(昭和 48 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

板構造物の大変形解析 (その1)

正員 荒 井 宏 範*

Analysis on the Large Deformation of Plate Structures (1st Report)

by Hironori Arai, *Member*

Summary

In this paper, a method is presented of theoretical analysis on the non-linear problem of arbitrary shaped plate structures. Finite element method is applied in the analysis with use of the incremental load procedure by taking into consideration of the path dependent characteristics of the problem. Load balance check is made at each step in order to reduce cumulative errors in the equilibrium of forces at nodal point. Since the formulation of the analysis is based on the principle of incremental virtual work, this method is to be applied for the analysis on the elasto-plastic behavior of the structures, so as to estimate both postbuckling and ultimate strength of the plate structures.

Three dimensional analysis is made by considering six degrees of freedom at each nodal point, and triangular plate element with three sub-elements is used by introducing a conforming shape function for the element. Beam element is also used for stiffening members of the structures.

As an example of the theoretical analysis numerical calculations are made on the following models such as, initially deformed square plates, square plates with a circular hole, a girder with round corner and columns of H-type cross section, and comparison is made between the theoretical predictions and test results on the specimens.

It is found from the comparison that the balance check is necessary to obtain a reasonable prediction by the analysis and that the effect of mesh size on the accuracy of the analysis is not pronounced in elastic range. It is then concluded from the comparison that the present method can be generally applied to the analysis of elasto-plastic behavior of arbitrary shaped plate members for the purpose of estimating the buckling, yielding and ultimate strength of the plate structures.

1 ま え が き

近年船舶の構造設計は、有限要素法による応力計算法の普及により精密化し、又新構造様式の採用等により、部材寸法はより効率の良いものになっていると思われる。一方、設計者はこれらの寸法、新しい構造様式に対して、応力状態、座屈強度、最終強度の大きさを推定する必要がある。

固有値としての座屈強度については、有限要素法を用いたいくつかの研究があり、ある程度任意形状のモデルに対して、かなり精度の良い解が得られることが知られている。ところが板構造物は座屈しても、柱部材の座屈後挙動とは異なり、横たわみ変形が出つても、より大きい荷重を支えることができ、最終強度は座屈強度より大きくなり得る。有限要素法を用いてこの問題を解析したものは、柱部材についての研究^{1,2)}、平板についての研究^{3~6)}があるが、平板構造については未だ解析手法も確立されたとは言い難く、計算と実験の比較検討がなされた例も少ないようである。

そこで本論文では、初期不整を有する板構造物の変形が追跡できる有限要素法によるひとつの解析法、計算法

* 日本海事協会技術研究所

を示し、具体的モデルの計算結果と、実験値との比較考察を行う。

2 解 析 法

有限要素法は、板の大変形問題には (I) 全ポテンシャルエネルギー π の最小化、(II) $\delta\Delta\pi=0$ の解を積み重ねる、即ち増分法によるという、大きく分けて二つの考え方が適用されている。(I) の方法については、最適化手法で良く用いられている Fletcher-Powell の方法で π の最小化をする³⁾、あるいは第1変分をとって $\delta\pi=0$ の解を求める⁴⁾ 手法が発表されており、(II) の方法は、荷重増分と変位増分の間に線形関係を仮定するわけであるが、その際、単に増分の和をとる手法⁵⁾、増分間に生ずる不平衡力を繰り返し演算によりバランスさせる手法⁶⁾、あるいは不平衡力による仕事を考えることにより系全体の平衡をとる手法⁷⁾ があり、又増分項のうち、特に横たわみ項については変形モードを仮定して Rayleigh-Ritz 的取り扱いをする手法⁸⁾ などが提案されている。

板構造物の変形から最終強度に至る過程を追跡する際には、材料の塑性化を考慮する必要があり、本論文ではその影響を入れ易いと思われた (II) の方法を採用しており、増分間で不平衡力による仕事を考えることによって系全体の平衡を図っている。

2.1 増 分 理 論⁹⁾

物体がある荷重段階を経て、 Γ 状態に至ったとし、その時点での応力を $\sigma_{\lambda\mu}$ 、変位を u_λ 、体積力を X_λ 、応力境界 (S_σ 上) の表面力を P_λ 、変位境界 (S_u 上) の変位を $\bar{u}_\lambda$ とする。そして $\Gamma+1$ 状態の体積力、 S_σ 上の表面力、 S_u 上の変位がそれぞれ、

$$X_\lambda + \Delta X_\lambda, \quad P_\lambda + \Delta P_\lambda, \quad \bar{u}_\lambda + \Delta \bar{u}_\lambda \quad (1)$$

