(昭和 49 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

K -値制御下の疲労亀裂伝播 (第2報)

—ランダム疲労について—

正員 板 垣 浩* 正員 小 川 鉄 夫*
 正員 入 江 泰 雄**

Fatigue Crack Propagation under Controlled Stress Intensity Factor (II)

—Random Fatigue Test—

by Hiroshi Itagaki, *Member* Tetsuo Ogawa, *Member*
 Yasuo Irie, *Member*

Summary

The behavior of the fatigue crack under the narrow band random stress intensity factor was studied experimentally. It was found that stress intensity factor governs the fatigue crack growth rate under random load process as well as under deterministic load sequences, and the crack growth rate in the short range showed noticeable fluctuation while that in the long range was almost constant implying that Miner's rule could be applied for the crack growth provided that the constants were determined from random fatigue test.

A small digital system with a micro-CPU and the associated software developed for this study was found suitable for random fatigue tests.

1 緒 言

疲労亀裂の伝播が応力拡大係数(以下では K -値という)によって律せられるという仮定をできる限り直接的に、実験により検証するためには、 K -値を制御した実験を行うのが最も適当であるとの観点から K -値制御疲労試験法を提案した¹⁾。この試験法は、また

$$\frac{dc}{dn} = f(K, \alpha, \beta, r, \dots) \quad (1)$$

のような形で表わされる疲労亀裂成長則の関数形, f , 材料定数, $\alpha, \beta, r, \dots$ を定めるのにも適している。しかしながら、現実の疲労亀裂成長はランダム荷重下で起るのが普通であり、如何に精度よく(1)式を推定しえてもその結果を、ランダム疲労に適用しなくては実用の見地から無意味である。一般にランダム荷重下の疲労寿命の予測に関しては、いわゆるマイナー法則とよばれる仮説を適用するのが普通である。これは、この仮説の成立することが実証されているからではなく他に便法がないために他ならない。マイナー仮説は、(i)被害の進行がその時点までの累積被害量と次の荷重サイクルによってのみ決まり、かつ、(ii)破壊時の累積被害量がその時の応力に無関係の場合に成立する可能性があるが、そうでない時には成立しないことを、すでに筆者が指摘し、シミュレーションによって示したとおりである²⁾。疲労亀裂がランダム荷重下で成長し、ある値になるまでの寿命(それ以前には不安定破壊が生じないとして)を取扱うことにすれば上述の条件(ii)はみたされる。亀裂成長の式に初期値を与え数値積分によって予想亀裂長さを計算するのは上述の仮定(i)を適用していることになり、マイナー則の応用に他ならない。多くの場合亀裂成長率を過大に見積った結果となり(下限 K -値を導入することによって多少の修正を試みることもあるが)、いわば安全側の推定であるとされる。しかしながら、

* 横浜国立大学工学部

** 横浜国立大学大学院

金沢等³⁾によって指摘されるようにどのような設計方針を採用しているかによって安全側であるかどうかの結論は左右されるものである。

前報において述べたように Swanson 等⁴⁾の結果などから推してランダム荷重下の亀裂成長則は K -値の統計量(例えば期待値, r. m. s など)によって表現することが可能であり, ランダムでない場合の取扱いと何ら変わることがないであろうと予想している。これは亀裂成長に関してある意味でマイナー則を適用しうることを意味するが, ランダムでない実験結果を用いてランダム疲労の結果を予測しうることを意味するものでない。前述のマイナーの仮説適用のための条件(i)はほとんどの場合に成立するとは考えられない。したがって, 幾つかの材料定数は荷重履歴を反映するような実験条件の下で定めなければならない。

さて, このような取扱いが可能であるか否かを実験的に検証するためには時間領域において K -値をランダム過程と見なしうるような条件の下で実験を行い

$$E\left[\frac{dc}{dn}\right] = f_r(K_r, \alpha_r, \beta_r, \gamma_r, \dots) \quad (2)$$

