(昭和 50 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

残留応力の有限要素法に基づく 測定原理と推定値の信頼性

正員 上 田 幸 雄* 正員 福 田 敬 二*
正員 中 長 啓 治** 正員 円 道 節 夫***

A New Measuring Method of Residual Stresses with the Aid of
Finite Element Method and Reliability of Estimated Values

by Yukio Ueda, *Member* Keiji Fukuda, *Member*
Keiji Nakacho, *Member* Setsuo Endo, *Member*

Summary

In estimation of residual stresses, the existing methods are mainly based on the idea that variation of strains on the surface of the object is measured by sectioning continuously until there is no variation of the measured strains, which corresponds to the residual stresses. In this kind of method, some definite mathematical relation between the variation of stresses and the released surface force is required. This kind of relation was obtained for the cases where the geometry, boundary condition, and pattern of residual stress distribution are simple. This difficulty is solved when numerical analytical methods, such as the finite element method, etc. are applied.

In this paper, a general theory is developed based on the finite element method. With this method, three dimensional residual stresses can be measured. Furthermore, reliability of estimated values of residual stresses by this method is mathematically studied when error is contained in the measured strains.

1 緒 言

溶接構造物に生じた残留応力分布を知ることは強度評価や溶接割れなどの問題に関連して設計および工作上重要である。

ところで、物体表面のひずみ（応力）を直接計測する手段として、ストレイン・ゲージ、X線、光弾性、モアレ等があり、これらを利用して物体内部の残留応力を推定する方法が種々考案されている。たとえば、逐次穿孔法 (Sachs 法)、局部弛緩法 (Mathar 法)、Rosenthal による分割法等がある¹⁾。これらの方法はいずれも計測対象の一部を切断し、それに伴って生じる対象表面でのひずみの変化を計測することにより、切断面で解放された応力を推定する方法で、ひずみの変化が生じなくなるまで切断を繰り返し、応力の全弛緩量から残留応力を求めようとする方法である。したがって、切断面で解放される応力と任意の点で弛緩される応力との関係が予め必要である。しかしながら、解放される残留応力の分布、対象物の境界条件を常に満足する解析的関係を得ることはいたって困難であるので、従来の方法では対象物により解析解もしくは近似式を適宜選択して用いていた。このため、選ばれた関係式は極めて限られた条件に対してのみ有効であり、特別な場合には3次元残留応力も計測可能であるが、一般的でない。また、関係式の制約条件を越えて適用した場合には、その結果の信頼性は非常に乏しい。この意味において、一般的な残留応力の測定法は確立されていない。

* 大阪大学溶接工学研究所

** 大阪大学大学院

*** 日本鋼管(株)

しかし、上述の関係が一般的に与えられれば、少数の点におけるひずみの計測から対象全体の残留応力分布を推定することが必然的に可能であり、實際上極めて有用である。これに付随した問題として、計測データには一般に誤差を含んでいると考えるべきであるが、このようなデータをもとにして対象物全体の応力分布を推定する際誤差の伝播を伴うため、推定値に対する信頼性を検討しておく必要がある。

そこで、本研究では有限要素法をもとにして上述の諸点を解決し、一般的な残留応力測定法を提案し、その原理を示す。さらに、統計学的手法を導入することにより、計測値に誤差を含む場合にも適用できるように理論を一般化する。また、ひずみの計測値にランダムな誤差を含む場合と含まない場合について、2, 3の数値実験を行ない、この計測法の理論の妥当性と有用性を示す。

2 残留応力測定の方法

自己平衡した物体に残留応力がある場合には、この応力分布を作っているクイチガイが存在する。これを普通残留固有ひずみ（以下、固有ひずみ）という。ところで、残留応力を間接的に推定する方法として次の2つの原理が考えられる。1つは緒言でも述べた切断面に働いていた力を媒介として、任意の点の応力の弛緩量を関係づける方法であり、他は固有ひずみを直接推定しようとする方法である。前者の切断面に働く力は固有ひずみによって作られているものであるから、これらは本質的に同一のものであるが、取り扱い上かなり異なるため、ここでは前者を切断面力法、後者を固有ひずみ法と呼んで区別し、それぞれについて以下にその原理を示す。

