，技報堂，(1969)，p. 648～653.
- 2) 服部陽一 他：鉱石専用船および鉱石・油兼用船の横強度の検討，日本造船学会論文集第129号 (1971).
- 3) 秋原孝一，谷昭夫：鉄鉱石によって船倉囲壁に加えられる荷重，三菱重工技報，Vol.4 (1967).
- 4) K. Terzaghi: Anchored Bulkhead, *Trans. ASCE*, Vol.119 (1954).
- 5) 後藤廉平 他：レオロジーとその応用，共立出版，(1962)，p. 61～62.
- 6) 最上武雄：土の力学，河出書房，(1947)，p. 173～174.
- 7) Y. H. Huang: Stresses and Displacements in Nonlinear Soil Media, *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, Proc. ASCE*, Vol.93, SM1 (1968).
- 8) Y. H. Huang: Finite Element Analysis of Nonlinear Soil Media, *Proc. of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering*, School of Engineering Vanderbilt University ASCE (1969).
- 9) D. C. Drucker, W. Prager: Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, *Q. Appl. Math.*, Vol. X, No. 2 (1952).
- 10) 浦 環，信太明人：ベレットの船艙に及ぼす影響，東京大学船舶工学科卒業論文 (1972).

附録1 応力増分・ひずみ増分係数行列

応力増分・ひずみ増分係数行列が正定値であることは次のように証明できる。

$J_1 = X$, $J_2 = Y^2$ とおけば，(7) 式は

$$U_c = C_1 X^2 + C_2 Y^2 + C_3 Y^4 / X^2$$

と書きかえられる。これより C_1, C_2, C_3 が正のとき

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 U_c}{\partial X^2} & \frac{\partial^2 U_c}{\partial X \partial Y} \\ \frac{\partial^2 U_c}{\partial X \partial Y} & \frac{\partial^2 U_c}{\partial Y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2C_1 + 6C_3(Y/X)^4 & -8C_3(Y/X)^3 \\ -8C_3(Y/X)^3 & 2C_2 + 12C_3(Y/X)^2 \end{vmatrix}$$

$$= 4C_1C_2 + 24C_1C_3(Y/X)^2 + 12C_2C_3(Y/X)^4 + 8C_3^2(Y/X)^6 > 0$$

$$\frac{\partial^2 U_c}{\partial X^2} = 2C_1 + 6C_3(Y/X)^4 > 0$$

となる。したがって C_1, C_2, C_3 が正の定数である限り， U_c は正定値である。ただし， $X=0$ すなわち $J_1=0$ のときは特異になり U_c の値は存在しなくなるので，この状態は除いて考えなくてはならない。

附録2 有限要素法における摩擦力の取扱い

壁面においては (14) 式が成り立っている。これを有限要素法に適用する方法を述べる。Fig. A のように座標を定める。剛性マトリックス $\mathbf{K}$ の第 n 行に相当する行ベクトルを $\mathbf{K}_n$ と表わし，変位ベクトルを $\mathbf{u}$ とする。物体に作用する摩擦力以外の外力の y 成分を f_{2j} と書く。いま， j 節点の x, y 方向の変位を拘束して解いたとき

$$|\mathbf{K}_{2j}\mathbf{u} - f_{2j}| \leq \tan \delta \mathbf{K}_{2j-1}\mathbf{u} \quad (u_{2j-1} = u_{2j} = 0) \quad (a)$$

であれば $\mathbf{K}_{2j}\mathbf{u} - f_{2j}$ に等しい節点反力が摩擦力として働いて釣り合う。ただし $\mathbf{K}_{2j-1}\mathbf{u}$ が負であれば x 方向の変位が生じ，当然摩擦力は生ぜず， $u_{2j-1} \neq 0$, $u_{2j} \neq 0$ として解き直せば良い。また，壁面上の節点 j を拘束して解いた解に対して (a) 式が成り立たないならば，その点のみの y 方向の変位拘束をのぞき，最大静止摩擦力 F が働くとして，計算を行えば良い。

Fig. A 有限要素法における摩擦力

$$f_{2j} + F = \mathbf{K}_{2j}\mathbf{u} \quad (b)$$

$$|F| = \tan \delta \mathbf{K}_{2j-1} \quad (u_{2j-1} = 0, u_{2j} \neq 0)$$

であるから， F を消去することができて

$$f_{2j} = (\mathbf{K}_{2j} \pm \tan \delta \mathbf{K}_{2j-1})\mathbf{u} \quad (c)$$

となる。すなわち，剛性マトリックスの第 $2j$ 行を $\mathbf{K}_{2j} \pm \tan \delta \mathbf{K}_{2j-1}$ と置き換えて解けば，摩擦力が働いた状態になる。土の付号は摩擦力の働く方向により決まる。この場合，さらに他の節点で (a) 式が成立しないならば同様の手続きをくり返せば良い。逐次計算においても同様の議論が成立する。なおこのように変換された剛性マトリックスは一般に対称でないことに注意しなくてはならない。