(昭和 49 年 5 月日本造船学会春季講演会において講演)

長い中央平行部による船首波の干渉について

正員 足 達 宏 之*

On the Interference between Bow-Generated Waves and Long
Slender-ship at Low Froude-number

by Hiroyuki Adachi, *Member*

Summary

When the waves generated in bow region traveling along a long slender-body, they meet deformation at middle body region. This phenomenon is difficult to explain by the classical wave-making theory. So far, the deformation of ship wave has been observed by many researchers, and this is known as sheltering effect of body.

In this paper an attempt for analysing the ship wave deformation is made under the assumption that the wave number ν (ratio of gravitational effect to dynamical effect) is of order $O(\varepsilon^{-1})$. The assumption means the waves generated by bow part are of the same order as the beam of ship. The problem is solved by the method of matched asymptotic expansions using slender-body theory.

Incidentally, it becomes clear that as far as the diffraction of ship waves near a slender-body concerned, there are no differences between steady and unsteady ship motions. This is true under the condition that wave length is of the same order as beam. So, the near-field problem coincides with that of Faltinsen's¹⁾.

The result obtained here can explain qualitatively the phenomena which have been discovered in the experiments on an extremely slender-body²⁾.

1 緒 言

定常航走している船の造波現象について、これまで様々な理論的アプローチが試みられてきた。そして古典的な線型理論の枠内において、船の造波現象は説明し尽されてしまったかのような感じがする³⁾。最早、古典的な造波抵抗理論では説明できない現象だけが残されており、その大部分は流体の粘性による影響であると考えられている。もちろん、higher-order の近似理論で説明できる部分もあると考えられているが、実際の現象をうまく説明する理論は、これまで、でていない。2 次元の造波抵抗理論で試みられているような色々なアプローチが⁴⁾、造波抵抗理論の精密化に役立っているのを見ると、3 次元の場合にも、色々な試みがなされるべきであろう。この意味で Ogilvie⁵⁾ によって示唆されている方法は、色々な可能性を秘めているといえよう。すなわち、船の造波の問題を singular perturbation problem として扱い、この問題に含まれる parameter (定常造波の場合、船速なり船の造る波の波長等が考えられる) の order によって問題に含まれる singularities の性質の変わることを利用して、物理的に合理的な解を求める。この観点より、鈴木⁶⁾ は Ogilvie⁷⁾ の方法にならって、3 次元造波抵抗の問題において、船速の order によって境界条件が様々に変わる可能性を示した。その中で、特に、物理的に興味のあるのは、船の造る波の波長が船幅と同じ order である場合にも、通常の斉次な線型化された自由表面条件が成立するということであり、さらに、この場合、船の波と船体との干渉が重要になるであろうということであった。

また、足達⁸⁾によっても、thin-ship による造波の問題がやはり、singular perturbation の問題であるとして解かれ、potential の singular part は、船体より遠く離れた点より見ると、船体中心線上に分布した、line

* 船舶技術研究所

source で表わすことができ、source 密度は、船自身の造る第一近似の波によって表わされることが示された。しかし、この場合、船の造る波の波長は、船長と同じ order と仮定されたので、diffraction effect は期待されない⁶⁾。さらに thin-ship の仮定では diffraction effect は無いことが予想される¹³⁾。しかし、船の造る波と船体の干渉は、船体平行部では、波高の x 方向の変化率として与えられるという事情は他の仮定、たとえば、slender-ship の仮定でも通用すると考えられる。

また、Faltinsen¹⁾は向い波中に固定した船体による、diffraction 問題を扱った。この場合は、もちろん定常造波の問題ではないが、定常造波の問題にも関係があると考えられる。すなわち、Faltinsen が解析を行なった際に得られた結果と類似な結果が、長い slender-ship を定常航走させた時の実験の際に得られた²⁾。Faltinsen の解析は向い波の波長が船幅と同じ位の order のとき、slender-body theory によって向い波が船体を伝播するとき変形を受けることを示したのであるが、長い slender-ship の定常航走の実験においても、古典的造波抵抗理論の教える波とは異なる波が観測されたのである。

ここで、実験により観測された結果について見てみる。船型は、非常に長い中央平行部を持つ slender-ship であり、船体中央平行部の近くで観測される波は、船首部による波であると考えられる。この波について

i) 波の減衰は、古典的理論のいう $x^{-1/2}$ でなく、より強い減衰を示す。Fig. 1 は波が $\cos x/x^P$ で減衰すると仮定して求めた指数 P を Froude 数に対して plot してある。 $P=-1/2$ が古典的理論のいう値であるから、この船の場合、明らかに強い減衰を表わす。

ii) 平行部の近くでは、transverse wave が観測されるが、transverse wave の crest に沿って、すなわち船体に対して真横の方向に振幅を測った結果を Fig. 2 に示すが、振幅は y に linear に変化しているように見える。古典的理論では、transverse wave の crest に沿って振幅はあまり変化せず、変化するととしても y^2 で変化する。

Fig. 1 Decaying factors of an extremely slender-body

Fig. 2 Variation of transverse wave height along a lateral line at $x=\text{const.}$

iii) 平行部で見られる transverse wave の位相を船首を基準として計測した結果を Fig. 3 に示す。簡単に位相 γ について説明すると、transverse wave は

$$\cos(\nu x + \gamma) \quad \nu = g/U^2$$

Fig. 3 Initial phases of transverse waves of an extremely slender-body

Fig. 4 Coordinates and Geometry

で変化しているとして, γ を実測波形から求めたものである。 $\gamma=\pi/4$ の場合が, はば, 古典的理論の教える所であり, 実測波形の位相は大きく進んでいるといえる。

以上の実験結果を説明する, 3 次元造波抵抗の解析を slender-body theory によって試みる。

2 問題の定式化

非常に長い中央平行部を持つ船が, x 軸の正の方向に流れる一様流の中に, 船体中心線を x 軸と一致させて置かれているものとする。船体は x - z 面に関して対称とし, 船長に較べて, 船幅, および, 吃水は非常に小さな量であるとする (Fig. 4)。

座標軸を Fig. 4 のようにとる。 $z=0$ なる面を静上自由表面とする。船首は $x=-l$ に, 船尾は $x=l_0$ にあるとし, 船体中央平行部は $x=0$ から始まるものとする。よって, Sectional Area Curve $A(x)$ は Fig. 5 に表わされるとして良い。 $A(x)$ は $x=0$ で滑らかであると仮定する。Fig. 5 で表わされる Sectional Area Curve $A(x)$ を持つ船による disturbance を表わす velocity potential ϕ は次の条件を満足する。ここで, 流体については velocity potential が存在するための諸々の仮定が許されけるとする。

流体の連続の条件より

[L] Laplace Equation

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in fluid domain} \quad (1)$$

船体の浸水表面を表わす関数を

$$z = h(x, y) \quad (2)$$

とすると, この境界での Kinematic Condition より

$$[H] \quad \frac{D}{Dt} \{z - h(x, y)\} = 0 \quad \text{on } z = h(x, y) \quad (3)$$

である。また, 自由表面では, 線型化された自由表面条件

$$[F] \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z = 0 \quad (4)$$

を満足するものとする。ここで $\nu = g/U^2$ である。さらに, 船の前方には波動は存在しないという条件

[R] Radiation Condition

および, 無限遠方では, 船体による攪乱は無いという条件

[∞] Condition at infinity

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad R = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (5)$$