(ここに, 添字 r はランダム疲労の条件を表わし, $E[\]$ は期待値を, K_r は K -値の1つの統計量を示す) のような形で亀裂成長則を表現しうるか否かを調べればよい。

換言すれば, もしも K -値が定常ランダム過程の時も亀裂長さや時間との関係がほぼ直線的であることを立証しえればよい。このような実験を行うためにはまず, K -値を所期の統計的性格を有するランダム過程であるように制御しなくてはならない。前報で用いた実験装置はアナログ演算回路を用いているが, ランダム過程のシミュレーションにはデジタル方式の方が適しているので, 本実験ではマイクロコンピュータを導入した。

本報告に述べる各項目とその目的の概要は次のとおりである。

- (1) マイクロコンピュータによるランダム過程のシミュレーションの可能性について簡単に検討する。
- (2) 前報の ΔK 一定試験では K -値の平均値 (K_{mean}) が ΔK 毎に異なるので K_{mean} 一定のランダム K -値試験結果と対照するために, dC/dN に及ぼす K_{mean} の影響を調べる。
- (3) 狭帯域 (narrow band) の定常ガウス過程の $K(t)$ を負荷し, 亀裂長さや負荷時間との関係を調べる。(これは $K(t)$ の期待値および r. m. s を一定に保った時に直線的に亀裂長さが増加する事を確認するためである)
- (4) 狭帯域の定常ガウス過程の荷重, $P(t)$ を負荷し, 亀裂長さや負荷時間との関係を調べる。(ランダムでない実験結果—(本報告では第1報の dC/dN と ΔK との関係図)—を用いて亀裂成長率をどの程度予測しうるかを検討するため)

以上に述べたような目的の実験を行うことによってランダム荷重下における疲労亀裂成長の特性を調べてみることにする。

2 定常ガウス過程のシミュレーション

2.1 余弦の和による方法

一般に定常ランダム過程は

$$x(t) = \int_0^\infty [\cos \omega t du_\omega + \sin \omega t dv_\omega] \quad (3)$$

ここに, ランダムプロセス du_ω, dv_ω について

$$\begin{aligned} E[du_\omega] &= E[dv_\omega] = 0 \\ E[du_\omega^2] &= E[dv_\omega^2] = d\sigma_\omega^2 \\ E[\cdot] &= \text{期待値}, \sigma^2 = \text{分散} \end{aligned}$$

(3) 式の近似として

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} [\cos \omega_i t du_i + \sin \omega_i t dv_i] = \sum_i a_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (4)$$

を用いる。 du_i, dv_i が正規ならば $x(t)$ もまた正規であり, a_i は Rayleigh 分布に従う。また

$$x(t) = \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \quad (4')$$

$$A_i = \sqrt{2S(\bar{\omega}_i) \Delta \omega_i} \quad \omega_i = \bar{\omega}_i + \delta_i \quad \phi_i = 0 \sim 2\pi \text{ に分布する一様乱数}$$

のようなランダム位相の余弦の和で表わすのが普通に用いられる方法⁵⁾である。(4') 式のパワースpektral 分

布関数に飛躍がなければ自己相関関数についてエルゴード性が成立する。すなわち

$$\begin{aligned} R(\tau) &= E[x(t) \cdot x(t+\tau)] = \sum_i \sum_j E[A_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \cdot A_j \cos(\omega_j t + \phi_j)] \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} A_i^2 \cos \omega_i \tau \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} R^*(\tau) &= \langle x(t) \cdot x(t+\tau) \rangle_T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum \sum \int_0^T A_i A_j \cos(\omega_i t + \phi_i) \cos(\omega_j(t+\tau) + \phi_j) dt \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} A_i^2 \cos \omega_i \tau \end{aligned} \quad (6)$$

一方、疲労では相隣極値の差(振幅と呼ぶことにする)が決定的な要素となる。また、荷重履歴が疲労の進行に大きく影響すること、長時間にわたりランダム過程を必要とすることから周期性が問題となる。