に増加するものとし、それに対応して応力と変位は

$$\sigma_{\lambda\mu} + \Delta\sigma_{\lambda\mu}, \quad u_\lambda + \Delta u_\lambda \quad (2)$$

に増加するものとする。ここで Δ は微小増分を意味する。

今、 $\Delta\sigma_{\lambda\mu}$ 、 Δu_λ の方程式を導くための仮想仕事の原理を導くと、

$$\begin{aligned} & \iiint_V [(\sigma_{\lambda\mu} + \Delta\sigma_{\lambda\mu})\delta(e_{\lambda\mu} + \Delta e_{\lambda\mu}) - (X_\lambda + \Delta X_\lambda)\delta(u_\lambda + \Delta u_\lambda)] dV \\ & - \iint_{S_\sigma} (P_\lambda + \Delta P_\lambda)\delta(u_\lambda + \Delta u_\lambda) dS = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$2e_{\lambda\mu} = u_{\lambda,\mu} + u_{\mu,\lambda} + u_{\kappa,\lambda}u_{\kappa,\mu} \quad (4)$$

(3) 式において変分を受けるのは、 S_u 上で $\Delta u_\lambda = \Delta \bar{u}_\lambda$ という条件を満足する Δu_λ であり、又応力増分と歪増分の間に次式のような1次の関係を仮定し、

$$\Delta\sigma_{\lambda\mu} = C_{\lambda\mu\kappa\iota} \Delta e_{\kappa\iota} \quad (5)$$

(3) 式を適当に部分積分すれば、次式のようにあらわされる。

$$\begin{aligned} \delta(\Delta\pi) &= \delta \iiint_V \left(\frac{1}{2} C_{\lambda\mu\kappa\iota} \Delta e_{\kappa\iota} \Delta e_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} \sigma_{\lambda\mu} \Delta u_{\kappa,\lambda} \Delta u_{\kappa,\mu} \right) dV \\ & - \delta \iiint_V \Delta X_\lambda \Delta u_\lambda dV - \delta \iint_{S_\sigma} \Delta P_\lambda \Delta u_\lambda dS - \delta \iiint_V [X_\lambda + \{\sigma_{\lambda\mu}(\delta_{\kappa}^\lambda + u_{\lambda,\kappa})\}_{,\mu}] \Delta u_\lambda dV \\ & - \delta \iint_{S_\sigma} \{P_\lambda - \sigma_{\kappa\mu} n_\mu (\delta_{\kappa}^\lambda + u_{\lambda,\kappa})\} \Delta u_\lambda dS = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

(6) 式で、第1項はひずみ及び応力によるエネルギー項であり、第2、3項はそれぞれ体積力増分、外力増分による仕事である。そして第4、5項は Γ 状態で物体内での平衡条件、応力境界での釣合条件が完全に満たされていない場合の、その不平衡力による仕事を意味している。

この理論は、仮想仕事の原理に基礎を置いているので、弾性問題のみでなく、弾塑性混合問題にも適用可能であり、構造物の大変形問題、最終強度の問題に対して有力な解析法の基礎となる。なお、(6)式の形では不平衡力を取り扱いにくいので、実際の計算ではひずみの高次項を無視して、次式であらわされる $\Delta\pi$ を用いている。

$$\begin{aligned} \Delta\pi &= \frac{1}{2} \iiint_V \Delta\sigma_{\lambda\mu} \Delta e_{\lambda\mu} dV + \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_{\lambda\mu} \Delta u_{\kappa,\lambda} \Delta u_{\kappa,\mu} dV \\ & - \left\{ \iiint_V \Delta X_\lambda \Delta u_\lambda dV + \iint_{S_\sigma} \Delta P_\lambda \Delta u_\lambda dS \right\} + \iiint_V \sigma_{\lambda\mu} \Delta e_{\lambda\mu} dV \end{aligned}$$

$$-\left\{\iiint_V X_i \Delta u_i dV + \iint_{S_e} P_i \Delta u_i dS\right\} \quad (7)$$

