長水路における造波現象について

——周期的吹き出しの速度ポテンシャル——

正員 一 色 浩*

Water Waves in a Long Canal

——The Velocity Potential of a Periodic Source——

by Hiroshi Isshiki, Member

Summary

The velocity potential due to a pulsating source, the so-called Green function for periodic oscillation of water, in a rectangular canal is obtained by using a new method. This potential is important, for example, to discuss the effect of the wave reflection by the tank wall when experimenting a ship model in a rectangular tank.

The main characteristics of water waves in a canal are that there exist resonant frequencies, and that the system of progressive waves for a frequency consists of a finite number of component waves with different wave lengths. When the ratio of the breadth $2l$ of the canal and the wave length λ , of the progressive wave due to the pulsating source, for the horizontally unbounded case satisfies $0 < 2l/\lambda < 0.5$, the progressive wave becomes a two-dimensional sinusoidal wave with the wave length λ . When $0.5 < 2l/\lambda$, the wave system involves component waves with the wave length longer than λ .

The numerical calculations are conducted, and the examples are shown in §6.

1 序 論

幅と深さが制限された長方形断面を有する水路、いわゆる rectangular canal 中に、吹き出し特異点がある場合の水波の問題を考察してみた。このような問題は、長水槽で3次元的な流体力を実験的に求める際の側壁の影響、そのような水槽に設置されている造波機の unbalance の波形に対する影響⁴⁾、あるいは海峡や運河等の制限水路中での船の運動による造波現象等の問題の重要な基礎となる。特に制限水路中での船の運動の研究は、近年その重要性を増しつつある。

一様流がある場合の吹き出しによる速度ポテンシャルは Eggers¹⁾により求められている。本論文では一様流は無いが、そのかわりに吹き出し量が周期的に変化する場合について取り扱う。Eggers は、水底および側壁の条件を満足させるために、無数の鏡像を上下、左右に配置する方法を用いているが、本論文ではこれとは別個の見地より取り扱った²⁾。

具体的に数値計算も行なってみた。§6 にその結果を示

* 日立造船(株)技術研究所

Fig. 1 A rectangular canal and the coordinate system

して参考に供する。

2 Rectangular Canal 中にある周期的吹き出し

図1のような半幅 l 、水深 h の rectangular canal を考える。自由表面上に座標原点 O を取り、canal の長さ方向に z 軸を、幅方向に x 軸を、垂直下方向に y 軸を取る。 x 軸および y 軸方向には、それぞれ側壁および水底があるが、 z 軸方向にはこのような制限が無いものとする。この canal での円周波数 ω (すなわち時間項 $e^{i\omega t}$, $\omega > 0$) の周期的吹き出し特異点、いわゆる Green 関数は、数学的にはつぎのように定義される。すなわち点 (a, b, c) に $1/r \cdot e^{i\omega t}$ (r は視点と特異点との間の距離) の特異性を有する Green 関数の点 (x, y, z) における値を $G(x, y, z, a, b, c) \cdot e^{i\omega t}$ と書くことにすると、 G は流体領域

$$F = \{(x, y, z) ; -l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < +\infty\} \quad (2.1)$$

を定義域として

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G = -4\pi \delta(x-a) \delta(y-b) \delta(z-c) \quad -l < x < l, 0 < y < h, -\infty < z < +\infty \quad (2.2a)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y} + K \right) G = 0 \quad -l < x < l, y = 0, -\infty < z < +\infty \quad (2.2b)$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad -l < x < l, y = h, -\infty < z < +\infty \quad (2.2c)$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0 \quad x = \pm l, 0 < y < h, -\infty < z < +\infty \quad (2.2d)$$

$$G \text{ は } z \rightarrow \pm\infty \text{ で外側に発散する波になる。} \quad (2.2e)$$

ここに、 K は無限水深の場合の波数、すなわち ω^2/g (g は重力の加速度) とする。以下において G を具体的に求める。

3 $z=c$ を境にして流体領域を前後に分割して考える方法

$z=c$ を境にして流体領域 F を前後 (便宜的にこう呼ぶことにする) に分割して

$$F = F^f \cup F^b$$

$$F^f = \{(x, y, z) ; -l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h, c \leq z < +\infty\} \quad (3.1)$$

$$F^b = \{(x, y, z) ; -l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h, -\infty < z \leq c\}$$

とし、さらにこれに応じて (2.2) 式の解 G を

$$G = \begin{cases} G^f & \text{in } F^f \\ G^b & \text{in } F^b \end{cases} \quad (3.2)$$

と書くことにする。このとき (2.2a) 式をつぎの条件で置き換えることができる (→ Appendix A)。すなわち

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G^f = 0 \quad F^f \text{ の内点で} \quad (3.3a)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G^b = 0 \quad F^b \text{ の内点で} \quad (3.3b)$$