2.1 切断面力法

自己平衡している物体各点の弾性ひずみ ε_{ij} は一般に次式のような関数で与えられる。

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = R_{ij}^*(\mathbf{x}; \mathbf{e}^*, \mathbf{V}) \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{x}$: 物体内の任意の点を表わす位置ベクトル、 $\mathbf{e}^*$: 固有ひずみベクトル、 $\mathbf{V}$: 物体形状ベクトル
Fig.1 に示すように、形状 $\mathbf{V}_1$ の面 A を切断すると自由表面 A_u , A_l を生じて形状 $\mathbf{V}_2$ になる。このとき、一般にひずみエネルギーは減少し各点の弾性ひずみは一部解放される（ただし、切断の仕方によっては応力の再分布のため一部で塑性化を起こすことがあるが、本論文ではこのような塑性化が新たに生じないように切断するものとする）。すなわち、

$$\varepsilon_{ij}^I(\mathbf{x}) = R_{ij}^*(\mathbf{x}; \mathbf{e}^*, \mathbf{V}_1) \quad (2)$$

$$\varepsilon_{ij}^{II}(\mathbf{x}) = R_{ij}^*(\mathbf{x}; \mathbf{e}^*, \mathbf{V}_2) \quad (3)$$

弛緩されたひずみ $\Delta\varepsilon_{ij}$ は

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{II} - \varepsilon_{ij}^I = R_{ij}^*(\mathbf{x}; \mathbf{e}^*, \mathbf{V}_2) - R_{ij}^*(\mathbf{x}; \mathbf{e}^*, \mathbf{V}_1) \quad (4)$$

切断によって起こる変化を弾性的と仮定しているため、弛緩応力 $\Delta\sigma_{ij}$ は弾性行列 $[D](=D_{ijkl})$ により

$$\{\Delta\sigma_{ij}(\mathbf{x})\} = [D]\{-\Delta\varepsilon_{kl}(\mathbf{x})\} \quad (5)$$

一方、切断面 A 上の方向余弦 $\mathbf{n} = [n_1, n_2, n_3]^T$ で表わせれば、切断前の A 上に働いていた力 $\mathbf{P} = [P_1, P_2, P_3]^T$ は

$$P_i = \sigma_{ij}n_j = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}n_j \quad \text{at } M(\mathbf{x}^A) \in A \quad (6)$$

ここで、 M は A 上の任意の点 $\mathbf{x}^A$ であり、切断後自由境界となるため(6)式の $\mathbf{P}$ は完全に解放される。

$$0 = D_{ijkl}\varepsilon_{kl}n_j \quad \text{at } M \in A \quad (6)'$$

$$\therefore P_i = -D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl}n_j \quad (7)$$

弛緩ひずみ $\Delta\varepsilon_{ij}$ は切断面 A 上の表面力 $\mathbf{P}(\mathbf{x}^A)$ が解放されたために生じたものである。したがって、弛緩ひずみと切断面力 $\mathbf{P}(\mathbf{x}^A)$ は次のような関数関係にある。

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = R_{ij}(\mathbf{x}; \mathbf{P}(\mathbf{x}^A)) \quad (8)$$

A 上の切断面力 $\mathbf{P}(\mathbf{x}^A)$ の分布は本来連続的であるが、 q コのパラメータ $\{F\} = [F_1, F_2, \dots, F_q]^T$ をもつ級数で表示（離散化する場合も含む）すれば次式のようになる。

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}^A) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^A; F_1, F_2, \dots, F_q) \quad (9)$$

(9)式を(8)式に代入すると $\Delta\varepsilon_{ij}$ は q コのパラメータ $\{F\}$ と座標 $\mathbf{x}$ の関数である。これを h_{ij} なる関数で表わすと

$$\Delta\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = h_{ij}(\mathbf{x}; F_1, F_2, \dots, F_q) \quad (10)$$