2.2 有限要素法の適用

有限要素法を(7)式に適用する。有限要素法では $\Delta\pi$ は各要素の $\Delta\pi_E$ の総和であるので、まず要素の局部座標系で(7)式をあらわし、全体座標系に座標変換し、すべての有限要素について足し込めば、次式のように $\Delta\pi$ が得られる。

$$\Delta\pi = \frac{1}{2} \Delta\delta^T K \Delta\delta + \frac{1}{2} \Delta\delta^T K_G \Delta\delta - \Delta Q^T \Delta\delta + (R^T - Q^T) \Delta\delta \quad (8)$$

ここで

K, K_G : 剛性マトリックス, 幾何学剛性マトリックス

$\Delta\delta$: 節点変位の増分ベクトル

ΔQ : 体積力, 荷重の増分ベクトル

R, Q : 内力から得られる節点反力, 全節点外力ベクトル

停留原理より

$$\delta(\Delta\pi) = (K + K_G) \Delta\delta - \Delta Q + (R - Q) = 0 \quad (9)$$

従って(9)式をステップ毎に求めれば解が得られる。

2.2.1 座標系及び変位関数

本研究では、適用性の広い要素ということで、板要素については三角形要素を、スチフナーについては矩形断面の梁要素を用いる。局所座標系において各要素にとられた自由度は Fig.1 に示す通りである。

座標系は変形とともに移動する移動座標系を採用しており、従って要素の剛性を全体剛性に変換する座標変換マトリックスは物体の変形とともに変化する。そして一要素について Γ 時からの変位の増加量を求めるには、Fig.2 に示すように、 $\Gamma+1$ 時の要素の局所座標系に Γ 時の形をおき、その差をとることにより得られる。これは面内変位増分に限らず、回転角増分についても同様である。

変位関数は、三角形要素は面内が x, y について1次、面外は x, y について3次形で分布するものとし、特に板要素間の適合性を完全に満足する適合変位関数を採用した。適合化にあたって、三角形要素は Fig.3 に示すように、重心 O で三つの sub-element に分割し、それぞれの要素内に面積座標を導入した。

今、sub-element ④ ($\Delta j k O$) について、面内変位 u_i を示せば次のようにあらわされる。

$$u_i = \zeta_1^i u_1^i + \zeta_2^i u_2^i + \zeta_3^i u_3^i \quad (10)$$

但し、

Fig.1 Degree of Freedom

Fig.2 Element Coordinate

Fig.3 Area Coordinate

$$\left. \begin{aligned} \zeta_1^i &= \frac{1}{2A_i}(c_1^i + b_1^i x + a_1^i y), \quad \zeta_1^i + \zeta_2^i + \zeta_3^i = 1 \\ A_i &= \text{sub-element ⑦ の面積} \\ c_1^i &= x_2^i y_3^i - x_3^i y_2^i \\ b_1^i &= y_2^i - y_3^i \\ a_1^i &= x_3^i - x_2^i \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

面外変位は, Hsieh-Clough-Tocher¹⁰⁾ の提案による考えを採用しており, Fig. 4 に示す sub-element ⑦ の局所座標系で横たわみ w が次式で存在するものと仮定する。

$$w = [1 \bar{x}_s \bar{y}_s \bar{x}_s^2 \bar{x}_s \bar{y}_s \bar{y}_s^2 \bar{x}_s^3 \bar{x}_s \bar{y}_s^2 \bar{y}_s^3] \{\alpha\} \quad (12)$$

w をこう定義すれば,

$$\theta_{\bar{x}_s} = \frac{\partial w}{\partial \bar{y}_s} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 2\bar{x}_s \ 2\bar{y}_s \ 0 \ 2\bar{x}_s \ 3\bar{y}_s^2] \{\alpha\} \quad (13)$$

となり, $\bar{x}_s$ の 1 次以上の項がないので, 頂点 i の対辺である $\bar{y}_s = \bar{y}_{s1}$ 上で x 方向の回転 $\theta_{\bar{x}_s}$ は $\bar{x}_s$ について 1 次式で変化することになる。従って, 隣り合う要素とは頂点のみでなく, 辺上の傾斜とも一致していることになる。