本実験で用いたマイクロコンピュータでは、 N の大きさ、有効数字の桁数が限られるのでそれによって生じる周期性を何らかの方法で取除くことが必要となる。以上のことを念頭に入れて次のような条件をみたすランダムプロセスを発生させることを試みた。

- (1) 基礎とする式は(4')式を用いる
 - (2) $N=20$
 - (3) 一定パターンの完全な繰返しはさける
 - (4) ランダム疲労の繰返し速度は 30 cpm 前後とする
 - (5) $x(t)$ を $\Delta t=0.04$ sec 毎に計算し DA コンバータを通して指令信号とする
- 完全なパターンの繰返しをさけるために(4')式を

$$y(t) = \sum_{i=1}^{20} A' \cos(\bar{\omega}_i t + \phi_i + \alpha \xi_i(t)) \quad (7)$$

ここに、 $\xi_i(t) = -\pi \sim +\pi$ の間に分布する一様乱数、 $0 < \alpha \ll 1$

$$E[\xi_i(t_j) \cdot \xi_i(t_k)] = 0 \quad j \neq k$$

$$\xi_i(t_j) = \text{一定}, \quad j \cdot \frac{T}{2} \leq t_j \leq (j+1) \frac{T}{2} \dots T = \frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

自己相関関数は

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &\doteq \frac{1}{2} \sum A_i^2 \cos(\bar{\omega}_i \tau) \\ \frac{I-1}{2} T &< t < t+\tau < \frac{I}{2} T, \quad I = \text{integer} \end{aligned} \quad (8)$$

次に(4')式を

$$\begin{aligned} z(t) &= \sum_{i=1}^{20} A_i'' \cos\left(\bar{\omega}_i t + \phi_i + \sum_{l=1}^{N(t)} \varepsilon_{il}\right) \\ \varepsilon_{il} &= -\pi \varepsilon \sim +\pi \varepsilon \text{ の間に分布する一様乱数} \\ 0 &< \varepsilon \ll 1 \end{aligned} \quad (9)$$

$N(t)$ = 発生させたサンプルの合計数 $= t/\Delta t$

Δt = サンプルを行う周期

自己相関関数は

$$R_{zz}(\tau) \doteq \frac{1}{2} \sum A_i^2 \exp\left\{-\frac{N(\tau)}{6} (\pi \varepsilon)^2\right\} \cdot \cos(\bar{\omega}_i \tau) \quad (\tau \text{ が大}) \quad (10)$$

$$\doteq \frac{1}{2} \sum A_i^2 \cos(\bar{\omega}_i \tau) \quad (\tau \text{ が小}) \quad (10')$$

この方法によって発生させたランダム波形を Fig. 1 に示す。時間経過とともにパターンが変化しているのが判る。

2.2 デジタル・フィルターによる方法

先に述べた方法は帯域幅がかなり広い時には、余弦

Fig. 1 ランダム波形の例

Fig. 2 ランダムパルスの自己相関関数

Fig. 3 ランダム波形の例 ($\omega_m = \pi, r = 0.8$)

の項数が大きくなってしまっているので有効でない。そのような時にはホワイトノイズとインパルス応答関数を用いるのが、より有効である。まず、定常ランダム入力に対する応答過程 $y(t)$ を

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)n(\tau)d\tau \quad (11)$$

$n(\tau)$ = ランダム入力

として、さらに近似的に次のようになる。

$$z(t) \doteq \sum_{j=M-m+1}^M h((M-j)\Delta\tau) \cdot x(j\Delta\tau)\Delta\tau \quad (12)$$