この式を用いると計測可能な位置で弛緩ひずみを q コ計測 ($\Delta m\varepsilon$) すると切断面力のパラメータ $\{F\}$ を決定する

ための連立方程式が構成される。

$$\left. \begin{aligned} \Delta_m \varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_1) &= h_{IJ}(\mathbf{x}_1; F_1, \dots, F_q) \\ \Delta_m \varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_2) &= h_{IJ}(\mathbf{x}_2; F_1, \dots, F_q) \\ &\dots\dots\dots \\ \Delta_m \varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_q) &= h_{IJ}(\mathbf{x}_q; F_1, \dots, F_q) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ただし、 (I, J) は各測定点におけるひずみの特定の成分を表わすものとする。ここで、(11)式が独立な式からなり、かつ h の逆関数 g_i が定まるとすれば

$$F_i = g_i(\Delta_m \varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_1), \Delta_m \varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_2), \dots, \Delta_m \varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_q)) \quad (i=1 \sim q) \quad (12)$$

この決定された切断面力のパラメータ $\{F\}$ を (10) 式に代入することにより計測していない点における弛緩ひずみ、更に弛緩応力も求めることができる。

2.2 固有ひずみ法

前述の切断面力法は形状 $\mathbf{V}$ の変化による物体各点のひずみの応答を利用した考え方であるが、(1)式は元来、固有ひずみ分布と各点のひずみ分布との関係を表わす関数であるから、ここでは固有ひずみ分布を決定することより各点のひずみ（応力）分布を推定する方法を述べる。

切断面力法においては新たに自由境界となる面 A 上の表面力を級数表示あるいは離散化したが、本節では固有ひずみに対して同様の取り扱いをする。未知の固有ひずみ分布を q コのパラメータ $\{\varepsilon^*\}$ によって級数表示（離散化の場合は q 成分の固有ひずみ）すると

$$\mathbf{e}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^*(\mathbf{x}; \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_q^*) \quad (13)$$

これを (1) 式に代入すると、弾性ひずみは座標 $\mathbf{x}$ 、パラメータ $\{\varepsilon^*\}$ 、物体形状 $\mathbf{V}$ の関数である。これを h_{ij}^* なる関数で表わすことにすると

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) = h_{ij}^*(\mathbf{x}; \varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*, \dots, \varepsilon_q^*, \mathbf{V}) \quad (14)$$

上式は (10) 式と同等のものであるから前節と同じように計測ひずみ $m\varepsilon$ が q コあり、かつ逆関数 g_i^* が定まれば

$$\varepsilon_i^* = g_i^*(m\varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_1), \dots, m\varepsilon_{IJ}(\mathbf{x}_q), \mathbf{V}) \quad (15)$$

となり、固有ひずみ分布のパラメータ $\{\varepsilon^*\}$ を決定できる。したがって、(14)式により未計測点のひずみ、更には応力も求めることができる。

以上、残留応力測定の原理として、切断面力法と固有ひずみ法があることを述べたが、いずれの場合も一般的に定式化するためには、それぞれの方法に対して連続関数 $\mathbf{P}$ ((9)式)、 $\mathbf{e}^*$ ((13)式) を級数表示もしくは離散化して q コのパラメータ $\{F\}$ 、 $\{\varepsilon^*\}$ で表わす必要があり、またこれらのパラメータの応答関数 h, h^* を定式化することが要求される。これらの関数はともに (1) 式を基礎としているため、物体形状に依存していることは明らかで、解析解の使用は特殊な場合を除いて一般に不可能である。よって、これらの条件を満足させるには差分法、有限要素法等の数値解析法の適用が考えられるが、これらの方法はいずれも未知量の離散化を前提としており、有限個の測定量と対応させるのに極めて都合が良い。

本論文では幾何学的形状に対して特に有効な有限要素法を採用して、以下の定式化を行なう。

3 有限要素法に基づく残留応力測定法

有限要素法では物体を仮想的に有限個の要素に分割するため、切断面力のパラメータ $\{F\}$ はその切断面内に含まれる節点に働く力（節点力）に、固有ひずみ分布のパラメータ $\{\varepsilon^*\}$ は要素の固有ひずみに相当する。