を, ϕ は満足するとする。

船体は非常に細長いとしたが, この細長さを, 船幅, または吃水/船長比で表わし, この比の大きさを ϵ の order であるとする。このようにしたとき, (重力加速度)/(船速の自乗) 比について, 次の order であると仮定する。

$$\nu = g/U^2 = O(\epsilon^{-1}) \quad (6)$$

この仮定は, 物理的には, この船によって造られる波の波長が大きくとも, 船幅と同じくらいの量であることを意味する。

以上の仮定の下に, 船首部で造られた波が, いかに船体中央部と干渉するかを Matched Asymptotic Expansions⁹⁾ の手法で解析する。

3 船首部による波動

船体中央平行部の近傍の点 $p(x, y, z)$ では, $x = O(1)$, $y = O(\epsilon)$, そして, $z = O(\epsilon)$ である。点 p は船首部に対して, far-field にあると見なされる (Fig. 4)。

Fig. 5 Schematic sectional area curve for an extremely slender-ship

船首部による造波問題の第1近似解は、船体平行部において、次のように与えられる。

$$\phi_B(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_L \sigma(\xi) G(x, y, z; \xi, 0, 0) d\xi \quad (7)$$

ここで、

L : Source 特異点の分布線 $-l \leq x \leq 0 \quad y=0, z=0$

$\sigma(\xi)$: Source 密度分布関数、密度分布は、船体の Sectional Area Curve の x 方向の変化率に比例するであり、 $G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)$ は、次の条件を満足する Green 関数である。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in fluid domain}$$

$$[F] \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial G}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0$$

[R] Radiation condition and $[\infty]$ Condition at infinity.

船首部による velocity potential ϕ_B は Green 関数の性質により、条件 [L], [F], [R], $[\infty]$ を満足する。以上の条件は $\nu = O(\varepsilon^{-1})$ の仮定の下に成立すると仮定する。以上の条件を満足する Green 関数は、次のように与えられる¹⁰⁾。

$$\begin{aligned} G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) &= \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \\ &+ \frac{4\nu}{\pi} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha|x-\xi|} \int_0^\pi d\beta \cdot \sin\beta \cdot \cos\{\alpha(y-\eta) \cdot \cos\beta\} \frac{\alpha \sin\{\alpha(z+\zeta) \sin\beta\} - \nu \sin\beta \cdot \cos\{\alpha(z+\zeta) \cdot \sin\beta\}}{\alpha^2 + \nu^2 \sin^2\beta} \\ &+ 4\{1 + \operatorname{sgn}(x-\xi)\} \nu \int_0^\infty dt e^{\nu(z+\zeta)(1+t^2)} \cdot \cos\{\nu(y-\eta)t\sqrt{1+t^2}\} \cdot \sin\{\nu(x-\xi)\sqrt{1+t^2}\} \end{aligned} \quad (8)$$

よって、 ϕ_B は

$$\begin{aligned} \phi_B(x, y, z) &= \\ &- \frac{\nu}{\pi} \int_L d\xi \sigma(\xi) \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\alpha e^{-\alpha(x-\xi)} \int_0^\pi d\beta \cdot \sin\beta \cos(\alpha y \cos\beta) \frac{\alpha \sin(\alpha z \sin\beta) - \nu \sin\beta \cos(\alpha z \sin\beta)}{\alpha^2 + \nu^2 \sin^2\beta} \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_0^\infty dt e^{\nu z(1+t^2)} \cos(\nu y t \sqrt{1+t^2}) \cdot \sin\{\nu(x-\xi)\sqrt{1+t^2}\} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

と表わされる。

船体中央部は船首部に対して far-field であるとしたので、 ϕ_B による波動は

$$\zeta_B(x, y) = -\frac{U}{g} \frac{\partial \phi_B}{\partial x} \Big|_{z=0}$$

で表わされる。(9) を代入して

$$\zeta_B = \zeta_1 + \zeta_2$$

とする。ここで

$$\zeta_1(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{U\nu^2}{g} \int_L d\xi \sigma(\xi) \int_0^\infty d\alpha \cdot \alpha e^{-\alpha(x-\xi)} \int_0^{\pi/2} d\beta \frac{\cos(\alpha y \cos\beta) \cdot \sin^2\beta}{\alpha^2 + \nu^2 \sin^2\beta} \quad (10)$$

$$\zeta_2(x, y) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{2}{\pi} \frac{U\nu^2}{g} \int_L d\xi \sigma(\xi) \int_0^\infty dt e^{-\nu d(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} \cos(\nu y t \sqrt{1+t^2}) \cdot \cos\{\nu(x-\xi)\sqrt{1+t^2}\} \quad (11)$$

Ursell¹⁰⁾ にならって、 ζ_1 および ζ_2 の評価を行なうと、次の結果を得る。

$$|\zeta_1| = AO(\varepsilon^{1/2}), \quad |\zeta_2| = AO(\varepsilon^{-1})$$

ここで、 $A = \left| \int_L d\xi \sigma(\xi) \right|$ 。

よって、船体平行部では ζ_2 が支配的であることがわかる。さらに、 ζ_2 の船体平行部の近傍での形を具体的に示す。(11) の t に関する積分を取り出して

$$I = \int_{-\infty}^\infty dt e^{-\nu d(1+t^2)\sqrt{1+t^2}} e^{i\nu x \sqrt{1+t^2} - i\nu y t \sqrt{1+t^2}} \quad (12)$$

とする。考えている領域では、 $x = O(1)$, $y = O(\varepsilon)$ であるので $\mu = y/x = O(\varepsilon)$ とおく。 $\mu = \text{const}$ となる (x, y) について、(12) に stationary phase method を適用して

$$I \sim \frac{e^{-\nu d(1+t_0^2)}}{\sqrt{\nu x |g''(t_0)|}} \sqrt{1+t_0^2} e^{i\nu x g(t_0) + i(\pi/4) \cdot \operatorname{sgn}\{g''(t_0)\}}$$

が得られる。ここで

$$g(t) = \sqrt{1+t^2} (1-\mu t)$$

$$t_0 = -\frac{1}{4\mu} [1 - \sqrt{1-8\mu^2}]$$

$\mu = O(\varepsilon)$ であるから,

$$t_0 \sim -\mu = O(\varepsilon), \quad g(t_0) \sim 1, \quad g''(t_0) \sim 1$$

である。(12)の t に関する積分の寄与は, $t = -\mu$ の近傍だけを考えれば良いことがわかる。よって, velocity potential ϕ_B は

$$\phi_B \sim Re \frac{i\nu}{\pi} \int_L d\xi \sigma(\xi) \int_{-\mu-\delta_-}^{-\mu+\delta_+} dt e^{\nu z(1+t^2)} e^{i\nu(x-\xi)\sqrt{1+t^2} - i\nu y t \sqrt{1+t^2}} \quad (13)$$

により, 船体中央部における船首部による攪乱を表わすとして良いであろう。(13)の積分の上下限に表われる δ_+ , δ_- は order $O(\varepsilon)$ の定数とする。(13)の積分変数 t を $\nu\sqrt{1+t^2} = m$ の変換により m に変える。

$$\phi_B \sim Re \frac{i}{\pi} \int_L d\xi \sigma(\xi) \left[\int_{\nu}^{\alpha_-} dm \frac{m}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} e^{\frac{m^2}{\nu} z + i m(x-\xi) + i y m \sqrt{m^2/\nu^2 - 1}} \right. \\ \left. + \int_{\nu}^{\alpha_+} dm \frac{m}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} e^{\frac{m^2}{\nu} z + i m(x-\xi) - i y m \sqrt{m^2/\nu^2 - 1}} \right] \quad (14)$$

$$\text{ここで,} \quad \alpha_- = \nu\sqrt{1+(\mu+\delta_-)^2} = \nu \left\{ 1 + \frac{(\mu+\delta_-)^2}{2} + \dots \right\} = \nu + O(\varepsilon)$$

$$\alpha_+ = \nu\sqrt{1+(\mu-\delta_+)^2} = \nu \left\{ 1 + \frac{(\mu-\delta_+)^2}{2} + \dots \right\} = \nu + O(\varepsilon)$$