および

$$\begin{cases} G^f - G^b = 0 & \text{on } F^f \cap F^b \\ \frac{\partial G^f}{\partial z} - \frac{\partial G^b}{\partial z} = -4\pi \delta(x-a) \delta(y-b). \end{cases} \quad (3.4a) \quad (3.4b)$$

このとき (3.3) 式、(2.2b-e) 式および (3.4a) 式を満たす G をつぎのように書くことができる。

$$\begin{aligned} G &= \begin{cases} G^f \\ G^b \end{cases} \\ &= \sum_{0 \leq m \leq m_e} A_{m0} \cos \frac{m\pi x}{l} \cosh k_0(y-h) \exp \left\{ -i \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2} |z-c| \right\} \\ &\quad + \sum_{m_e+1 \leq m} A_{m0} \cos \frac{m\pi x}{l} \cosh k_0(y-h) \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - k_0^2} |z-c| \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{1 \leq m \leq m_s} B_{m0} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \cosh k_0(y-h) \exp \left\{ -i \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2} |z-c| \right\} \\
& + \sum_{m_s+1 \leq m} B_{m0} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \cosh k_0(y-h) \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2 - k_0^2} |z-c| \right\} \\
& + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos k_n(y-h) \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + k_n^2} |z-c| \right\} \\
& + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \cos k_n(y-h) \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2 + k_n^2} |z-c| \right\} \quad (3.5)
\end{aligned}$$

ここに A_{mn}, B_{mn} は未知の積分定数であり, m_c, m_s は

$$\begin{aligned}
m_c &= \left[\frac{l}{\pi} k_0 \right] = \frac{l}{\pi} k_0 \text{ を超えない最大の整数} \\
m_s &= \left[\frac{l}{\pi} k_0 + \frac{1}{2} \right] \quad (3.6)
\end{aligned}$$

で定義される非負の整数とする。また k_n は

$$\begin{aligned}
k_0 \tanh k_0 h &= K \quad (0 < k_0) \\
k_n \tan k_n h &= -K \quad (0 < k_1 < k_2 < k_3 < \dots) \quad (3.7)
\end{aligned}$$

の解とする。(3.4b) および $\delta(x-a)\delta(y-b)$ の (3.5) 式に対応する一般 Fourier 級数展開による表現:

$$\begin{aligned}
& \delta(x-a)\delta(y-b) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_m k_0 \cos \frac{m\pi a}{l} \cosh k_0(b-h)}{l(k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h)} \cos \frac{m\pi x}{l} \cosh k_0(y-h) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2k_0 \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cosh k_0(b-h)}{l(k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h)} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \cosh k_0(y-h) \\
&+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m k_n \cos \frac{m\pi a}{l} \cos k_n(b-h)}{l(k_n h + \sin k_n h \cos k_n h)} \cos \frac{m\pi x}{l} \cos k_n(y-h) \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cos k_n(b-h)}{l(k_n h + \sin k_n h \cos k_n h)} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \cos k_n(y-h), \quad (3.8)
\end{aligned}$$

where

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{for } m=0 \\ 2 & \text{for } m=1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.9)$$

により, 未知の積分定数 A_{mn}, B_{mn} を定めることができる。すなわち次式を得る。

$$\begin{aligned}
G &= \begin{Bmatrix} G^f \\ G^b \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2\pi i \sum_{0 \leq m \leq m_c} \frac{\varepsilon_m \cos \frac{m\pi a}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}}{\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2}} \exp \left\{ -i \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2} |z-c| \right\} \\
+ 2\pi \sum_{m_c+1 \leq m} \frac{2 \cos \frac{m\pi a}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}}{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - k_0^2}} \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 - k_0^2} |z-c| \right\} \\
- 2\pi i \sum_{1 \leq m \leq m_s} \frac{2 \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l}}{\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2}} \exp \left\{ -i \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2} |z-c| \right\} \\
+ 2\pi \sum_{m_s+1 \leq m} \frac{2 \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l}}{\sqrt{\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2 - k_0^2}} \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2 - k_0^2} |z-c| \right\} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{k_0 \cosh k_0(b-h)}{l(k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h)} \cosh k_0(y-h) \\
& + 2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_m k_n \cos \frac{m\pi a}{l} \cos k_n(b-h)}{l \sqrt{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + k_n^2 (k_n h + \sin k_n h \cos k_n h)}} \\
& \cdot \cos \frac{m\pi x}{l} \cos k_n(y-h) \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + k_n^2} |z-c| \right\} \\
& + 2\pi \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cos k_n(b-h)}{l \sqrt{\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}\right)^2 + k_n^2 (k_n h + \sin k_n h \cos k_n h)}} \\
& \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \cos k_n(y-h) \exp \left\{ -\sqrt{\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}\right)^2 + k_n^2} |z-c| \right\} \quad (3.10)
\end{aligned}$$