3.1 切断面力法（節点力法）

切断による片側の自由表面 A_u 上で解放される節点力を $[F] = \{F_1, F_2, \dots, F_q\}^T$ とすれば、もう一方の自由表面 A_l 上に働いていた節点力は $-[F]$ である。切断面以外では節点力は平衡しているため、この切断によって生じた物体各点の節点変位を $\{\Delta u_r\}$ とすると

$$\begin{aligned} [0, [F], -[F]]^T &= [K] \{-\Delta u_r\}, & [K] : \text{剛性行列} \\ \{\Delta u_r\} &= -[K]^{-1} [0, [F], -[F]]^T = -[C_0, C_A, C_B] [0, [F], -[F]]^T \\ &= -[C_A] \{F\} + [C_B] \{F\} = -[C_A - C_B] \{F\} = -[C] \{F\} \end{aligned} \quad (16)$$

全体の変位 $\{\Delta u_r\}$ から各要素の節点変位 $\{\Delta u_r\}^e$ への変換を $[T]^e$ で表わすと（サフィックス e は要素を意味する）

$$\{\Delta u_r\}^e = [T]^e \{\Delta u_r\} \quad (17)$$

弛緩ひずみ $\{\Delta \varepsilon\}^e$, 弛緩応力 $\{\Delta \sigma\}^e$ は

$$\left. \begin{aligned} \{\Delta \varepsilon\}^e &= [B]^e \{\Delta u_r\}^e = -[B]^e [T]^e [C] \{F\} \\ \{\Delta \sigma\}^e &= [D]^e \{-\Delta \varepsilon\}^e = [D]^e [B]^e [T]^e [C] \{F\} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

ここに, $[B]^e$: ひずみ・変位行列

(18)式を物体全体についてまとめると

$$\{\Delta \varepsilon_i\} = [\bar{H}_{ij}] \{F_j\} \quad (i=1 \sim n, j=1 \sim q) \quad (19)$$

ここに, n は物体を仮想的に有限要素に分割した際, 各要素に含まれるひずみ成分を物体全体について合計したものであり, q は切断面上に働く節点力成分数である。計測ひずみの成分数を $m (\leq n)$ とすれば (19) 式は縮小される。このマトリックスを改めて $[H_{ij}]$ と書くこと

$$\{\Delta_m \varepsilon_i\} = [H_{ij}] \{F_j\} \quad (i=1 \sim m, j=1 \sim q) \quad (20)$$

測定方程式 (20) により $\{F_j\}$ が決定されれば, (18) 式を用いることにより物体各点のひずみ, 応力の弛緩量が求まる。このような切断を各点のひずみ, 応力が弛緩されなくなるまで繰り返し, それまでの弛緩量の総和をとれば残留応力が推定される。

3.2 固有ひずみ法

要素における固有ひずみ $\{\varepsilon^*\}^e$ とそれを拘束した時に生じる等価節点力 $\{f\}^e$ との間には次のような関係がある。

$$\{f\}^e = - \int_{V_i} [B]^T [D] \{\varepsilon^*\}^e d(\text{vol}) = -[L]^e \{\varepsilon^*\}^e \quad (21)$$

これを物体全体についてまとめると

$$\{f\} = \sum \{f\}^e = - \sum [L]^e \{\varepsilon^*\}^e = -[L] \{\varepsilon^*\} \quad (22)$$

物体全体の節点変位を $\{u\} (= -\sum \{\Delta u_r\})$, 剛性行列を $[K]$ とすれば

$$0 = [K] \{u\} + \{f\}, \quad \{u\} = [K]^{-1} \{-f\} = [C] \{-f\} = [C][L] \{\varepsilon^*\} \quad (23)$$

要素の全ひずみは弾性ひずみと固有ひずみの和であるから, 変位とひずみ関係は次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\}^e + \{\varepsilon^*\}^e = [B]^e \{u\} = [B]^e [T]^e \{u\} = [B]^e [T]^e [C][L] \{\varepsilon^*\} \quad (24)$$

ここで, 全体の固有ひずみ $\{\varepsilon^*\}$ から各要素の固有ひずみ $\{\varepsilon^*\}^e$ への変換行列を $[U]^e$ で表わすと

$$\{\varepsilon^*\}^e = [U]^e \{\varepsilon^*\} \quad (25)$$

したがって, (24) 式は次のように変形される。

$$\{\varepsilon\}^e = [B]^e [T]^e [C][L] \{\varepsilon^*\} - [U]^e \{\varepsilon^*\} = ([B]^e [T]^e [C][L] - [U]^e) \{\varepsilon^*\} = [H^*]^e \{\varepsilon^*\} \quad (26)$$