よって $m - \nu = O(\varepsilon)$ となり,

$y m \sqrt{m^2/\nu^2 - 1} = O(y) = O(\varepsilon)$ であるから(14)の first order term は

$$\phi_B \sim Re \frac{2i}{\pi} \int_L d\xi \sigma(\xi) \int_{\nu}^{\alpha} dm \frac{m}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} e^{\frac{m^2}{\nu} z + i m(x-\xi)} [1 + O(\varepsilon)] \\ = Re \frac{2i}{\pi} \int_{\nu}^{\alpha} dm \frac{m F(m)}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} e^{\frac{m^2}{\nu} z + i m x} [1 + O(\varepsilon)] \quad (15)$$

となる。ここで $F(m) \equiv \int_L d\xi e^{-im\xi} \sigma(\xi)$ とおいた。なお α は $\alpha - \nu = O(\varepsilon)$ となる定数である。(15)で与えられる bow part potential が船体中央部の近傍での船首部による disturbance を表わす。

以上により, 船体平行部での問題は次のように述べることができよう。すなわち, $\nu = O(\varepsilon^{-1})$ の条件の下に, 船首部による disturbance による波動が船体中央部に(15)の形で伝播してきたとき, この波動と船体との干渉はどのようになるか? このように考えたとき, 長い平行部を持つ船型の定常造波の問題は, 向い波の中に固定して置かれた船の diffraction 問題と類似していることに気がつく。異なっているのは自由表面条件の形だけである。この類似性により, Faltinsen によって採用された方法¹⁾が, この定常造波の場合にも効果的に適用される。

4 中央平行部における diffraction problem

船首部による波動と船体中央部との干渉を表わす potential を ϕ_D とする。total potential ϕ_T は

$$\phi_T = \phi_B + \phi_D \quad (16)$$

となる。 ϕ_T は条件 [L], [H], [F], [R], [∞] (第2章に具体的に与えられている) を満足しなければならない。船首部の攪乱を表わす velocity potential ϕ_B は(14)で与えられるので, ϕ_B を構成している component potential $\Phi_B(m)$ は

$$\Phi_B(x, y, z; m) = Re \frac{2}{\pi} \frac{m F(m)}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} e^{\frac{m^2}{\nu} z + i m x + i \frac{\pi}{2}} \cdot \cos \{ y m \sqrt{m^2/\nu^2 - 1} \} \quad (17)$$

で表わされることがわかる。(14)から(15)を導くときと同じに考えると

$$\cos \{ y m \sqrt{m^2/\nu^2 - 1} \} \sim 1 + O(\varepsilon)$$

となるので, Φ_B の first-order term は

$$\Phi_B(m) \sim Re \frac{2i}{\pi} \frac{m F(m)}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} e^{\frac{m^2}{\nu} z + i m x} = O(\nu |F|) \quad (18)$$

となる。(17), (18) で $\nu < m < \nu + \alpha$, $m - \alpha = O(\epsilon)$ である。(17) に対応して diffraction potential ϕ_D の component potential を $\Phi_D(x, y, z; m)$ とする。total potential の component potential は

$$\Phi_T(x, y, z; m) = \Phi_B(x, y, z; m) + \Phi_D(x, y, z; m) \quad (19)$$

となる。

Φ_T は ϕ_T の満足する諸条件を同じように満足しなければならない。 Φ_B (17) は条件を満足しているので、 Φ_D については、

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in fluid domain} \quad (20)$$

$$[F] \quad \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \Phi_D}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (21)$$

$$[H] \quad \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial n} \quad \text{on } z=h(x, y) \quad (22)$$

$$[R] \quad \text{Radiation condition and } [\infty] \text{ Condition at infinity}$$

となる。

Φ_D に関する問題を slender-body の仮定の下に、Matched Asymptotic Expansions の手法で解析する。Far-field ($x=O(1)$, $y=O(1)$, $z=O(\epsilon)$) では船体の細かい特徴は見えず、船体は船体中心線に置かれた特異点分布により代表されるとする。すなわち [H] の条件を除いたすべての条件を far-field で Φ_D は満足する。Near-field ($x=O(1)$, $y=O(\epsilon)$, $z=O(\epsilon)$) では [R], $[\infty]$ を除いたすべての条件を Φ_D は満足する。すなわち、near-field では Φ_D は船体の細かい特徴を表わさなければならない。far-field と near-field の解の Matching により、すべての領域で unique に成り立つ解を構成することが可能になる。

5 Far-field problem

Far-field から船体中央部を見ると、この部分から far-field におよぼす disturbance の形は、船首部の波動の dominant term が (18) の形をしているので、やはり同じ形を仮定する。しかも、この disturbance は x 軸上に置かれた source 分布によって代表されるとする。Source 分布の density を

$$Re\gamma(x)e^{i\lambda x + i\beta} \quad -l \leq x \leq l_0 \quad (23)$$

と置く。 $\gamma(x)$, および β は source density および source 分布の位相であり、未知量である。 γ および β は near-field での解との matching により定まる。Far-field で Φ_D は [L], [F], および [R], $[\infty]$ の条件を満足する。(23) で source 分布が与えられたときの Φ_D は、Fourier 積分の形で表わすと次式で与えられる¹¹⁾。

$$\begin{aligned} \Phi_D(x, y, z; \lambda) = & \frac{i\nu}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Gamma(\xi, \lambda) \int_0^{\infty} dm \int_0^{\infty} dt \frac{te^{-|y|\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}} \cdot \left\{ \frac{e^{itz}}{m^2 - i\nu t} - \frac{e^{-itz}}{m^2 + i\nu t} \right\} \\ & \cdot \{e^{im(x-\xi)} - e^{-im(x-\xi)}\} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Gamma(\xi, \lambda) \int_0^{\nu} dm \frac{me^{\frac{m^2}{\nu}z - |y|\frac{m}{\nu}\sqrt{\nu^2 - m^2}}}{\sqrt{\nu^2 - m^2}} \{e^{im(x-\xi)} + e^{-im(x-\xi)}\} \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \Gamma(\xi, \lambda) \int_{\nu}^{\infty} dm \frac{me^{\frac{m^2}{\nu}z}}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} \{e^{-iy\frac{m}{\nu}\sqrt{m^2 - \nu^2} + im(x-\xi)} - e^{iy\frac{m}{\nu}\sqrt{m^2 - \nu^2} - im(x-\xi)}\} \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $\Gamma(\xi, \lambda) = \frac{1}{2} \gamma(\xi) \{e^{i\lambda\xi + i\beta} + e^{-i\lambda\xi - i\beta}\}$ 。

(24) は $\Gamma(\xi, \lambda)$ の Fourier transform を利用すると、

$$\begin{aligned} \Phi_D = & \frac{i\nu}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} dm e^{imx} \Gamma^*(m, \lambda) \int_0^{\infty} dt \frac{te^{-|y|\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}} \left\{ \frac{e^{itz}}{m^2 - i\nu t} - \frac{e^{-itz}}{m^2 + i\nu t} \right\} \\ & + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{-\nu} dm e^{imx} \Gamma^*(m, \lambda) \frac{me^{\frac{m^2}{\nu}z - |y|\frac{m}{\nu}\sqrt{m^2 - \nu^2}}}{\sqrt{m^2 - \nu^2}} \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\nu}^0 dm e^{imx} \Gamma^*(m, \lambda) \frac{me^{\frac{m^2}{\nu}z + |y|\frac{m}{\nu}\sqrt{\nu^2 - m^2}}}{\sqrt{\nu^2 - m^2}} \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\nu} dm e^{imx} \Gamma^*(m, \lambda) \frac{me^{\frac{m^2}{\nu}z - |y|\frac{m}{\nu}\sqrt{\nu^2 - m^2}}}{\sqrt{\nu^2 - m^2}} \end{aligned}$$

$$+\frac{i}{2\pi}\int_{\nu}^{\infty}dme^{imx}\Gamma^*(m,\lambda)\frac{me^{\frac{m^2}{\nu}z-iy\frac{m}{\nu}\sqrt{m^2-\nu^2}}}{\sqrt{m^2-\nu^2}} \quad (25)$$