(3.10)式の G の表現においては

$$\begin{cases} m = \frac{l}{\pi} k_0 & (m=0, 1, 2, \dots) \\ m = \frac{l}{\pi} k_0 + \frac{1}{2} & (m=1, 2, \dots) \end{cases} \quad (3.11 a)$$

のとき、すなわち

$$k_0 l = \frac{n\pi}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.11 b)$$

のときを除外する。このとき G は発散する。これは

$$\frac{\omega_n^2}{g} = \frac{n\pi}{2l} \tanh \frac{n\pi h}{2l} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (3.12)$$

で定義される ω_n を固有円周波数とする rectangular canal の自由な水の運動：(速度ポテンシャルを ϕ_n とし
て)

$$\phi_n(x, y, z, t) = \cos \frac{n\pi}{2l} (x-l) \cosh \frac{n\pi}{2l} (y-h) e^{i\omega_n t} \quad (3.13)$$

が存在するため、このような円周波数に対しては、Green 関数を定義できない。またこのようなときの水の運動は、線形理論では取り扱いえないので非線形の水波理論⁹⁾に基づかねばならない。

(3.10)式において $m=0$ の項は

G の $m=0$ の項

$$\begin{aligned}
& = -\frac{1}{l} \left[2\pi i \frac{\cosh k_0(b-h) \cosh k_0(y-h)}{(k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h)} \exp \{-ik_0|z-c|\} \right. \\
& \quad \left. - 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos k_n(b-h) \cos k_n(y-h)}{(k_n h + \sin k_n h \cos k_n h)} \exp \{-k_n|z-c|\} \right] \\
& = -\frac{1}{l} G^{(2)}(y, z, b, c) \quad (3.14)
\end{aligned}$$

と書ける。ここに $G^{(2)}(y, z, b, c)$ は $\log \sqrt{(y-b)^2 + (z-c)^2}$ の特異性を有する2次元的な Green 関数(周期的吹き出し)である²⁾。 $G^{(2)}$ の (x 方向の) 単位長さあたりの吹き出し量は 2π で、canal の幅が $2l$ であるから、 G と $-1/l \cdot G^{(2)}$ は総吹き出し量が等しい。

(3.10)式は $z=c$ でも収束するが、 $z \approx c$ のとき収束が悪くなる。そこで別の形の G の表現を求める。

4 $y=b$ を境にして流体領域を上下に分割して考える方法

$y=b$ を境にして流体領域 F を上下(便宜的にこう呼ぶことにする)に分割して

$$F = F^l \cup F^u$$

$$F^l = \{(x, y, z); -l \leq x \leq l, b \leq y \leq h, -\infty < z < +\infty\} \quad (4.1)$$

$$F^u = \{(x, y, z); -l \leq x \leq l, 0 \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty\}$$

とし、さらにこれに応じて (2.2) 式の解 G を

$$G = \begin{cases} G^l & \text{in } F^l \\ G^u & \text{in } F^u \end{cases} \quad (4.2)$$

と書くことにする。このとき (2.2a) 式をつぎの条件で置き換えることができる (→Appendix A)。すなわち

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G^l = 0 \quad F^l \text{ の内点で} \right. \quad (4.3a)$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G^u = 0 \quad F^u \text{ の内点で} \right. \quad (4.3b)$$

および

$$\begin{cases} G^l - G^u = 0 & \text{on } F^l \cap F^u \end{cases} \quad (4.4a)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial G^l}{\partial y} - \frac{\partial G^u}{\partial y} = -4\pi\delta(x-a)\delta(z-c). \end{cases} \quad (4.4b)$$

(4.3) 式, (4.4) 式, (2.2b-e) 式およびこの場合に適した $\delta(x-a)\delta(z-c)$ の表現:

$$\begin{aligned} \delta(x-a)\delta(z-c) = & \left\{ \frac{1}{2l} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos \frac{m\pi a}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \right. \\ & \left. + \frac{1}{2l} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \right\} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(z-c) dk \end{aligned} \quad (4.5)$$

に注意して解くと (→Appendix B) 次式を得る。

$$G = \begin{cases} G^l \\ G^u \end{cases} = \begin{cases} G^{*l} \\ G^{*u} + iG_W, \end{cases} \quad (4.6)$$

where

$$\begin{aligned} G_W = & \left[-2\pi \sum_{0 \leq m \leq m_e} \frac{\varepsilon_m \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi a}{l} \cos \left\{ \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2} (z-c) \right\}}{\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2}} \right. \\ & \left. - 2\pi \sum_{1 \leq m \leq m_e} \frac{\varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cos \left\{ \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2} (z-c) \right\}}{\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right)^2}} \right] \\ & \cdot \frac{k_0 \cosh k_0(y-h) \cosh k_0(b-h)}{l(k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h)} \end{aligned} \quad (4.7)$$