各節点の値を入れることにより, 一般化座標 $\{\alpha\}$ は定められ, 面積座標を用いて w をあらわすと,

$$\begin{aligned} w = & \left\{ \zeta_1^2(3-2\zeta_1) - 6 \frac{\bar{x}_{s2}}{L_s} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \right\} w_1 - \bar{y}_{s1} (\zeta_1 \zeta_3 - \zeta_1 \zeta_3^2) \theta_{\bar{x}_{s1}} \\ & + \{ \zeta_1^2 (L_s \zeta_2 + \bar{x}_{s1} \zeta_3) - 2 \bar{x}_{s2} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \} \theta_{\bar{y}_{s1}} + \left\{ \zeta_2^2(3-2\zeta_2) + 6 \frac{\bar{x}_{s1}}{L_s} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \right\} w_2 \\ & - \bar{y}_{s1} (\zeta_2 \zeta_3 - \zeta_2 \zeta_3^2) \theta_{\bar{x}_{s2}} + \{ \zeta_2^2 (-L_s \zeta_1 + \bar{x}_{s2} \zeta_3) - 2 \bar{x}_{s1} \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \} \theta_{\bar{y}_{s2}} \\ & + \zeta_3^2(3-2\zeta_3) w_3 + \bar{y}_{s1} (\zeta_3^2 - \zeta_3^3) \theta_{\bar{x}_{s3}} - (\bar{x}_{s1} \zeta_1 + \bar{x}_{s2} \zeta_2) \zeta_3^2 \theta_{\bar{y}_{s3}} \end{aligned} \quad (14)$$

但し, ここで添字の i は省いてあり, $L_s = \bar{x}_{s1} - \bar{x}_{s2}$ である。

sub-element 同士の適合条件は, Fig. 5 に示すように, 各 sub-element 毎に定義される頂点方向の回転角が等しくなるよう, 重心点の変位を定義することによって完全に満たされている。

梁要素は, 三角形要素に対応して, 軸方向変位 u は x について 1 次, 横たわみ w は x について 3 次, さらに板要素間の適合条件から, 振り角 θ は x について 1 次で変化するものとしている。

2.2.2 塑性影響の考え方

要素内の応力は, 荷重の増加, 変形の増大により弾性から塑性状態に移っていく。本研究では, 各 sub-element の重心点でひずみの各成分が板厚方向に線形で変化するものと仮定し, 各荷重ステップで弾塑性の判定を行いながら, ひずみの微小増分量で決定される応力増分を前回の応力値に加えるという手法をとっており, 計算は次に示す考え方で進めている。

今, 平板が Fig. 6 に示すように, ①, ③領域が降伏し, ②領域は弾性という状態を考える。本計算では, 材料は完全弾塑性体と仮定したので, 剛性マトリックスは②領域の深さだけを考慮すれば良いことになり, 幾何学剛性マトリックスは, ①, ②, ③領域毎に異なった応力状態で求める。塑性域の分布状況は Fig. 6 に限らず, 種々の形が考えられるので, 塑性域の進展状況は Fig. 7 のいずれかと仮定しており, 除荷は考慮していない。

2.2.3 計算プログラム

Fig. 4 Sub-element Coordinate

Fig. 5 Condition of Conformity

Fig. 6 State of Plastic Area

以上述べた仮定の下で計算プログラムを作成した。このプログラムに入力されるべきデータは、通常の有限要素法で必要とされるデータとかわることはないが、計算対象のモデルの初期形状については、たわみ、傾斜角ともに正しく入れてやる必要がある。又、各ステップで不平衡力による仕事を考慮してはいるが、幾何学非線形、材料非線形の問題を同時に扱っているので、与える荷重増分、変位増分については大きくなり過ぎぬように注意せねばならない。

計算時間は、三角形要素数 32 個の平板モデルの 1 ステップに対して、IBM 370 I 155 (256 KB) で約 140 秒であった。

3 解 析 例

本計算プログラムを用いて、面内荷重を受ける平板、孔あき平板、コーナー部を有する桁材、柱部材などを解析し、実験と比較した。

3.1 正 方 形 板

Fig.8 に初期たわみを有する正方形板を、周辺単純支持の条件の下で、上下より一定変位荷重で圧縮したときの荷重-横たわみ曲線を示す。モデルは 600×600 mm、板厚 4 mm、ヤング率 2.1×10^4 kg/mm²、降伏応力 25 kg/mm² としている。図中で、実線は荷重の修正を行っており、点線はしていないものである。このモデルの座屈荷重 P_{cr} は 8.1 ton であり、その点から一点鎖線で Yamaki¹¹⁾ の座屈後曲線を示す。