また, 応力は

$$\{\sigma\}^e = [D]^e \{\varepsilon\}^e = [D]^e [H^*]^e \{\varepsilon^*\} \quad (27)$$

要素 $A, B, \dots$ の弾性ひずみ, 応力をそれぞれ $\{\varepsilon\}_A^e, \{\varepsilon\}_B^e, \dots$, $\{\sigma\}_A^e, \{\sigma\}_B^e, \dots$, とし物体全体について一括して表わすと

$$\{\varepsilon\} = [[\varepsilon]_A^e, [\varepsilon]_B^e, \dots]^T = [H^*] \{\varepsilon^*\} \quad (28)$$

$$\{\sigma\} = [[\sigma]_A^e, [\sigma]_B^e, \dots]^T = [M'] \{\varepsilon^*\} \quad (29)$$

最も一般的には固有ひずみの成分数 (未知数) q と弾性ひずみの成分総数 n (既知数) は同数で $[H^*], [M']$ は $(n \times n)$ のマトリックスである。しかし, 溶接部材では固有ひずみの発生源は塑性変形によるクイチガイであるため, 溶接線近傍にのみ存在すると考えられる。よって, それ以外の要素では予め固有ひずみが無いとしても差し支えないため零でない固有ひずみ成分 $q (< n)$ を集めて改めて $\{\varepsilon^*\}$ で表わすと, 前述のマトリックスは $(n \times q)$ のマトリックス $[\bar{H}^*], [\bar{M}']$ に縮小される。したがって

$$\{\varepsilon_i\} = [\bar{H}_{ij}^*] \{\varepsilon_j^*\} \quad (i=1 \sim n, j=1 \sim q) \quad (28)'$$

$$\{\sigma_i\} = [\bar{M}_{ij}'] \{\varepsilon_j^*\} \quad (i=1 \sim n, j=1 \sim q) \quad (29)'$$

たとえば, 計測の可能な位置で弾性ひずみを m コ測定すれば, $[\bar{H}_{ij}^*]$ はさらに縮小されて次式を得る。

$$\{\varepsilon_m\} = [H_{ij}^*] \{\varepsilon_j^*\} \quad (i=1 \sim m, j=1 \sim q) \quad (30)$$

この測定方程式から $\{\varepsilon^*\}$ が決定されれば, (28)', (29)' 式を用いてひずみ, 応力分布が未計測点も含めて求まる。

以上のように, 切断面力法, 固有ひずみ法とも測定方程式 (20), (30) は同形で与えられ, 応力分布を求める上で媒介となる $\{F\}, \{\varepsilon^*\}$ を決定するための必要条件は $m \geq q$ を満たすことである。たとえば, $m=q$ で $[H]^{-1}$,

$[H^*]^{-1}$ が存在すれば、一意的に応力分布が求まる。なお、(30)式で $m < q$ のため、固有ひずみ $\{\varepsilon^*\}$ が決定できない場合、物体を一部切断することにより新しい平衡状態を作り、(30)式に準じた関係を新たに求めて測定点の数を増す必要がある。

4 最確値とその信頼区間

測定方程式において、 $m > q$ ならば未知数より式の数が多く、従属な式が $(m-q)$ コ存在する。しかし、一般にはひずみの計測値に誤差を含むため、このような従属な式は存在しない。そこで、 q コの未知量をそれよりも多い m コの式で最も確率的に生じやすい値（最確値）を求め、その信頼区間を決定するため、統計的手法²⁾ を導入する。ただし、ここで考える誤差は偶差であり、誤差の3公理を満たすものである。