and

$$\begin{aligned} G^{*l} = & \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi a}{l} \cdot \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\alpha_m(k)(y-h)) \{ \alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)b) - K \sinh(\alpha_m(k)b) \}}{\alpha_m(k) \{ \alpha_m(k) \sinh(\alpha_m(k)h) - K \cosh(\alpha_m(k)h) \}} \cdot \cos k(z-c) dk \\ & + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cdot \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\beta_m(k)(y-h)) \{ \beta_m(k) \cosh(\beta_m(k)b) - K \sinh(\beta_m(k)b) \}}{\beta_m(k) \{ \beta_m(k) \sinh(\beta_m(k)h) - K \cosh(\beta_m(k)h) \}} \cdot \\ & \cdot \cos k(z-c) dk \end{aligned} \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} G^{*u} = & \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi a}{l} \cdot \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\alpha_m(k)(b-h)) \{ \alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)y) - K \sinh(\alpha_m(k)y) \}}{\alpha_m(k) \{ \alpha_m(k) \sinh(\alpha_m(k)h) - K \cosh(\alpha_m(k)h) \}} \cdot \cos k(z-c) dk \\ & + \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cdot \\ & \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\beta_m(k)(b-h)) \{ \beta_m(k) \cosh(\beta_m(k)y) - K \sinh(\beta_m(k)y) \}}{\beta_m(k) \{ \beta_m(k) \sinh(\beta_m(k)h) - K \cosh(\beta_m(k)h) \}} \cdot \\ & \cdot \cos k(z-c) dk \end{aligned} \quad (4.8b)$$

ただし m_c, m_s は (3.6) 式で定義してある。また $\oint$ は積分の主値を意味するものとし、 $\alpha_m(k), \beta_m(k)$ は

$$\begin{aligned}\alpha_m(k) &= \sqrt{\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 + k^2} \\ \beta_m(k) &= \sqrt{\left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}\right)^2 + k^2}\end{aligned}\quad (4.9)$$

とする。

G^{*l}, G^{*u} を少し変形してみよう。そこで

$$\begin{aligned}& \alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)b) - K \sinh(\alpha_m(k)b) \\ &= \frac{\sinh(\alpha_m(k)b)}{\cosh(\alpha_m(k)h)} \{ \alpha_m(k) \sinh(\alpha_m(k)h) - K \cosh(\alpha_m(k)h) \} \\ &+ \frac{\alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)(b-h))}{\cosh(\alpha_m(k)h)}\end{aligned}\quad (4.10)$$

などの関係を (4.8) 式に代入すると

$$G^* = \begin{cases} G^{*l} \\ G^{*u} \end{cases} = \begin{cases} G_1^{*l} \\ G_1^{*u} \end{cases} + G_2^* \quad (4.11)$$

where

$$\begin{aligned}G_1^{*l} &= \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi a}{l} \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\alpha_m(k)(y-h)) \sinh(\alpha_m(k)b)}{\alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)h)} \cos k(z-c) dk \\ &+ \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\beta_m(k)(y-h)) \sinh(\beta_m(k)b)}{\beta_m(k) \cosh(\beta_m(k)h)} \cos k(z-c) dk\end{aligned}\quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned}G_1^{*u} &= \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi a}{l} \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\alpha_m(k)(b-h)) \sinh(\alpha_m(k)y)}{\alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)h)} \cos k(z-c) dk \\ &+ \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cdot \\ &\cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh(\beta_m(k)(b-h)) \sinh(\beta_m(k)y)}{\beta_m(k) \cosh(\beta_m(k)h)} \cos k(z-c) dk\end{aligned}\quad (4.12b)$$

and

$$\begin{aligned}G_2^* &= \frac{2}{l} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \cos \frac{m\pi x}{l} \cos \frac{m\pi a}{l} \cdot \\ &\cdot \oint_0^{\infty} \frac{\cosh(\alpha_m(k)(y-h)) \cosh(\alpha_m(k)(b-h)) \cos k(z-c) dk}{\cosh(\alpha_m(k)h) \{ \alpha_m(k) \sinh(\alpha_m(k)h) - K \cosh(\alpha_m(k)h) \}} \\ &+ \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \cdot \\ &\cdot \oint_0^{\infty} \frac{\cosh(\beta_m(k)(y-h)) \cosh(\beta_m(k)(b-h)) \cos k(z-c) dk}{\cosh(\beta_m(k)h) \{ \beta_m(k) \sinh(\beta_m(k)h) - K \cosh(\beta_m(k)h) \}}\end{aligned}\quad (4.13)$$

を得る。 G_2^* は流体領域 F のいたる所で正則な調和関数であり、

$$G_1^* = \begin{cases} G_1^{*l} & \text{in } F^l \\ G_1^{*u} & \text{in } F^u \end{cases} \quad (4.14)$$