と表わすことができる。ここで

$$\Gamma^*(m,\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-imx}\Gamma(x,\lambda)=\frac{1}{2}\{e^{i\beta}\gamma^*(m-\lambda)+e^{-i\beta}\gamma^*(m+\lambda)\}$$

$$\gamma^*(m)=\int_{-\infty}^{\infty}dx e^{-imx}\gamma(x)$$

である。

(25)で表わされる far-field solution から higher-order の部分を取り除いておく。第1項を I_1 とする。 I_3 の t に関する積分は次のように制限されている。

$$|J|=\left|\int_0^{\infty}dt\frac{te^{-y\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}}\frac{e^{\pm itz}}{m^2\mp i\lambda t}\right|<\frac{1}{\nu}\int_0^{\infty}dt\frac{e^{-y\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}}=\frac{1}{\nu}K_0(my)$$

$K_0(z)$ は Modified Bessel function である。

もし、 $m=O(\varepsilon^{-\delta})$ であれば、 $ym=O(\varepsilon^{-\delta})$ であり、(δ は非常に小さい定数である)

$$K_0(my)=O(e^{-\varepsilon^{-\delta}}) \text{ as } \varepsilon\rightarrow 0, \text{ となる。}$$

よって、 $|J|$ は $\varepsilon\rightarrow 0$ のとき exponentially small である。

さらに、

$$J=2i\left\{\int_0^{\varepsilon^{-\delta}}+\int_{\varepsilon^{-\delta}}^{\infty}\right\}dt\frac{te^{-y\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}}\cdot\frac{m^2\sin tz+\nu t\cos tz}{m^4+\nu^2t^2}=J_1+J_2$$

とすると、

$$|J_2|<\frac{2}{\nu}\int_{\varepsilon^{-\delta}}^{\infty}dt\frac{e^{-yt}}{t}=\frac{1}{\nu}E_1(y\varepsilon^{-\delta})$$

$E_1(z)$ は exponential integral である。 $E_1(z)$ は $z\rightarrow\infty$ のとき、 $E_1(z)=O(e^{-z})$ であるので、 J_2 について

$$|J_2|<\frac{1}{\nu}O(e^{-\varepsilon^{-\delta}}) \text{ as } \varepsilon\rightarrow 0, \text{ となる。}$$

$|J_2|$ は $\varepsilon\rightarrow 0$ のとき、exponentially small である。よって

$$I_1=\frac{i\nu}{4\pi^2}\int_{-\varepsilon^{-\delta}}^{\varepsilon^{-\delta}}dme^{imx}\Gamma^*(m,\lambda)\int_0^{\varepsilon^{-\delta}}dt\frac{te^{-y\sqrt{t^2+m^2}}}{\sqrt{t^2+m^2}}\left\{\frac{e^{itz}}{m^2-i\lambda t}-\frac{e^{-itz}}{m^2+i\lambda t}\right\}+\text{higher order terms} \quad (26)$$

となる。(25)の第2項を I_2 とおく。 I_2 において、積分変数 m を $m+\nu=k$ によって、 k に変える。

$$I_2=\frac{i}{2\pi}e^{-i\nu x}\int_{-\infty}^0dke^{ikx}\Gamma^*(k-\nu,\lambda)\frac{k-\nu}{\sqrt{k(k-2\nu)}}e^{\frac{(k-\nu)^2}{\nu}z-iy\frac{k-\nu}{\nu}\sqrt{k(k-2\nu)}}$$

$z=O(\varepsilon)$ であるので、 $k=O(\varepsilon^{-1-\delta})$ であるなら、

$$e^{\frac{(k-\nu)^2}{\nu}z}=O(e^{-\varepsilon^{-2\delta}}) \text{ となり、} \varepsilon\rightarrow 0 \text{ のとき exponentially small である。よって}$$

$$I_2=\frac{i}{2\pi}e^{-i\nu x+\nu z}\int_{-\varepsilon^{-(1+\delta)}}^0dke^{ikx}\Gamma^*(k-\nu,\lambda)\frac{k-\nu}{\sqrt{k(k-2\nu)}}e^{\frac{k(k-2\nu)}{\nu}z-iy\frac{k-\nu}{\nu}\sqrt{k(k-2\nu)}}+\text{higher order terms} \quad (27)$$

(25)の第5項についても、全く同じようにできて、

$$I_5=\frac{i}{2\pi}e^{i\nu x+\nu z}\int_0^{\varepsilon^{-(1+\delta)}}dke^{ikx}\Gamma^*(k+\nu,\lambda)\frac{k+\nu}{\sqrt{k(k+2\nu)}}e^{\frac{k(k+2\nu)}{\nu}z-iy\frac{k+\nu}{\nu}\sqrt{k(k+2\nu)}}+\text{higher order terms} \quad (28)$$

(25)の第3項について、 $m+\nu=k$ と変数を変えると、

$$I_3=\frac{1}{2\pi}e^{-i\nu x+\nu z}\int_0^{\nu}dke^{ikx}\Gamma^*(k-\nu,\lambda)\frac{k-\nu}{\sqrt{-k(k-2\nu)}}e^{\frac{k(k-2\nu)}{\nu}z+y\frac{k-\nu}{\nu}\sqrt{-k(k-2\nu)}}$$

$y=O(1)$ であるから、もし $k=O(\varepsilon^{-(1-\delta)})$ であれば

$$e^{y\frac{k-\nu}{\nu}\sqrt{-k(k-2\nu)}}=O(e^{-\varepsilon^{-1+(\delta/2)}}) \text{ となる。これは、} \varepsilon\rightarrow 0 \text{ のとき、exponentially small である。よって}$$

$$I_3=\frac{1}{2\pi}e^{-i\nu x+\nu z}\int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}}dke^{ikx}\Gamma^*(k-\nu,\lambda)\frac{k-\nu}{\sqrt{-k(k-2\nu)}}e^{\frac{k(k-2\nu)}{\nu}z+y\frac{k-\nu}{\nu}\sqrt{-k(k-2\nu)}}+\text{higher order terms} \quad (29)$$

となる。第4項についても、同じようにできて、

$$I_4 = -\frac{1}{2\pi} e^{i\nu x + \nu z} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^0 dk e^{ikx} \Gamma^*(k+\nu, \lambda) \frac{k+\nu}{\sqrt{-k(k+2\nu)}} e^{\frac{k(k+2\nu)}{\nu} z - y \frac{k+\nu}{\nu} \sqrt{-k(k+2\nu)}} + \text{higher order terms} \quad (30)$$

と書ける。(26)~(30)より

$$\Phi_D = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + \text{higher order terms} \quad (31)$$

が far-field solution の最終的な形である。

次に(31)の $y \rightarrow O(\varepsilon)$ とするときの inner expansions を求めてみる。この inner expansions では、少なくとも two-term までの展開を得るようにする。

(31)の I_3 において、 $k < \varepsilon^{-(1-\delta)}$ であるから、 $\nu = O(\varepsilon^{-1})$ を考慮して

$$\frac{k-\nu}{\sqrt{-k(k-2\nu)}} e^{\frac{k(k-2\nu)}{\nu} z + y \frac{k-\nu}{\nu} \sqrt{-k(k-2\nu)}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu}{k}} + \nu y + \text{higher order terms}$$

である。よって I_3 について、2-term expansion は

$$I_3 = \frac{1}{2\pi} e^{-i\nu x + \nu z} \int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dk e^{ikx} \Gamma^*(k-\nu, \lambda) \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu}{k}} + \nu y \right] + \text{higher order terms} \quad (32)$$