$M=t$ 時刻までに発生したパルス数 m = 適当な整数

$$x(j\Delta\tau) = x_j, \dots, (j-1)\Delta\tau < t \leq j\Delta\tau$$

独立なランダムパルス x_j としてシフトレジスタと排他的論理で発生させた M 系列による疑似乱数を使用する。また、乗算を行う時間を省くためには x_j を $+1$ か -1 の値とすることができる⁶⁾。そのようなランダムプロセス x_j の自己相関関数を Fig. 2 に示す。これは $1/\Delta\tau$ と N が充分大きければ、近似的にホワイトノイズと見なせる。したがって、プロセス $z(t)$ はプロセス $y(t)$ と同様になる。但し、フィルターは1自由度系のインパルス応答関数である。しかし、この方法は狭帯域幅では、 m が大きくなるのでマイクロコンピュータで行うと時間がかかりあまり有効でない。Fig. 3 に $m=100$, $\Delta\tau=0.05$ sec, 帯域幅=80% (中心周波数に対して) の場合の波形を示す。同じパターンの繰返しは見られない。

Fig. 4 試験片の形状寸法

3 試験方法

本試験に用いられた材料、その機械的性質および化学成分、試験片形状等は第1報と同じで、それを Table 1 および Fig. 4 に示す。

試験装置は第1報と同じアナログ演算回路の入力にマイクロコンピュータの出力を入れるもので、その制御システムのブロッ

Table 1 材料の機械的性質と化学成分

Mechanical Properties Tensile Test (G. L.=200 mm)					
Yield Point kg/mm ²	Tensile Strength kg/mm ²	Elongation %	Bend Test	Charpy V (0°C) kg·m	
30	45	30	good	24.9	
Chemical Compositions %					
C	Si	Mn	P	S	Remarks
0.12	0.26	0.82	0.016	0.003	Normalized

Fig. 5 制御回路のブロック図

図を Fig. 5 に示す。これによって各種負荷条件での実験を容易に実行しうる。

ランダム疲労試験においては Fig. 6 の形のパワースペクトラルを持つランダム波を指令信号とする。スペクトラルの帯域幅として

Fig. 6 パワースペクトラル

$$\text{ランダム } K\text{-値試験の時 } \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_m} \times 100 = 10\%$$

$$\text{ランダム荷重試験の時 } \frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_m} \times 100 = 20\%$$

(ω_m = 中心角周波数)

とした。なお、試験速度は 30 cpm である。

4 試験結果とその考察

4.1 予備的実験

ランダム荷重(または K -値)はある平均の周りに変動している。したがってランダム疲労の結果と比較するための荷重一定繰返し(または K -値一定繰返し)疲労の結果は、平均一定とすべきかどうかの検討をする必要がある。そのために $\Delta K = (K_{\max} - K_{\min})$ をできるだけ一定として平均をしいに変化させ、亀裂成長を観測した。ここで K -値の平均はマイクロコンピュータを用いて台形状に変化させた。このようにして得られた亀裂進展の様子を Figs. 7, 8 に示す。平均 K -値が漸減する場合に速度変化が観察された。CK-18 において K -値の平均が上昇する過程では、亀裂成長率、 $dC/dN = 1.15 \times 10^{-4} \text{ mm/cycle}$ であるのに対して下降する時は $0.57 \times 10^{-4} \text{ mm/}$

Fig. 7 平均 K -値変動下の $C \sim N$ 線図 ($\Delta K = 80 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$) Fig. 8 平均 K -値変動下の $C \sim N$ 線図 ($\Delta K = 100 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$)

Table 2 dC/dN に及ぼす平均 K -値の影響

specimen No.	C K 18				C K 19			
ΔK (kg/mm ^{3/2})	80				101			
平均 K -値 (kg/mm ^{3/2})	52~94	94	94~50	61	53~95	95	95~58	58
dC/dN (mm/cycle)	1.15×10^{-4}	1.00×10^{-4}	0.57×10^{-4}	0.90×10^{-4}	2.20×10^{-4}	2.17×10^{-4}	0.90×10^{-4}	1.79×10^{-4}