は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G_1^* = 0 \quad -l < x < l, \quad 0 < y < h, \quad -\infty < z < +\infty, \quad \text{except } (a, b, c)$$

$$\begin{aligned}
G_1^* &= 1/\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} \text{ の特異性 at } (a, b, c) \\
\frac{\partial G_1^*}{\partial x} &= 0 \quad x = \pm l, \quad 0 < y < h, \quad -\infty < z < +\infty \\
G_1^* &= 0 \quad -l < x < l, \quad y = 0, \quad -\infty < z < +\infty \\
\frac{\partial G_1^*}{\partial y} &= 0 \quad -l < x < l, \quad y = h, \quad -\infty < z < +\infty \\
G_1^* &\rightarrow 0 \quad \text{as } z \rightarrow \pm\infty
\end{aligned} \tag{4.15}$$

を満足する。

(4.8) 式および (4.12) 式は、 $y=b$ でも式中の積分は存在するが、 $y \approx b$ のとき数値計算上の困難がある。積分路を虚軸に移すと (3.10) 式を得る。

5 $x=a$ を境にして流体領域を左右に分割して考える方法

$x=a$ を境にして流体領域 F を左右 (便宜的にこう呼ぶことにする) に分割して

$$\begin{aligned}
F &= F^L \cup F^R \\
F^L &= \{(x, y, z); a \leq x \leq l, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < +\infty\} \\
F^R &= \{(x, y, z); -l \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h, -\infty < z < +\infty\}
\end{aligned} \tag{5.1}$$

とする。これに応じて (2.2) 式の解 G を

$$G = \begin{cases} G^L & \text{in } F^L \\ G^R & \text{in } F^R \end{cases} \tag{5.2}$$

と書くことにする。このとき (2.2a) 式をつぎの条件で置き換えることができる (→ **Appendix A**)。すなわち

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G^L &= 0 & F^L \text{ の内点で} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) G^R &= 0 & F^R \text{ の内点で} \end{aligned} \right. \tag{5.3 a}$$

$$\tag{5.3 b}$$

および

$$\begin{cases} G^L - G^R = 0 & \text{on } F^L \cap F^R \\ \frac{\partial G^L}{\partial x} - \frac{\partial G^R}{\partial x} = -4\pi\delta(y-b)\delta(z-c). \end{cases} \tag{5.4 a}$$

$$\tag{5.4 b}$$

(5.3) 式, (5.4) 式, (2.2b-e) 式およびこの場合に適した $\delta(y-b)\delta(z-c)$ の表現:

$$\begin{aligned}
\delta(y-b)\delta(z-c) &= \left\{ \frac{2k_0 \cosh k_0(b-h)}{k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h} \cosh k_0(y-h) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k_n \cos k_n(b-h)}{k_n h + \sin k_n h \cos k_n h} \cos k_n(y-h) \right\} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos k(z-c) dk
\end{aligned} \tag{5.5}$$

に注意して解くと (→ **Appendix C**) 次式を得る。

$$G = \begin{cases} G^L \\ G^R \end{cases} = \begin{cases} G^{*L} \\ G^{*R} \end{cases} + iG_w \tag{5.6}$$

where (G_w は (4.7) 式により既に定義されている)

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} G^{*L} \\ G^{*R} \end{aligned} \right\} &= \frac{-8k_0 \cosh k_0(b-h)}{k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h} \cosh k_0(y-h) \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cos \{\sqrt{k_0^2 - k^2}(a \pm l)\}}{\sqrt{k_0^2 - k^2} \sin \{2\sqrt{k_0^2 - k^2} l\}} \cos \{\sqrt{k_0^2 - k^2}(x \mp l)\} \cos k(z-c) dk \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8k_n \cos k_n(b-h)}{k_n h + \sin k_n h \cos k_n h} \cos k_n(y-h) \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^{\infty} \frac{\cosh \{\sqrt{k^2 + k_n^2}(a \pm l)\}}{\sqrt{k^2 + k_n^2} \sinh \{2\sqrt{k^2 + k_n^2} l\}} \cosh \{\sqrt{k^2 + k_n^2}(x \mp l)\} \cos k(z-c) dk.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

(5.7) 式は、 $x=a$ でも式中の積分は存在するが、 $x \approx a$ のとき数値計算上の困難がある。積分路を虚軸に移すと (3.10) 式を得る。

6 考察および数値計算結果

(3・10) 式の表現に基づいて、 G を数値計算した結果を以下に述べる。いずれも

$$\begin{aligned} 2l &= \text{the breadth of the rectangular canal} = 1 \\ h &= \text{the depth of water} = 0.5 \end{aligned} \quad (6.1)$$

の場合である。側壁が無い場合、すなわち $2l = \infty$ の場合の進行波の波長を λ とすると

$$k_0 \lambda = 2\pi \quad (6.2)$$

したがって

$$\frac{2l}{\lambda} = \frac{k_0 l}{\pi} \quad (6.3)$$

である。(3・11b) 式より

$$\frac{2l}{\lambda} = \frac{n}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (6.4)$$