となる。 I_4 についても、同じようにして

$$I_4 = -\frac{1}{2\pi} e^{i\nu x + \nu z} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^0 dk e^{ikx} \Gamma^*(k+\nu, \lambda) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu}{-k}} + \nu y \right] + \text{higher order terms} \quad (33)$$

が得られる。

次に I_5 について考える。 I_5 は次のように書ける。

$$I_5 = \frac{i}{2\pi} e^{i\nu x + \nu z} \left\{ \int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} + \int_{\varepsilon^{-(1-\delta)}}^{\varepsilon^{-(1+\delta)}} \right\} dk e^{ikx} \Gamma^*(k+\nu, \lambda) \frac{k+\nu}{\sqrt{k(k+2\nu)}} e^{\frac{k(k+2\nu)}{\nu} z - iy \frac{k+\nu}{\nu} \sqrt{k(k+2\nu)}} = I_{51} + I_{52}$$

I_{51} については、 I_3 と同じようにして、

$$I_{51} = \frac{i}{2\pi} e^{i\nu x + \nu z} \int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dk e^{ikx} \Gamma^*(k+\nu, \lambda) \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu}{k}} + i\nu y \right] + \text{higher order terms}$$

となる。 I_{52} が I_{51} の第2項よりも higher-order であることは次のようにしてわかる。 $\Gamma(x, \lambda)$ の Fourier transform $\Gamma^*(k+\nu, \lambda)$ の argument は少なくとも $\varepsilon^{-(1-\delta)}$ より大である。このようなとき、 $\Gamma(-l, \lambda) = \Gamma(l_0, \lambda) = 0$, $\Gamma'(-l, \lambda) = \Gamma'(l_0, \lambda) = 0$ であるなら、 $\Gamma^*(k)$ は

$$|\Gamma^*(k)| < \frac{C}{|k|^3} \quad (34)$$

で制限される (Lighthill 1957)¹²⁾。 Γ' に関する条件はゆるめても良いと考えられるが、ここでは一応(34)の条件が成立するために仮定する。(34)の関係が成り立つとき、

$$|I_{52}| < C \int_{\varepsilon^{-(1-\delta)}}^{\varepsilon^{-(1+\delta)}} dk \frac{1}{k^3} \frac{k+\nu}{\sqrt{k(k+2\nu)}} < O(C\varepsilon^{2-(9/2)\delta})$$

となる。ここで C は Γ の order に関係する定数と考えられるので I_{52} は明らかに I_{51} の second order term よりも higher-order term であることがいえる。よって

$$I_5 = I_{51} + \text{higher order terms}$$

I_2 についても、同様にして

$$I_2 = \frac{i}{2\pi} e^{-i\nu x + \nu z} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^0 dk e^{ikx} \Gamma^*(k-\nu, \lambda) \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\nu}{-k}} - i\nu y \right] + \text{higher order terms} \quad (35)$$

がいえる。

I_1 に関しては

$$I_1 < O(C\varepsilon^4 \ln \varepsilon)$$

となることが証明され、far-field solution の two-term inner expansion は、次のように展開される。

$$\begin{aligned} \Phi_D(x, y, z; \lambda) = & \frac{e^{\nu z}}{4\pi} \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}} \left[-e^{-i\nu x - i\beta} \int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dk e^{ikx} \gamma^*(k+\lambda-\nu) \frac{1}{\sqrt{k}} \right. \\ & \left. - e^{i\nu x + i\beta} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^0 dk e^{ikx} \gamma^*(k-\lambda+\nu) \frac{1}{\sqrt{-k}} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +ie^{i\nu x+i\beta} \int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dke^{ikx} \gamma^*(k-\lambda+\nu) \frac{1}{\sqrt{k}} \\
& -ie^{-i\nu x-i\beta} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^0 dke^{ikx} \gamma^*(k+\lambda-\nu) \frac{1}{\sqrt{-k}} \Big] \\
& + \frac{e^{\nu z}}{4\pi} \nu y \Big[e^{-i\nu x-i\beta} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dke^{ikx} \gamma^*(k+\lambda-\nu) \\
& + e^{i\nu x+i\beta} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dke^{ikx} \gamma^*(k-\lambda+\nu) \Big] \\
& + \frac{e^{\nu z}}{4\pi} \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{2}} \Big[-e^{-i\nu x+i\beta} \int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dke^{ikx} \gamma^*(k-\lambda-\nu) \frac{1}{\sqrt{k}} \\
& - e^{i\nu x-i\beta} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^0 dke^{ikx} \gamma^*(k+\lambda+\nu) \frac{1}{\sqrt{-k}} \\
& + ie^{i\nu x-i\beta} \int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dke^{ikx} \gamma^*(k+\lambda+\nu) \frac{1}{\sqrt{k}} \\
& - ie^{-i\nu x+i\beta} \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^0 dke^{ikx} \gamma^*(k-\lambda-\nu) \frac{1}{\sqrt{-k}} \Big] + \text{higher order terms} \quad (36)
\end{aligned}$$

(36) で I_2, I_3, I_4, I_5 にあった $\nu y \int_{-\varepsilon^{-(1-\delta)}}^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} dke^{ikx} \gamma^*(k \pm \lambda \pm \nu)$ の項は (34) の関係によって, (36) の higher-order terms の中に入れられた。

Fourier transform technique を利用するために, (36) の積分の上限, あるいは, 下限を, それぞれ, $\infty, -\infty$ にする。このようにしたとき, higher-order の error が入るだけであり, (36) の第 1, 2 項の order には影響しない。(36) の初めの項について調べれば十分である。

$$\int_0^{\varepsilon^{-(1-\delta)}} = \int_0^\infty - \int_{\varepsilon^{-(1-\delta)}}^\infty \quad \text{と書くことができる。}$$

右辺の第 2 項の積分について積分の order を見る。(34) の関係を使うと,

$$\left| \int_{\varepsilon^{-(1-\delta)}}^\infty dke^{-ikx} \gamma^*(k+\lambda-\nu) \frac{1}{\sqrt{k}} \right| < C \int_{\varepsilon^{-(1-\delta)}}^\infty dk \frac{1}{k^{7/2}} = \frac{C}{5} \varepsilon^{(1-\delta)5/2}$$

となり, (36) の第 2 項よりも, 明らかに higher-order である。よって, (36) で $\varepsilon^{-(1-\delta)} \rightarrow \infty$ としても, さしつかえない。Far-field solution の two-term expansion は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\Phi_D(x, y, z; \lambda) = & \frac{1}{4\pi} e^{\nu z} \Big[\sqrt{\frac{\nu}{2}} \Big\{ -ie^{-i\nu x-i\beta} \left(\int_{-\infty}^0 dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k+\lambda-\nu)}{\sqrt{|k|}} \right. \\
& - i \int_0^\infty dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k+\lambda-\nu)}{\sqrt{k}} \Big) - e^{i\nu x+i\beta} \left(\int_{-\infty}^0 dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k-\lambda+\nu)}{\sqrt{|k|}} \right. \\
& \left. \left. - i \int_0^\infty dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k-\lambda+\nu)}{\sqrt{k}} \right) \Big\} \right. \\
& + \nu y \Big\{ e^{-i\nu x-i\beta} \int_{-\infty}^\infty dke^{ikx} \gamma^*(k+\lambda-\nu) + e^{i\nu x+i\beta} \int_{-\infty}^\infty dke^{ikx} \gamma^*(k-\lambda+\nu) \Big\} \\
& + \sqrt{\frac{\nu}{2}} \Big\{ -ie^{-i\nu x+i\beta} \left(\int_{-\infty}^0 dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k-\lambda-\nu)}{\sqrt{|k|}} - i \int_0^\infty dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k-\lambda-\nu)}{\sqrt{k}} \right) \\
& \left. - e^{i\nu x-i\beta} \left(\int_{-\infty}^0 dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k+\lambda+\nu)}{\sqrt{|k|}} - i \int_0^\infty dke^{ikx} \frac{\gamma^*(k+\lambda+\nu)}{\sqrt{k}} \right) \right\} \Big] \\
& + \text{higher order terms} \quad (37)
\end{aligned}$$