なお、切断面力法と固有ひずみ法は同形の測定方程式をもつため、ここでは固有ひずみ法について述べる。

4.1 固有ひずみ法による最確値

弾性ひずみの真の値 $\{\varepsilon\}$ と固有ひずみの真の値 $\{\varepsilon^*\}$ の間には前述の(30)式が成立する。測定した弾性ひずみ $\{m\varepsilon\}$ を $\{\varepsilon\}$ の代りに代入すると、誤差 $\{x\}$ は

$$\{m\varepsilon\} - [H^*]\{\varepsilon^*\} = \{x\} \quad (31)$$

ここで、 $\{\varepsilon^*\}$ の代りに最確値 $\{\hat{\varepsilon}^*\}$ を用いると、残差を $\{v\}$ として次式を得る。

$$\{m\varepsilon\} - [H^*]\{\hat{\varepsilon}^*\} = \{v\} \quad (32)$$

残差の平方和を S とすると、測定が等精度として

$$S = [v]^T [v] \quad (33)$$

最小2乗法により、残差の平方和を最小にするように固有ひずみの最確値 $\{\hat{\varepsilon}^*\}$ を決定する。 $\partial S / \partial \{\hat{\varepsilon}^*\} = 0$ により、(30)式は以下のように正規化される。

$$[H^*]^T \{m\varepsilon\} = [H^*]^T [H^*] \{\hat{\varepsilon}^*\} \quad (\text{正規方程式}) \quad (34)$$

$[H^*]^T [H^*]$ は $(q \times q)$ の正方マトリックスであるので、正則であれば

$$\{\hat{\varepsilon}^*\} = ([H^*]^T [H^*])^{-1} [H^*]^T \{m\varepsilon\} \equiv [G^*] \{m\varepsilon\} \quad (35)$$

となり、固有ひずみの最確値 $\{\hat{\varepsilon}^*\}$ を得る。これにより、(29)'式から全体の残留応力分布の最確値 $\{\hat{\sigma}\}$ は

$$\{\hat{\sigma}\} = [M] \{\hat{\varepsilon}^*\} = [M] [G^*] \{m\varepsilon\} \equiv [N] \{m\varepsilon\} \quad (36)$$

4.2 信頼区間

4.2.1 最確値の精度

単位重みの測定の分散を s^2 、 $\{\hat{\varepsilon}^*\}$ の分散を $\{s^{*2}\}$ 、その重みを $\{p^*\}$ とすると

$$p_i^* s_i^{*2} = s^2 \quad (i=1 \sim q) \quad (37)$$

の関係がある。測定の分散の不偏推定量 $\hat{s}^2$ は

$$\hat{s}^2 = [v]^T [v] / (m-q) = S / (m-q) \quad (38)$$

また、(35)式の $[G^*]$ の成分を g_{ij}^* で表わすと(37)式の重みは次式で与えられる。

$$p_i^* = 1 / \sum_{j=1}^m g_{ij}^{*2} \quad (i=1 \sim q) \quad (39)$$

(38)、(39)式を(37)式に代入することにより、固有ひずみの最確値 $\{\hat{\varepsilon}^*\}$ の不偏分散 $\{\hat{s}^{*2}\}$ が決定される。

一方、残留応力の最確値 $\hat{\sigma}_i$ の不偏分散 $\hat{s}_{\sigma_i}^2$ は $[N] = (n_{ij})$ として、次式で与えられる。

$$\hat{s}_{\sigma_i}^2 = \left(\sum_{j=1}^m n_{ij}^2 \right) \cdot \hat{s}^2 \quad (i=1 \sim n) \quad (40)$$

4.2.2 最確値の信頼区間

固有ひずみの最確値を $(\hat{\varepsilon}_i^* - \varepsilon_i^*) / s_i^*$ として無次元化すれば標準正規分布 $N(0, 1)$ に従う。 S / s^2 は自由度 $\phi = m - q$ の χ^2 -分布に従うので、次式の t は自由度 ϕ のステューデントの t -分布に従う。

$$t = (\hat{\varepsilon}_i^* - \varepsilon_i^*) / s_i^* \cdot \sqrt{S / s^2} / \sqrt{\phi} = (\hat{\varepsilon}_i^* - \varepsilon_i^*) / \hat{s}_i^* \quad (41)$$