では、resonance が起こる。

$$0 < \frac{2l}{\lambda} < 0.5 \quad (6.5)$$

の範囲では (3・6) 式で $m_c = 0$, $m_s = 0$ であるので (3・10) 式において、進行波は唯1つで、波長 λ の canal の長さ方向 (z 軸方向) に沿って進む2次元的正弦波である。したがってこの範囲内では、いかなる造波機を用いても水槽には、きれいな波が発生することになる。

Fig. 2a The real part of G on the plane $y=0.25$ when $1/\lambda=0.35$, $a=0$, $b=0.25$ and $c=0$

Fig. 2c A sketch of the real part of G on the plane $y=0.25$ when $1/\lambda=0.35$, $a=0$, $b=0.25$ and $c=0$

Fig. 2b The real part of G on the plane $z=\lambda/100$ when $1/\lambda=0.35$, $a=0$, $b=0.25$ and $c=0$

$$0.5 < \frac{2l}{\lambda} < 1.0 \quad (6.6)$$

の間では (3.6) 式において $m_c=0$, $m_s=1$ であるから, 上述の波の他に, λ よりも波長の長い $x=0$ の面に対して反対称な (canal の幅方向に対して1節の) 波が現われる。

$$1.0 < \frac{2l}{\lambda} < 1.5 \quad (6.7)$$

では, $m_c=1$, $m_s=1$ であるので, さらに波長の長い $x=0$ の面に対して対称な (canal の幅方向に対して2節の) 波が現われる。以下同様にして同調点を1つ越えるごとに, 進行波の成分が1つずつ増えることになる。このようなことを利用すると長水槽に複雑な波を発生させることができる⁴⁾。

図 2a-b に, $1/\lambda=0.35$ で $a=0$, $b=0.25$, $c=0$ のときの G の実部の計算値を示す。この例は, $x=0$ の面に対して G が対称になる場合である。(6.5) 式を満たしているので, local wave が急速に減衰して, z 軸に沿って進む2次元的な正弦波になることが分かる。図 2c は, これを視覚に訴えるようにスケッチしたものである。

図 3a-c は, 図 2a-c と同じことを $a=0$ ではなくて $a=0.25$ として計算した場合である。この場合には, G は $x=0$ の面に対して対称でなくなるが, 進行波は図 3a あるいは図 3c より分かるように, $a=0$ のときとまったく同じである。

図 4a-b は, $1/\lambda=0.75$ のときの自由表面上の波形を示す。(6.6) 式を満足していて $a=0.25$ であるので, $x=0$ の面に関して反対称な λ よりも長い波長の波が現われて, 波長 λ の2次元的な波に重なっていることが分かる。

Fig. 3a The real part of G on the plane $y=0.25$ when $1/\lambda=0.35$, $a=0.25$, $b=0.25$ and $c=0$

Fig. 3c A sketch of the real part of G on the plane $y=0.25$ when $1/\lambda=0.35$, $a=0.25$, $b=0.25$ and $c=0$

Fig. 3b The real part of G on the plane $z=\lambda/100$ when $1/\lambda=0.35$, $a=0.25$, $b=0.25$ and $c=0$

Fig. 4 a A wave profile when $1/\lambda=0.75$ Fig. 4 b A sketch of a wave profile when $1/\lambda=0.75$ Fig. 5 a A wave profile when $1/\lambda=1.25$ Fig. 5 b A sketch of a wave profile when $1/\lambda=1.25$

図5a-bは、 $1/\lambda=1.25$ のときの自由表面上の波形を示す。(6.7)式を満足していて $a=0$ であるので、 $x=0$ の面に対して対称な λ よりも長い波長の波が現われて、波長 λ の2次元的な波に重なっていることが分かる。

7 結 論

本研究において以下の結論を得た。

(1) Rectangular canal 中にある周期的吹き出しによる速度ポテンシャルを、独自の方法により求めた。その結果を(3.10)式、(4.6-8)式、(5.6-7)式に与えた。これらの式は、それぞれ $z \approx c$ 、 $y \approx b$ 、 $x \approx a$ で数値計算に困難を生ずる。これらの表現を場合により使い分けることが望ましい。

(2) 当然のことであるが、側壁があるため幅方向の対称性がなくなる。

(3) canal の幅 $2l$ と、側壁が無い場合の進行波の波長 λ との比が、一定の関係にあるとき、すなわち

$$\frac{2l}{\lambda} = \frac{n}{2} \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (7.1)$$