次に Fourier convolution theorem を利用して (37) を変形する。そのために, 次の関数を定義する。

$$F^*(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|k|}} & k < 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{k}} & k > 0 \end{cases} \quad (38)$$

$F^*(k)$ は関数 $F(x)$ の Fourier transform を表わすものとする。よって

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dke^{ikx} F^*(k) = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 dk \frac{e^{ikx}}{\sqrt{|k|}} - i \int_0^\infty dk \frac{e^{ikx}}{\sqrt{k}} \right]$$

$$= \frac{1-i}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2|x|}} \{1 + \operatorname{sgn}(x)\} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{\pi|x|}} H(x) \quad (39)$$

ここで $H(x)$ は Heaviside's step function である。

(38)を(37)に代入して, Fourier convolution theorem を使うと,

$$\begin{aligned} \Phi_D(x, y, z; \lambda) = & -\frac{\nu^{1/2} e^{\nu z}}{2\sqrt{2}} \left\{ i e^{-i\nu x - i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \gamma(\xi)}{\sqrt{\pi|x-\xi|}} e^{-i(\lambda-\nu)\xi} H(x-\xi) \right. \\ & + e^{i\nu x + i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \gamma(\xi)}{\sqrt{\pi|x-\xi|}} e^{i(\lambda-\nu)\xi} H(x-\xi) \left. \right\} \\ & + \frac{\nu y}{2} \gamma(x) e^{\nu z} \{e^{i\lambda x + i\beta} + e^{-i\lambda x - i\beta}\} \\ & - \frac{\nu^{1/2} e^{\nu z}}{2\sqrt{2}} \left\{ i e^{-i\nu x + i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \gamma(\xi)}{\sqrt{\pi|x-\xi|}} e^{i(\lambda+\nu)\xi} H(x-\xi) \right. \\ & + e^{i\nu x - i\beta} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \gamma(\xi)}{\sqrt{\pi|x-\xi|}} e^{-i(\lambda+\nu)\xi} H(x-\xi) \left. \right\} \\ = & -\frac{\nu^{1/2} e^{\nu z}}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-i\nu x - i\beta + i\frac{\pi}{4}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{|x-\xi|}} e^{-i(\lambda-\nu)\xi} \right. \\ & + e^{i\nu x + i\beta - i\frac{\pi}{4}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{|x-\xi|}} e^{i(\lambda-\nu)\xi} \left. \right\} \\ & + \frac{\nu y}{2} \gamma(x) e^{\nu z} \{e^{i\lambda x - i\beta} + e^{-i\lambda x - i\beta}\} \\ & - \frac{\nu^{1/2} e^{\nu z}}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-i\nu x + i\beta + i\frac{\pi}{4}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{|x-\xi|}} e^{i(\lambda+\nu)\xi} \right. \\ & + e^{i\nu x - i\beta - i\frac{\pi}{4}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{|x-\xi|}} e^{-i(\lambda+\nu)\xi} \left. \right\} \quad (40) \end{aligned}$$

となる。初めの中カッコの項が first-order term である。

$$(40) \text{ で } \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} e^{\pm i(\lambda+\nu)\xi}$$

は, $\lambda + \nu = O(\varepsilon^{-1})$ であり, $\xi = x$ で $\frac{1}{\sqrt{x-\xi}}$ の特異性を持つ, このようなとき, 上式の Fourier Integral は次のような漸近評価を持つ¹²⁾。

$$\int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} e^{\pm i(\lambda+\nu)\xi} = \sqrt{\pi} e^{\mp i\frac{\pi}{4}} \gamma(x) \frac{e^{\pm i(\lambda+\nu)x}}{\sqrt{\lambda+\nu}} + O(\gamma\varepsilon) \quad (41)$$

また, $\lambda - \nu = O(\varepsilon)$, $x = O(1)$ であるから,

$$\begin{aligned} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} e^{\pm i(\lambda-\nu)\xi} &= e^{\pm i(\lambda-\nu)x} \int_0^{x+l} d\xi \frac{\gamma(x-\xi)}{\sqrt{\xi}} e^{\mp i(\lambda-\nu)\xi} \\ &= e^{\pm i(\lambda-\nu)x} \int_0^{x+l} d\xi \frac{\gamma(x-\xi)}{\sqrt{\xi}} [1 \mp i(\lambda-\nu)\xi + \dots] \quad (42) \end{aligned}$$

となる。

(41)と(42)を(40)に代入して two-term までとると, 最終的に, 次の式を得る。

$$\begin{aligned} \Phi_D(x, y, z; \lambda) = & -\frac{\nu^{1/2} e^{\nu z}}{2\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{i\lambda x + i\beta - i\frac{\pi}{4}} + e^{i\lambda x - i\beta + i\frac{\pi}{4}} \right\} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} \\ & + \frac{1}{2} \gamma(x) e^{\nu z} \{e^{i\lambda x + i\beta} + e^{-i\lambda x - i\beta}\} \left(\nu|y| - \frac{1}{2} \right) \quad (43) \end{aligned}$$

この式は本質的に, 非定常問題において Faltinsen の求めたものと同じものである。定常問題では (24) で velocity potential が与えられたものであるが, sinusoidal な source 分布に関して, 非定常問題の場合と同じ形の inner expansion が得られたことは興味深い。このことは, transverse wave (head seas) が船体の存在のために変形を受けるということに関しては¹³⁾, 非定常問題も, 定常問題もなく, 本質的に同じ現象であることを示している。しかも, このことは, $\nu = O(\varepsilon^{-1})$ という仮定のもとのみ成り立つことを考えると⁶⁾, その物

理的意義（すなわち、波長が船幅と同じ order であるということ）は定常造波の問題において重要であると思われる。

6 Near-field problem

Far-field の解は near-field では特異性を持つので、near-field で成立する解を構成しよう。船体中央部の近傍では、船体表面条件 [H] を満足しなければならないが、Radiation condition [R], および Condition at infinity $[\infty]$ の条件は失われる。船首部による disturbance の主要部は(18)で与えられているので、near-field での diffraction problem の解も x に関して sinusoidal なものを仮定する。

$$\Phi_D(x, y, z; \lambda) = e^{i\lambda x} \psi(x, y, z) \quad (44)$$

Potential は real part をとるものとする。Near-field で Φ_D の満足すべき条件は、次のように与えられる。

$$[L] \quad \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial z^2} = 0 \quad \text{in fluid domain}$$

$$[F] \quad \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \Phi_D}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0$$

$$[H] \quad \frac{\partial \Phi_D}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial n} \quad \text{on } z=h(x, y)$$

Near-field で、座標を次のように stretching する。

$$x = X = O(1), \quad y = \varepsilon Y = O(\varepsilon), \quad z = \varepsilon Z = O(\varepsilon)$$

これにしたがい、微分操作は

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Y}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial Z}$$

となる。

船体に立てた、法線方向余弦, n_1, n_2, n_3 は、それぞれ, $n_1 = O(\varepsilon)$, $n_2 = O(1)$, $n_3 = O(1)$ である。 ψ についての条件は stretching した座標を使うと、

$$[L] \quad \psi_{YY} + \psi_{ZZ} - \varepsilon^2 \lambda^2 = -2i\lambda \varepsilon^2 \psi_X - \varepsilon^2 \psi_{XX}$$

$$[F] \quad \psi_Z - \frac{\varepsilon \lambda^2}{\nu} \psi = -2i \frac{\lambda \varepsilon}{\nu} \psi_X - \frac{\varepsilon}{\nu} \psi_{XX} \quad \text{on } Z=0$$

$$[H] \quad \frac{\partial \psi}{\partial N} = -\varepsilon \frac{2}{\pi} \frac{\lambda |F(\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} e^{\varepsilon \nu Z + i\alpha + i\frac{\pi}{2}} [i\lambda n_1 + \nu n_3] - \varepsilon n_1 (\psi_X + i\lambda \psi) \quad \text{on } Z=H(X, Y)$$