全く同様に $(\hat{\sigma}_i - \sigma_i) / \hat{s}_{\sigma_i}$ は自由度 ϕ の t -分布に従う。よって、信頼係数 $(1 - \alpha)$ と t の値との関係は

$$1 - \alpha = 2 \int_0^t \frac{\Gamma\left\{\frac{(\phi+1)}{2}\right\}}{\sqrt{\phi\pi} \Gamma\left(\frac{\phi}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\phi}\right)^{-\frac{\phi+1}{2}} dx, \quad \Gamma \cdots \text{ガンマ関数} \quad (42)$$

で与えられる。信頼係数を指定すれば上式により t が決定され、これにより信頼区間は

$$\left. \begin{aligned} \hat{\epsilon}_i^* - t\hat{s}_{\epsilon_i}^* &\leq \epsilon_i^* \leq \hat{\epsilon}_i^* + t\hat{s}_{\epsilon_i}^* \\ \hat{\sigma}_i - t\hat{s}_{\sigma_i} &\leq \sigma_i \leq \hat{\sigma}_i + t\hat{s}_{\sigma_i} \end{aligned} \right\} \quad (\text{信頼係数 } 1-\alpha) \quad (43)$$

なお、これらの信頼区間は有限要素法に特有な離散化に伴う誤差を含んでいないが、数値解析で生じた計算誤差は含まれている。

5 解析例

5.1 3次元残留応力の測定（計測誤差なし）

まず始めに、本論文で提案した残留応力の有限要素法に基づく測定法の有用性を確認するため、以下の数値実験を行なう。Fig. 2 に示すスリット型の厚板溶接を想定して、部材中央に様な固有ひずみ ($\epsilon_x^* = \epsilon_y^* = \epsilon_z^* = -4,000\mu$) を与えて通常の F.E.M. で残留応力分布を作った（後出の Fig. 7 (a), (b), (c)）。以下、これを正解という。

この応力分布を前述の固有ひずみ法により再現することを考えるが、この解析においては1要素内の未知固有ひずみ成分は3方向 ($\epsilon_x^*, \epsilon_y^*, \epsilon_z^*$) のみであるとする。また、対称性により固有ひずみが存在する要素の数は9コであるため、 $q=3 \times 9=27$ となる。計測ひずみに誤差を伴わない場合、計測数 $m=27$ で $[H^*]$ が正則であれば応力分布が再現できる。しかし、固有ひずみ法では固有ひずみと計測ひずみの関係を利用するため、この感度（関係）が悪くなると $[H^*]$ がたとえ正則であっても見掛上従属な関係に近いものができる。このため、数値計算上の誤差が大きくなることがある。したがって、ここでは感度の劣化を避けるため、対象物を Fig. 3 のように切り出した状態で計測する。計測位置は Fig. 4 に示す。ただし、計測ひずみの値は普通の F.E.M. で Fig. 3 の物体に対する応力解析をし、そのひずみの計算値を採用した。

これらの計測データを用いて固有ひずみを推定し、逆にその推定値から再現された元の対象物の残留応力分布は正解に一致した（推定された固有ひずみの計算誤差は $-4,000\mu$ に対して $\pm 1\mu$ 以下であった）。

なお、ここでは切断面力法について述べていないが、すでに文献 3) でその有用性は確認している。

5.2 3次元残留応力の測定（ランダムな計測誤差あり）

前述の問題で計測ひずみにランダムな誤差がある場合について本法を適用する。計測はやはり Fig. 3 の物体表面で行なうが、誤差は $|d\epsilon| = 25\mu$ とし、計測位置と乱数で与えた誤差の符号を Fig. 5 に示す ($m=78$)。この場合、 $\phi = m - q = 51$ で信頼区間を決める t -分布は正規分布にほぼ一致する。

これらの誤差を含んだ計測ひずみから推定した固有ひずみの最確値と 68% 信頼区間 ($1s^*$) および正解値との関係を Fig. 6 に、元の対象物全体の応力分布の最確値と正解値との関係を Fig. 7 (a), (b), (c) に示す。固有ひずみの 68% 信頼区間は何点かを除いて正解値を含んでおり、平均的にみてもほぼ再現されている。一方、応力分布では固有ひずみ存在域で局部的に偏差が大きく (10kg/mm^2 以下) 信頼区間は広いが、それ以外では応力の偏差は小さい。