A-1 のモデルは初期たわみが板厚の 1/10 としたもので、Balance 計算の結果は、細かいメッシュのものも、粗いメッシュのものも、ほぼ Yamaki の曲線に漸近しているが、荷重の修正をしていない計算の結果は、Yamaki の曲線を越え、さらに上昇してしまうことから、Balance 計算の不可欠のこと、又 Balance 計算をしていればかなり粗いメッシュでも座屈後挙動を追跡できることが明らかとなった。但し、計算に用いるメッシュが粗いと、要素内の塑性化が遅れ、従って最高荷重値に差がでる。

実験に用いた試験片は、寸法が 580×580 mm であること以外、その他の常数はモデルと同じである。A-1 の

Fig.7 Extension of Plastic Area

Fig.8 Load-Deflection Curves of A-Series

Fig.9 Stress Distribution of A-1 & A-4

Fig. 10 Lateral Deflection of A-1

断面付近である。初期たわみの小さい A-1 は、座屈以前ほぼ一様であった応力状態が、座屈後は中心線付近の応力は下がり始め、試験片を支えている側辺の方の σ_y が上昇し、特に下図の σ_y の上昇が激しいことから、試験片の最高荷重は中央断面の側辺部の降伏で決められることが推察される。一方初期たわみの大きい A-4 の σ_y 分布は、最初から A-1 の座屈後の σ_y 分布に似ており、従ってモデル内部の塑性化は A-1 と大差ないと思われる。

Fig. 10 には A-1 のたわみ形の変遷を示しており、最初に sine 波形であったたわみ形が、荷重の増大とともに中央点よりも周辺のたわみの増加量が相対的に大きくなり、sine 波形の 1 波長ではあらわしきれなくなるようになる。

3.2 正方形曲面板

A-1 の実験値がいずれの計算曲線よりも高めに出了ため、A-1 の試験片につけた初期たわみ形状を再検討したところ、小さい曲率がついていたことが判明した。そこで本計算プログラムを用いて、周辺単純支持の浅い正方形曲面板の座屈後挙動を追跡したところ、Fig. 11 に示すような荷重-横たわみ曲線が得られ、板厚程度の初期曲率があれば、座屈荷重は 2 割程上昇するということが明らかとなった。A-1 の試験片が実際に板厚程度の初期曲率があったかどうかは明らかではないが、座屈用試験片にこの程度の初期曲率がつくことは決してあり得ぬことではないと思われる。そして、ごく浅い曲面板ならば、本プログラムでも十分な精度で座屈後挙動を追跡できるようである。

3.3 有孔正方形板

A シリーズと同様の試験片の中心に直径 150 mm の円開口をもうけ、一定変位荷重で圧縮した。Fig. 12 に荷重-横たわみの計算結果、実験結果を示す。B-1 は板厚の 1/10 の初期たわみを仮定して計算しており、やはり荷重修正をしない計算結果（点線）は、するもの（実線）より高めにはずれてしまう。この計算から座屈荷重は約 7 ton と推定されるが、この程度の有孔正方形板の座屈荷重¹²⁾は 7.3 ton であり、計算結果はほぼ正しい所で曲がっていると思われる。B-1 の計算結果と、実験結果は比較的良く一致しており、最高荷重も 10% 程度の違いであるが、初期たわみの大きい B-3 は、A シリーズでも問題となったと同じように、立ち上がり方からかなり異なる。

試験片は座屈点が高く、いずれの計算曲線よりも高く出ており、実験の精度に問題があったようであるので後に別の考察をする。A-3、A-4 は初期たわみが板厚程度から、その 2 倍近くまでである試験片であり、計算曲線は Yamaki の曲線に漸近しようとはするが、その立ち上がりで、実験の立ち上がりにかんがりの差違が認められ、本計算法にはまだ改善の余地が残されていることを示しているように思われる。