ここで N は (Y, Z) 面において、船体 $z=h(x, y)=\varepsilon H(X, Y)$ に立てた、two-dimensional normal である。また Φ_B には y に依存する部分があるが、この解析には higher-order term として表われるので、その部分を省いて書いてある。

また、 ψ は、次のような asymptotic expansion で表わされると仮定する。

$$\psi \sim \sum_{n=1}^M \psi_n(X, Y, Z; \varepsilon) \quad \text{where } \psi_{n+1} = o(\psi_n) \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (45)$$

for fixed values (X, Y, Z)

また、 λ は $0 < \lambda - \nu < \delta$ ($\delta = O(\varepsilon)$) であるので、

$$\lambda = \kappa + \nu \quad (46)$$

によって、 λ から κ に変換する。 $\kappa = O(\varepsilon)$ である。

(45), (46) を [L], [F], [H] の条件に入れて整理すると

$$[L] \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - K^2 \right) (\psi_1 + \psi_2 + \dots) = -2i\varepsilon K (\psi_{1X} + \psi_{2X} + \dots) \\ - \varepsilon^2 (\psi_{1XX} + \psi_{2XX} + \dots) - 2\varepsilon \kappa K (\psi_1 + \psi_2 + \dots) - 2i\varepsilon \kappa^2 (\psi_1 + \psi_2 + \dots) \quad (47)$$

$$[F] \quad \left(\frac{\partial}{\partial Z} - K \right) (\psi_1 + \psi_2 + \dots) = -2i\varepsilon (\psi_{1X} + \psi_{2X} + \dots) - \frac{\varepsilon}{\nu} (\psi_{1XX} + \psi_{2XX} + \dots) \\ + 2\varepsilon \kappa (\psi_1 + \psi_2 + \dots) - i \frac{\varepsilon \kappa}{\nu} (\psi_{1X} + \psi_{2X} + \dots) + \frac{\varepsilon \kappa^2}{\nu} (\psi_1 + \psi_2 + \dots)$$

$$[H] \quad \frac{\partial}{\partial N} (\psi_1 + \psi_2 + \dots) = -\frac{2}{\pi} \frac{|F(\nu + \kappa)|}{\sqrt{\kappa(2\nu + \kappa)}} e^{KZ + i\alpha + i\frac{\pi}{2}} \cdot \varepsilon (\nu + \kappa) [\nu n_3 + i(\nu + \kappa) n_1]$$

$$-\varepsilon n_1(\psi_{1X} + \psi_{2X} + \dots) - \varepsilon n_1(\nu + \kappa)(\psi_1 + \psi_2 + \dots)$$

ここで, $K = \varepsilon\nu = O(1)$ なる定数である。以上より ψ_1 に関する first-order problem は次のようになる。

$$[L] \quad \left(-\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - K^2 \right) \psi_1 = 0$$

$$[F] \quad \left(\frac{\partial}{\partial Z} - K \right) \psi_1 = 0 \quad \text{on } Z=0$$

$$[H] \quad \frac{\partial}{\partial N} \psi_1 = -\frac{2}{\pi} \frac{\nu |F(\nu + \kappa)|}{\sqrt{\kappa(2\nu + \kappa)}} \cdot e^{KZ + i\alpha + i\frac{\pi}{2}} K \cdot n_3 = O(\nu |F|)$$

ψ_1 の order は $O(\nu |F|)$ である。上の問題に対する一般解は Ursell により¹³⁾ 与えられているが, far-field solution との matching を考慮すると, ψ_1 に対する解として,

$$\psi_1(X, Y, Z) = -\frac{2}{\pi} \frac{\nu |F(\nu + \kappa)|}{\sqrt{\kappa(2\nu + \kappa)}} e^{KZ + i\alpha + i\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi} \frac{\nu |F(\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} e^{KZ + i\alpha + i\frac{\pi}{2}}$$

が得られる。First-order near-field の解は

$$\Phi_D \sim -\frac{2}{\pi} \frac{\nu |F(\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} e^{\nu Z + i\lambda X + i\alpha + i\frac{\pi}{2}} \quad (47)$$

となる。これは, Φ_B の first-order term と符号が異なるだけですべて同じである。

One-term near-field solution の outer expansion は(47)のままであり, これは, one-term outer solution の one-term inner expansion と matching しなければならない。One-term outer solution の one-term inner expansion は(43)より

$$-\frac{\nu^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} e^{\nu Z + i\lambda X + i\beta - i\frac{\pi}{4}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma_1(\xi)}{\sqrt{x - \xi}}$$

であり, これが(47)と matching するためには

$$\beta - \frac{\pi}{4} = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad \beta = \alpha + \frac{3}{4}\pi \quad (48)$$

$$-\frac{\nu^{1/2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma_1(\xi)}{\sqrt{x - \xi}} = -\frac{2}{\pi} \frac{\nu |F(\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} \quad (49)$$

であれば良い。(49)は Abel's integral equation であり, γ_1 については容易に解けて

$$\gamma_1(x) = \frac{2^{3/2}}{\pi^{3/2}} \cdot \frac{\nu |F(\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\nu(x+l)}} = O(\nu^{1/2} |F|) \quad (50)$$

が得られる。

First-order solution に吟味を加える前に, second-order solution を求めておく。 ψ_2 に関する問題は, 次のように与えられる。

$$[L] \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z^2} - K^2 \right) \psi_2 = 0$$

$$[F] \quad \left(\frac{\partial}{\partial Z} - K \right) \psi_2 = 0 \quad \text{on } Z=0$$

$$[H] \quad \frac{\partial}{\partial N} \psi_2 = 0 \quad \text{on } Z=H(X, Y)$$

[H]に関する条件を求めるのに, $\psi_2 = O(\nu^{1/2} |F|)$ であるとした。もし, ψ_2 にこの order を仮定しないとき, matching が行なわれない。この理由で second-order term まで near-field solution を求めるとき Φ_B において, y の入っている項を higher-order term として省略することができる。 ψ_2 に関する解は (Ursell による¹³⁾)

$$\begin{aligned} \psi_2(X, Y, Z; \varepsilon) = & A_2(X) \left\{ e^{KZ} + \int_{c(+)} K\mu(s; K) [G(KY, KZ; K\xi(s), K\eta(s)) \right. \\ & \left. + G(KY, KZ; -K\xi(s), K\eta(s))] ds \right\} \end{aligned} \quad (51)$$

で与えられる。

ここで,

$$G(KY, KZ; K\xi, K\eta) = K_0 [K\sqrt{(Y - \xi)^2 + (Z - \eta)^2}]$$

$$+ \frac{1}{4} \left[\oint_{-\infty}^{\infty} + \oint_{-\infty}^{\infty} \right] \frac{\cosh \mu + 1}{\cosh \mu - 1} \exp[iK(Y - \xi) \sinh \mu + K(Z + \eta) \cosh \mu] d\mu$$

である。 $c(+)$ は船体の $Y > 0$, $Z < 0$ なる cross-section を表わし, $Y = \xi(s)$, $Z = \eta(s)$ は $c(+)$ の Parametric equation である。(51) の $A_2(X)$ は任意関数であり matching により定まり, $\mu(s)$ は [H] の条件を満足するように定められる。 ψ_2 の outer expansion は

$$\psi_2 \sim A_2(X) \left[e^{KZ} - 4K^2 \pi |Y| e^{KZ} \int_{c(+)} \mu(s; K) e^{K\eta(s)} ds \right]$$