のとき、幅方向に n 個の節を有する高節波の resonance が起る ((3.11-3) 式を参照)。resonance frequency を1つ越すごとに、1つずつ進行波が増加する。また

$$0 < \frac{2l}{\lambda} < 0.5 \quad (7.2)$$

が満たされる範囲内では、進行波は常に canal の長さ方向に沿う波長 λ の2次元的な正弦波となる。したがってこの範囲内では、いかなる造波機を用いても水槽にはきれいな波が発生する。

$$0.5 < \frac{2l}{\lambda} \quad (7.3)$$

のときには、高節波を利用して長水路に複雑な波を発生させることができる⁴⁾。

(4) canal 中での船の周期運動は、resonance frequency の近傍で線形理論では取り扱えなくなる⁵⁾。

(5) (3.10) 式の表現に基づいて G を具体的に数値計算して読者の参考に供した。結果は §6 に示した。

謝 辞

本研究にあたり、九州大学の田才福造教授、防衛大学校の別所正利教授および日立造船(株)技術研究所の高木又男博士の貴重なご助言をいただきました。東京大学生産技術研究所の前田久明助教授には、参考文献3)を提供していただきました。数値計算は、日立造船(株)技術研究所の田中敬子氏に行なっていただきました。以上の方々に深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) K. Eggers: On the Determination of the Wave Resistance of a Ship Model by an Analysis of Its Wave System, Proceedings of International Seminar on Wave Resistance Theory, Ann Arbor, (1963), pp. 1313—52.
- 2) 一色 浩, 前田久明: 周期的吹き出しの公式とその数値計算法, 関西造船協会誌, 第157号 (1975/6).
- 3) N. N. Moiseev: On the theory of nonlinear vibrations of a liquid of finite volume, Appl. Math. Mech. (PMM), Vol. 22, No. 5 (1958), pp. 860—72.
- 4) 栗谷陽一: 長水槽における高節波の生成について, 九州大学応用力学研究所報, 第17号 (1961), pp. 31—9.

Appendix A

$z=c$ で流体領域 F を前後に分割して考える §3 の場合を例にして考えてみよう。このときつぎのことがいえる。
すなわち

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G = -4\pi\delta(x-a)\delta(y-b)\delta(z-c) \quad F \text{ の内点で} \quad (\text{A} \cdot 1)$$

を

$$\left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G^f &= 0 & F^f \text{ の内点で} & (\text{A} \cdot 2a) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)G^b &= 0 & F^b \text{ の内点で} & (\text{A} \cdot 2b) \end{aligned} \right.$$

and

$$\begin{cases} G^f - G^b = 0 & F^f \cap F^b \text{ の内点で} & (\text{A} \cdot 3a) \\ \frac{\partial G^f}{\partial z} - \frac{\partial G^b}{\partial z} = -4\pi\delta(x-a)\delta(y-b) & & (\text{A} \cdot 3b) \end{cases}$$

Fig. A.1 Definition of V , V^f , V^b and Γ

で置き換えることができる。

証明) (A.1) 式が成り立つとき, (A.3b) 式がいえることを証明する。その他のことは明らかである。図 A.1 に示すように点 (a, b, c) を中に含む, F 内にとられた部分領域 V を考える。 V の境界を ∂V とし, ∂V の外向き法線を n で表わす。 $c \leq z$ にある V の部分を V^f とし, $z \leq c$ にある V の部分を V^b とする。 V^f , V^b の境界を ∂V^f , ∂V^b としよう。さらに V^f と V^b の接面を Γ とする。すなわち

$$V = V^f \cup V^b \quad (\text{A} \cdot 4a)$$

$$\Gamma = \partial V^f \cap \partial V^b \quad (\text{A} \cdot 4b)$$

$$\partial V = \partial V \cap \partial V^f + \partial V \cap \partial V^b \quad (\text{A} \cdot 4c)$$

である。まず (A.1) 式より

$$\iiint_V \left(\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} \right) dV = -4\pi \quad (\text{A} \cdot 5)$$

が成り立つ。体積分を面積分に換えて (A.4c) 式に注意すると

$$\iint_{\partial V \cap \partial V^f} \frac{\partial G^f}{\partial n} d(\partial V) + \iint_{\partial V \cap \partial V^b} \frac{\partial G^b}{\partial n} d(\partial V) = -4\pi \quad (\text{A} \cdot 6)$$

がいえる。つぎに V^f の内部に完全に含まれる領域 $V^f(\epsilon)$ を考えて, これを V^f に収束させる操作を考えてみよう。

すると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) G^f = 0 \quad \text{in } V^f(\varepsilon) \quad (\text{A} \cdot 7)$$

であるから

$$\iint_{\partial V \cap \partial V^f} \frac{\partial G^f}{\partial n} d(\partial V) = \iint_r \frac{\partial G^f}{\partial z} d\Gamma \quad (\text{A} \cdot 8)$$

を得る。同様にして

$$\iint_{\partial V \cap \partial V^b} \frac{\partial G^b}{\partial n} d(\partial V) = - \iint_r \frac{\partial G^b}{\partial z} d\Gamma \quad (\text{A} \cdot 9)$$