したがって、3次元残留応力の測定で誤差 $|d\epsilon| = 25\mu$ 程度であれば、局部的に信頼性の劣る点があるが、それ以外では大体精度よく残留応力分布を推定することが可能である。

5.3 2次元残留応力の測定（ランダムな計測誤差あり）

残留応力を測定するとき、2次元問題とみなせる場合も多い。そこで、典型的な溶接残留応力の例として、Fig. 8 の板つぎを取り上げる。板中央に様な固有ひずみ $\epsilon_x^* = -4,000\mu$ を与えて残留応力分布を作り、5.2 節と同様にランダムな計測誤差を含む弾性ひずみから応力分布を再現する。未知量は 11 要素の ϵ_x^* で $q=11$ 、測定数は同図中の $Y=Y_0$ の線上で $m=22$ とする ($Y_0=2.5, 7.5, 12.5\text{mm}$ の3ケースについてそれぞれ解析を行なう)。Fig. 9 は初期固有ひずみ ($-4,000\mu$) を推定した値とその精度を示す。計測線が $Y_0=2.5, 7.5\text{mm}$ の場合、いずれも同程度の精度で固有ひずみは再現されている。一方、 $Y_0=12.5\text{mm}$ では最確値はかなりばらつき、固有ひずみと計測ひずみの感度が悪くなるに従って急激に精度が劣化することが判る。また応力分布は Fig. 10 のように推定されるが、自由度 $\phi = m - q = 11$ より 95% の信頼区間は $t=2.2$ である。よって、 $Y_0=2.5, 7.5$ ではいずれも偏差が高々 1kg/mm^2 であるから、 75kg/mm^2 程度の最確値に対しても $\pm 2\text{kg/mm}^2$ の幅をとれば 95% の信頼性がある。

よって、このように溶接線近傍でひずみを計測すれば少数の点の計測で、きわめて精度の高い全体の応力分布の推定を行なうことができる。

6 結 論

本研究ではまず始めに残留応力測定の方法として、切断面力法と固有ひずみ法があることを示した。それぞれについて有限要素法に基づいて定式化を行なうことにより、新しい一般的な残留応力測定法を提案した。また計測ひずみに誤差が含まれる場合にも適用できるように統計学的手法を用いて理論を一般化した。

この方法により、ランダムな誤差を含む場合と含まない場合について、2, 3 の数値実験を行なって以下の結論を得た。

- (1) この新しい残留応力測定法の理論は確立された。
- (2) 本法により、従来一般的には不可能であった3次元残留応力分布の測定が可能となった。
- (3) ランダムな計測誤差を伴う場合、3次元残留応力は全体的にはほぼ正解の応力を再現できるが、部分的には精度の悪い所があり、誤差の伝播をできるだけ小さくするため本法の適用方法について検討する余地がある。
- (4) 2次元板つぎ溶接の例においては、溶接線近傍に計測点を設けると、少数の点のひずみを計測するだけで、きわめて精度の高い推定を行なうことができる。
- (5) また本法により、最も高い精度を得るための計測位置を予想することも可能である。

参 考 文 献

- 1) たとえば、渡辺正紀、佐藤邦彦：溶接力学とその応用，3版，朝倉書店（1971），p. 332～364.
- 2) 本間 仁，春日屋伸昌：次元解析・最小2乗法と実験式，13版，コロナ社（1968），p. 61～304.
- 3) 上田幸雄，福田敬二，中長啓治，円道節夫：有限要素法に基づく残留応力測定の方法とその信頼性，日本鋼構造協会第9回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集（1975），p. 465～470.

Fig. 1 Released surface-force and its discretization

Fig. 2 Model for analysis

Fig. 3 Model peeled off one outer layer around the core of inherent strains

Fig. 4 Location of measuring points and directions of strains

Fig. 5 Location of measuring points and directions of strains

$\bar{\epsilon}$; CONFIDENCE INTERVAL (68.2%)

$\circ$; $(\epsilon^* - \epsilon^{\#})$

ϵ^* ; TRUE VALUE

$\epsilon^{\#}$; MOST PROBABLE VALUE

Fig. 6 Relation of true values to confidence intervals of inherent strains

Fig. 7 True and estimated values of residual stresses