Fig. 9 に A-1 と A-4 の各荷重段階における y 方向の応力状態の変遷を示す。

上図は荷重近傍、下図は試験片の中央

Fig. 11 Postbuckling Behavior of Curved Plate

Fig.12 Load-Deflection Curves of B-Series

Fig.13 Stress Distribution of B-1 & B-3

Fig.14 Extension of Plastic Area, A-1 & B-1

Fig.15 Ultimate Strength of A & B Series (Experiment)

Fig.13 に B-1 と B-3 の σ_y 分布を示す。この図で興味を引くのは、初期たわみの小さい B-1 の開口部の応力集中が、座屈後には目立たなくなり、孔なしの板と同様、最終的には試験片の中央断面の側辺付近が完全に降伏するかどうかで決まる、即ち最高荷重は最早開口の存在によらなくなるということである。実際、塑性域の深さを考慮して、A-1 と B-1 の試験片の塑性域の進展状況を示すと、Fig.14 のようになり、一番最初に表面が塑性化する場所もほぼ同様の位置ならば、最高荷重付近の応力状態も良く似ている。

このように開口があっても最高荷重にはあまり影響がないということは、実験でははっきりと示されており、Fig.15 に A, B シリーズのすべての試験片につき、縦軸に実験で得られた最高荷重、横軸に初期たわみをとって示す。この図から見る限り、最高荷重は初期たわみの大きさに従って比例的に小さくなるようであり、その落ち方もかなり大きいようである。

3.4 ラウンドコーナーを有する桁材

Fig.16 に示すような、コーナー部が放射状に補強された桁材に、等間隔に集中荷重を与え座屈させたときの実験データ¹⁸⁾と、本計算法による解析結果とを比較した。試験片の初期たわみは左右対称ではあり得ないが、部材寸法は対称であり、かつ実験における変形状況もほぼ対称と見なせたことから、解析モデルとしては試験片の片側だけを取り出し、初期形状を入力データとして計算を行った。

Fig.17 に各点の荷重-変形曲線を示す。同図で①点には節点がとられておらず、そのため計算値としてプロットしたものはその近傍の節点の平均値であるが、50 ton 近くまでは両者は良く一致しており、②点も計算、実験ともに立ち上がりから一致しているものの、30 ton を過ぎた頃から実験の横たわみはほとんど増加しなくなる。桁の中心のフランジ側の横たわみ③だけは、実験値は計算値より大きめであるが、同じ点の下降量④は 40 ton 近くまで両者は良く一致しており、以上の結果から計算は荷重の小さいうちは実験を精度よく追跡しているようである。50 ton より大きい荷重になると計算値はいずれも実験値より高くなり、実験における最高荷重が 73 ton であるのに対し、計算では 84 ton という結果が得られた。これは、Fig.18 に示すように、計算モデルの要素分割が粗いため部材内の塑性化が遅く、又、ラウンド部が塑性化したのちも計算では大きい荷重増分を与え続けたため、最高荷重が高めに行ったためであり、細かい要素を採用して、塑性化し始めたのち与える荷重の大きさを小さくすれば、計算値と実験値はさらに良く一致すると考えられる。

Fig.16 Test Specimen of Plate Girder

Fig.17 Load-Deflection Curves of Girder with Round Corner

Fig.18 Extension of Plastic Area

Fig. 19 Load-Deflection Curves of Column

3.5 柱 部 材

本計算法は板要素から構成される構造物の解析を主目的としたものであるが、板要素を細長く組立てれば柱的部材の座屈、すなわちオイラー座屈の挙動も追跡可能である。Fig. 19 に荷重-横たわみ曲線を示す。この計算でヤング率は $2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、降伏応力は 25 kg/mm^2 であり、オイラー座屈荷重 P_{cr} は 2.97 ton である。計算は一定ちみみを与えているので、 W_0/t が 0.01 という初期たわみの非常に小さいモデルでも、座屈荷重付近で計算結果が少々乱れるだけで計算は不安定とならず、座屈挙動の追跡を行っている。初期たわみの大きいものは、部材内の塑性化のために P_{cr} に達することができず、最高荷重に至り荷重は落ちていく。Fig. 20 に $W_0/t=0.1$ の場合の柱の塑性域の進展状況を示す。なお、Fig. 19 で $W_0/t=0.5$ のカーブは1ステップずつに与えるちみみ量が大きかったため、不連続な曲線となっている。そこで小さいちみみ量を与えて計算した結果が・印でプロットされており、 2 ton 付近で両者が一致していることから、ある程度大きいちみみ量を与えても計算結果にはそれ程大きい影響はないようである。