cycle である。成長率は平均 K -値が上昇する時に比べ下降する時はほぼ半分に低下する。この傾向は CK-19 においても同様である (Table 2 参照)。この実験についていえば平均 K -値を漸増した時および一定に保持した時には平均 K -値の影響は見られなかった。すなわち、CK-18 において $K_{\text{mean}}=61 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$ では $dC/dN=0.9 \times 10^{-4} \text{ mm/cycle}$ であり、 $K_{\text{mean}}=94 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$ では $dC/dN=1.0 \times 10^{-4} \text{ mm/cycle}$ でほとんど平均 K -値による亀裂成長率の変化は無視できる。したがってランダム疲労試験の結果と平均一定で行った疲労試験を比較してもさしつかえない。

ランダム荷重による疲労亀裂の成長を一波毎の成長の線型累積と考えて、すなわち、 ΔK -値の大小順を無視して dC/dN を求めると K -値のピークが漸減していく時の成長率に及ぼす負の影響が強くあらわれ、漸増していく場合にはほとんど影響がないので、ランダム荷重下の亀裂成長率は線型累積で予測した値より小となろうと予想される。

4.2 ランダム K -値疲労試験

マイクロコンピュータによって発生させた疑似ランダム波形を指令信号として K -値をランダムに変える実験を行った。ランダム波のシミュレーションの方法は先の章で述べたランダム位相を持つ余弦の和の方法を用い

Fig. 9 ランダム K -値下の $C \sim N$ 線図

た。その結果得られた $C \sim N(\text{Time})$ 線図を Fig. 9 に、試験結果をまとめて Table 3 に示す。試験速度は平均レベルを単位時間に横切る回数の期待値が 1/2 となるように設定して行った。Fig. 9 をみると部分的には、成長率は $1.0 \times 10^{-5} \text{ mm/cycle}$ から $7 \times 10^{-5} \text{ mm/cycle}$ 程度まで (1~2 時間の平均) のバラツキが見られるが、全体的に見るとほぼ一直線と見なしてよからう。これから判断してランダム荷重下においても亀裂成長率は K -値に、特に K -値のある統計量に支配されていると考えることができる。

次に、得られた亀裂成長率の結果を第1報の正弦波の定 K -値繰返し試験 (KCF Test) より得られたデータと比較するため、等価応力拡大係数 K_{eq} を定めることを試みた。一般に亀裂成長率と ΔK -値の間には、次式の関係が成立しているとする。

$$\frac{dC}{dN} = k(\Delta K)^m \quad (13)$$

ここに、 k, m は材料定数

狭帯域ランダム荷重による亀裂の成長を1波毎の線型累積と考えて、統計的に dC/dN を求めると

Table 3 ランダム K -値下の亀裂成長率の推定値と実測値

specimen No.	C K 21			
ΔK_{eq} (kg/mm ^{3/2})	$E(\Delta K)=48$	$\sqrt{E(\Delta K^2)}=54$	$\sqrt[3]{E(\Delta K^3)}=60$	
推定 dC/dN (mm/cycle)	3.8×10^{-5}	5.2×10^{-5}	7.0×10^{-5}	$6.3 \times 10^{-5*}$
実測 dC/dN (mm/cycle)	3.3×10^{-5}			

* 前報¹⁾の提案式 (eq.21) より)

$$E\left[\frac{dC}{dN}\right] = E[k] \cdot E[(\Delta K)^m] = k \int_0^\infty (\Delta K)^m P\left(\frac{\Delta K}{2}\right) d\left(\frac{\Delta K}{2}\right) = k [\Delta K_{eq}]^m \quad (14)$$

ここに、 $E[\cdot]$ は期待値を示す。

となる。 K の片振幅 ($\Delta K/2$) の分布は狭帯域であるので Rayleigh 分布すると考え、 $m=3$ として ΔK_{eq} を計算し、対応する dC/dN を前報の結果から求めた。結果は実験値に比してかなり大となったので、 ΔK_{eq} として ΔK の期待値、分散をとってみた。その結果を Table 3 に示す。いずれの場合も実測した $E[dC/dN]$ は予想される亀裂成長率より小さい。