がいえる。(A・8) 式, (A・9) 式を (A・6) 式に代入すると

$$\iint_r \left(\frac{\partial G^f}{\partial z} - \frac{\partial G^b}{\partial z} \right) d\Gamma = -4\pi \quad (\text{A} \cdot 10)$$

を得る。 V が点 (a, b, c) を含まないときには (A・10) 式の右辺は零であるから, (A・3b) 式がはいったことになる。(A・2) 式, (A・3) 式が成り立つとき (A・1) 式がいえることも簡単に導びける (証明終り)。

Appendix B

(4・8a) 式, (4・8b) 式で定義された G^{*L}, G^{*u} の $z \rightarrow \pm\infty$ での漸近展開式について考えてみよう。たとえば

$$\begin{aligned} I_B &= \oint_0^\infty \frac{\cosh(\alpha_m(k)(y-h)) \{ \alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)b) - K \sinh(\alpha_m(k)b) \}}{\alpha_m(k) \{ \alpha_m(k) \sinh(\alpha_m(k)h) - K \cosh(\alpha_m(k)h) \}} \cdot \cos k(z-c) dk \\ &= R_e \left[\oint_0^\infty \frac{\cosh(\alpha_m(k)(y-h)) \{ \alpha_m(k) \cosh(\alpha_m(k)b) - K \sinh(\alpha_m(k)b) \}}{\alpha_m(k) \{ \alpha_m(k) \sinh(\alpha_m(k)h) - K \cosh(\alpha_m(k)h) \}} \cdot e^{ik|z-c|} dk \right] \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 1)$$

と考へて, 複素 k 平面の積分路を実軸から虚軸に変える過程で, つぎの漸近展開式を得る。すなわち

$$I_B \begin{cases} \sim -\pi \frac{k_0 \cosh k_0(y-h) \cosh k_0(b-h)}{\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} (k_0 h + \sinh k_0 h \cosh k_0 h)} \sin \left(\sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} |z-c| \right) & \text{for } 0 \leq m < \frac{k_0 l}{\pi} \\ \rightarrow \text{exponentially zero} & \text{for } \frac{k_0 l}{\pi} < m \end{cases} \quad (\text{B} \cdot 2)$$

を得る。(B・1) 式において, y と b を入れ換えても (B・2) 式の結果を得る。

Appendix C

(5・7) 式で定義された G^{*L}, G^{*R} の $z \rightarrow \pm\infty$ での漸近展開式について考えてみよう。そこで

$$\begin{aligned} I_C &= \oint_0^\infty \frac{\cos \{ \sqrt{k_0^2 - k^2} (a \pm l) \} \cos \{ \sqrt{k_0^2 - k^2} (x \mp l) \}}{\sqrt{k_0^2 - k^2} \sin \{ 2\sqrt{k_0^2 - k^2} l \}} \cos k(z-c) dk \\ &= R_e \left[\oint_0^\infty \frac{\cos \{ \sqrt{k_0^2 - k^2} (a \pm l) \} \cos \{ \sqrt{k_0^2 - k^2} (x \mp l) \}}{\sqrt{k_0^2 - k^2} \sin \{ 2\sqrt{k_0^2 - k^2} l \}} e^{ik|z-c|} dk \right] \end{aligned} \quad (\text{C} \cdot 1)$$

について考える。(C・1) 式の右辺の積分の被積分関数の分母をべき級数に展開すると

$$\sqrt{k_0^2 - k^2} \sin \{ 2\sqrt{k_0^2 - k^2} l \} = -(k-k_0)(k+k_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2l)^{2n+1} (k^2 - k_0^2)^n}{(2n+1)!} \quad (\text{C} \cdot 2)$$

であるので, $k=k_0$ は被積分関数の 1 位の極であることがわかる。その他に

$$2\sqrt{k_0^2 - k^2} l = m\pi \quad \left(1 \leq m < \frac{2k_0 l}{\pi} \right) \quad (\text{C} \cdot 3)$$

の極がある。このことより, つぎの $z \rightarrow \pm\infty$ での漸近展開式を得る。

$$\begin{aligned} I_C &\sim \pi \sum_{0 \leq m \leq m_c} \frac{\varepsilon_m \cos \frac{m\pi a}{l} \cos \frac{m\pi x}{l}}{4l \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2}} \sin \left\{ \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} |z-c| \right\} \\ &\quad + \pi \sum_{1 \leq m \leq m_s} \frac{\varepsilon_m \sin \frac{(2m-1)\pi a}{2l} \sin \frac{(2m-1)\pi x}{2l}}{4l \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2}} \sin \left\{ \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{(2m-1)\pi}{2l}\right)^2} |z-c| \right\} \end{aligned} \quad (\text{C} \cdot 4)$$