さらに実験との比較を行うため、文献 2) に示されている初期たわみを有する H 型断面柱をモデルとして選び、変位型荷重を与えて解析した。Fig. 21 に荷重-横たわみ曲線を示す。なお、図の中で曲線の出発点は実際の初期たわみの $1/10$ である。図で示される通り、弾性範囲内では本計算法による結果と、文献 2) で示されている計算結果とはまったく一致しているが、計算に採用した要素分割が粗いため塑性化が遅れ、最高荷重は高めにを行っている。しかし全体的に見て計算カーブと実験値との対応は非常に良く、最高荷重値も工学的に見れば十分な精度内に収まっていると思われる。

4 ま と め

以上述べたように、本論文では有限要素法による大変形問題解析法を展開し、計算プログラムを作成した。第 1 報として、各種の板構造物の実験結果と、計算結果とを比較、考察し、その適用可能性を調べた。種々のモデルを解析した結果、現在のところ次のようなことが判明した。

Fig. 20 Extension of Plastic Area, $W_0=1 \text{ mm}$

Fig. 21 Load-Deflection Curves of H-Section

(1) 有限要素法を採用して増分理論を適用し、荷重ステップ間で不平衡力による仕事を考慮すれば、構造物の座屈後挙動を追跡し、最高荷重を評価することが可能である。

(2) 本計算プログラムは、モデルの初期形状を正確に入力しさえすれば、任意の形状の板構造物の解析が可能であり、構造物の数値実験のひとつの有力な手段となり得る。但し、現在のプログラムは比較的多くの計算時間を必要とするので、その点にまだ改善の余地が残されている。

謝 辞

本研究の開始以来、東京大学藤田譲教授、吉田宏一郎助教授には終始ご指導、ご鞭撻を賜わり深く感謝いたします。又、日本鋼構造協会座屈研究委員会、並びに日本溶接協会塑性設計委員会の委員の方々には内容のご検討を頂きお礼申し上げます。海事協会技術研究所の新田顕船体研究室長には論文作成につき暖かい励ましを頂き、又同研究所の関係各位には多大のご協力を頂き厚く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) 藤田 譲, 大坪英臣, 湯原哲夫: 構造物の塑性設計 (その 11), 日本造船学会論文集第129号 (1971).
- 2) 藤田 譲, 吉田宏一郎, 高沢 誠: 不整量を有する構造物の強度について (その 1), 日本造船学会論文集第132号 (1972).
- 3) Mallett, R. H. and Schmit, L. A.: Nonlinear Structural Analysis by Energy Search, ASCE, vol. 93, No. ST 3, (June, 1967).
- 4) Oden, J. T.: Numerical Formulation of Nonlinear Elasticity Problem, ASCE, vol. 93, No. ST 3, (June, 1967).
- 5) Mallett, R. H. and Marcal, P. V.: Finite Element Analysis of Nonlinear Structures, ASCE, vol. 94, No. ST 9, (Sept., 1968).
- 6) Murray, D. W. and Wilson, E. L.: Finite-Element Postbuckling Analysis of Thin Elastic Plates, AIAA, vol. 7, No. 10 (1969).
- 7) Hofmeister, L. D., Greenbaum, G. A. and Evensen, D. A.: Large Strain, Elasto-Plastic Finite Element Analysis, AIAA, vol. 9, No. 7 (July, 1971).
- 8) 大坪英臣: 平板の弾塑性大たわみ問題の一解法, 日本造船学会論文集第130号 (1971).
- 9) 鷲津久一郎: 弾性学の変分原理概論, コンピュータによる構造工学講座 II-3-A, 培風館 (1972) 及び Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon Press (1966).
- 10) Clough, R. W. and Tocher, J. L.: Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending, Air Force Flight Dynamics Laboratory, Tech. Report-66-80, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, (Oct., 1966).
- 11) Yamaki, N.: Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Appl. Mech., vol. 26, No. 3 (1959).
- 12) C. R. C. Japan: Handbook of Structural Stability, Corona (1971).
- 13) 吉田宏一郎: コーナー部を有する桁の座屈強度—実験データ報告—, 昭和48年3月, 東京大学.