また、前報で提案した式から求めた $E[dC/dN]$ よりも小さい。このことは、ランダム荷重下において ΔK_{eq} の値としてどのような量を規準として定めるかが一つの問題点であることを示している。

上記の結果をさらに確かめるためにランダム荷重試験を行った。

4.3 ランダム荷重試験

ランダム波形の発生はすでに述べた方法で荷重をランダムに変動させた。この時の $C \sim N(\text{Time})$ 線図を Fig. 10 に示す。実線は前報で得た実験式をもととして次式で求めた予測 $C \sim N$ 曲線である。

Fig. 10 ランダム荷重下の $C \sim N$ 線図

$$E\left[\frac{dC}{dN}\right] = k E[\Delta K^m] = k \{f(c)\}^m \cdot E[\Delta P^m] \quad (15)$$

$$C_N = C_0 + k \sum_{i=1}^N f(C_{i-1})^m \cdot E[\Delta P^m] \quad (16)$$

ここに、 $m=2.8$, $k=0.73 \times 10^{-9}$

予想曲線と実験値との差は係数 k の違いだけではなく指数 m の値も異なっているとせねば説明しえない。そこで、できるだけ実験値に近くなるように、 $k_r=1.90 \times 10^{-8}$, $m_r=2$ として (16) 式をプロットした (Fig. 10 の破線)。破線がよく実験値を表現しているようであるが、この意味は (16) 式、すなわち、線型累積の考え方が適用しうることを示すものである。同時に材料の挙動を決めるパラメータ、 k および m はランダム荷重下での値を用いねばならないことをも示している。正弦波荷重下の疲労においては亀裂成長率 dC/dN と ΔK -値との関係を求めるには定 K -値試験 (KCF Test) が非常に有効であるが、ランダム荷重下の疲労における亀裂進展の仕方は正弦波荷重下の疲労の場合と異なっていると考えられランダム荷重 (またはランダム K -値) 疲労試験を数多く行って dC/dN と K -値 (の統計量) との関係を定める必要がある。

5 結 論

以上のような実験から次のような結論を得た。

- 1) マイクロコンピュータ程度の簡単なデジタルシステムの導入によって、より広範囲の疲労試験 (平均 K -値変動試験, ランダム K -値試験, ランダム荷重試験, etc.) が可能になる。
- 2) 平均 K -値の疲労亀裂成長率に及ぼす影響は、本実験では見られなかった。
- 3) ランダム荷重の場合にも亀裂成長則を K -値の統計量で整理することが可能である。
- 4) 定荷重試験等の結果からランダム荷重下の疲労亀裂成長の挙動を予測することは困難である。

参 考 文 献

- 1) 板垣, 小川, 三谷: Fatigue Crack Propagation under Controlled Stress Intensity Factor-(I), 日本造船学会論文集第 133 号 (昭和 48 年)。
- 2) 板垣, 篠塚: 変動繰返し荷重を受ける単部材および多部材構造の信頼性, 日本造船学会論文集第 123 号 (昭和 43 年)。
- 3) T. Kanazawa, H. Itagaki and S. Machida: Fail Safe Concept and Conservative Estimation of Safety, Pre-print, Japan-U.S. Joint Seminar on Reliability Approach in Structural Engineering.

- 4) S.R.Swanson, F.Cicci and W.Hoppe : Crack Propagation in Clad 7079-T 6 Aluminum Alloy Sheet under Constant and Random Amplitude Fatigue Loading, ASTM STP 415 (1967).
 - 5) 竹内, 山本 : 正規不規則過程における相継ぐ極値の近似確率分布とシミュレーションについて, 日本造船学会論文集第131号 (昭和47年).
 - 6) 磯部編 : 相関関数およびスペクトル, 東京大学出版会.
-