で与えられる¹³⁾。

Two-term near-field solution は

$$\Phi_D \sim (\psi_1 + \psi_2) e^{i\lambda x}$$

となる。 $A_2(x)$ を求めるために far-field solution との matching を行なう。Near-field の outer expansion は

$$\begin{aligned} \Phi_D \sim & -\frac{2}{\pi} \frac{\nu |F(\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} e^{\nu z + i\lambda x + i\alpha + i\frac{\pi}{2}} \\ & + |A_2(x)| e^{\nu z + i\lambda x + i\beta} - 4\pi K^2 \frac{|y|}{\varepsilon} |A_2(x)| e^{\nu z + i\lambda x + i\beta} \int_{c(+)} \mu(s; K) e^{K\eta(s)} ds \end{aligned} \quad (52)$$

Two-term far-field solution は far-field solution に(45)と類似の asymptotic expansion を仮定し, 少なくとも second-order solution が x 軸上に分布した source によって表わされるとする。このとき two-term far-field solution の inner expansion は

$$\begin{aligned} \Phi_D \sim & -\sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} e^{\nu z + i\lambda x + i\beta - i\frac{\pi}{4}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma_1(\xi)}{\sqrt{x - \xi}} \\ & + \left(\nu |y| - \frac{1}{2} \right) \gamma_1(x) e^{\nu z + i\lambda x + i\beta} \\ & - \sqrt{\frac{\nu}{2\pi}} e^{\nu z + i\lambda x + i\beta_2 - i\frac{\pi}{4}} \int_{-l}^x d\xi \frac{\gamma_2(\xi)}{\sqrt{x - \xi}} \end{aligned} \quad (53)$$

で与えられる。(52) と (53) の matching より

$$-4\pi K^2 \frac{1}{\varepsilon} |A_2(x)| e^{i\beta} \int_{c(+)} \mu(s, K) e^{K\eta(s)} ds = \nu \gamma_1(x) e^{i\beta}$$

よって,

$$A_2(x) = -\frac{\gamma_1(x) e^{i\beta}}{4\pi K \int_{c(+)} \mu(s, K) e^{K\eta(s)} ds} = O(\nu^{1/2} |F|) \quad (54)$$

により $A_2(x)$ が得られる。

$A_2(x)$ が求まれば, second-order までの near-field solution を得ることができるので, これ以上の matching を行なわない。

これまで得られた結果を, まとめてみる。Near-field solution は

$$\Phi_D = (\psi_1 + \psi_2) e^{i\lambda x}$$

で与えられる。 $\psi_1 e^{i\lambda x}$ は船首部による波動の船体中央部におよぼす影響 Φ_B の dominant term と大きさは同じで, 符号だけが異なる。 $\psi_2 e^{i\lambda x}$ の項は $\gamma_1(x) \propto \frac{1}{\sqrt{x}}$ であるから, やはり $\frac{1}{\sqrt{x}}$ で変化する。船体中央部における total potential の component Φ_T は second-order term まで考えると

$$\Phi_T = \Phi_B + \Phi_D = D(y, z; K) \frac{\nu^{1/2} |F(\lambda)|}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} \frac{1}{\sqrt{x + l}} e^{i\lambda x + i\alpha + i\frac{\pi}{4}} = O(\nu^{1/2} |F|)$$

となる。

ここで

$$D(y, z; K) = -\frac{1}{2^{1/2} \pi^{5/2}} \cdot \frac{\left\{ e^{\nu z + K \int_{c(+)} \mu(s; K) [G_+ + G_-] ds} \right\}}{K \int_{c(+)} \mu(s; K) e^{K\eta(s)} ds}$$

である。

Total potential は Φ_T を λ について積分したものであるから、船体中央部近傍で potential は

$$\phi_T(x, y, z) = \int_{\nu}^{\delta} d\lambda \Phi_T(x, y, z; \lambda) = -\frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}} D(y, z; K) \frac{|F(\nu)|}{x+l} e^{i\nu x + i\alpha} \quad (55)$$

これが, near-field での potential の dominant term である。 ϕ_T は y が大きくなるにしたがい

$$\phi_T(x, y, z) \sim -\frac{\pi^{1/2}}{2^{1/2}} \frac{|F(\nu)|}{x+l} e^{i\nu x + i\alpha} \cdot \frac{e^{\nu z}}{E(K)} \cdot \left[1 - 4\pi \frac{|y|}{\varepsilon} \cdot E(K) \right] \quad (56)$$

ここで $E(K) = K \int_{0(+)}^{\pi} \mu(s; K)^{K\gamma(s)} ds$

となる。

7 結 論

(55)および(56)の示す ϕ_T の示す性質を見ると

- i) 船体中央部での波動の減衰は $x^{-1/2}$ ではなく、より強い減衰 x^{-1} である。
- ii) Transverse wave の crest line に沿って、lateral 方向に、波の振幅は $ay+b$ の形で変化している。
- iii) 船首部による波動の位相に較べて、船体中央部で見られる波動の位相は $\pi/4$ だけ進んでいる。

これらの性質は、非常に長い船体平行部を持つ船型の実験結果を、定性的に完全に説明するものである。

$\nu = g/U^2 = O(\varepsilon^{-1})$ の仮定の下で、定常造波の問題を考えると、diffraction term の存在すべきことを、鈴木⁶⁾は予想したが、この予想は、実験的にも、また、解析的にも立証されたといえよう。Diffraction term の first-order の項は、船首部による disturbance より higher-order な現象であるが、船体が存在するための diffraction 効果は累積的であり、船首部による disturbance を打ち消すことができる。その結果、残された second-order term の diffraction 効果のみが観測されることになる。

この研究の実験の部分に関しては、推進性能部田中拓室長に、また、理論の部分に関しては、Michigan 大学の Prof. Ogilvie に色々教示された所が多く感謝の意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Faltinsen, O.M. : Wave forces on a restricted ship in head-sea waves, Doctor-thesis University of Michigan, Ann Arbor, Michigan (1971).
- 2) 足達宏之 : 非常に長い中央平行部を持つ船型の波形解析について, 船舶技術研究所報告, 第10巻第4号 (1973).
- 3) Wehausen, J.V. : The wave resistance of ships, Advances in Applied Mechanics, Vol. 13, Academic Press (1973).
- 4) 流体力学グループ : 船舶流体力学ノート (1), 日本造船学会誌第533号 (1973).
- 5) Ogilvie, T.F. : Singular perturbation problems in ship hydrodynamics, Report No.096 Dept. of Nav. Arch. and Marine Eng. Ann Arbor (1970).
- 6) 鈴木勝男 : 造波抵抗理論における境界条件について, 日本造船学会論文集第130号 (1971).
- 7) Ogilvie, T.F. : Nonlinear high-Froude-number Free-surface problems, Jour. Engineering Mathematics, 1. (1967).
- 8) Adachi, H. : Higher-order thin-ship theory by means of the method of matched asymptotic expansions, Report No.137 Dept. of Nav. Arch. and Marine Eng. Ann Arbor (1972).
- 9) van Dyke, M. : Perturbation methods in fluid mechanics. Academic Press (1964).
- 10) Ursell, F. : On Kelvin's ship wave pattern, Jour. Fluid Mechanics Vol. 8 pt 3 (1960).
- 11) 花岡達郎 : 定常造波抵抗理論の基礎問題, 造船協会論文集第89号 (1951).
- 12) Lighthill, M.J. : Fourier analysis and generalised functions, Cambridge University Press (1958).
- 13) Ursell, F. : On head seas travelling along a horizontal cylinder, J. Ist. Maths. Applics 4 (1968).