(昭和 50 年 11 月日本造船学会秋季講演会において講演)

3次元乱流境界層の第1近似理論とその応用

正員 田 中 一 朗* 正員 姫 野 洋 司**

First Order Approximation to Three-Dimensional Turbulent Boundary
Layer and Its Application to Model-Ship Correlation

by Ichiro Tanaka, *Member* Yoji Himeno, *Member*

Summary

Three-dimensional turbulent boundary layer equation is expanded according to the ordinary perturbation method with the flat plate flow as the zeroth order solution. The momentum thickness, the local skin friction coefficient and the cross flow angle at the wall including the first order term effects are compared with the measured values on a ship model in acceptable agreement. As applications of this first order solution, an approximate formula to the frictional form factor K_F is obtained and the scale effect of the velocity and vorticity distribution in the boundary layer over ship hulls is discussed.

1 緒 言

境界層の第1近似理論を展開することは、境界層の特性を簡明に把握する上で重要であり、また、船の粘性抵抗や船体周りの粘性流れの基本的性質を理解する上からも有益であろうと思われる。粘性抵抗に関するこの種の考えの最も簡単な例は、いうまでもなく Froude の相当平板の考えであるが、その後境界層理論の発達に伴い、その理論の立場から船の粘性抵抗を論じる試みが種々なされてきた。その成果の1つがいわゆる形状影響の考え方で、2次元ないしは軸対称境界層方程式に基づく近似理論が発表されている¹⁻³⁾。一方、最近では3次元乱流境界層理論の発達も著しく、船体周りの3次元境界層の計算や実験が試みられるようになった。この場合には抵抗ばかりでなく、境界層内部の2次流れ角（あるいは交差角）が注目される量となり、これが船体周りに発生する縦渦に密接に関連しているであろうと思われるので、特に船尾の粘性流れを論じる上で極めて重要である。しかし、3次元境界層理論から出発した摩擦抵抗及び2次流れなどの第1近似的な解あるいは実用公式は、まだ得られていないのが現状である。

本研究は、このような認識のもとに、相当平板を基礎とした通常の摂動展開を3次元境界層方程式に施して、その第1近似解を得ることを目的としたものである。その結果得られた解は比較的簡単な形で表現できるので、本報告の後半ではそれを基にした摩擦形状影響係数や、速度分布の尺度影響につき論じてある。諸賢のご批判を仰ぐ次第である。

2 3次元乱流境界層方程式の第1近似解

ここでは3次元乱流境界層問題の積分解法の一般形を示し、これに通常の摂動展開を施し、第0及び第1近似を求める手法並びにその結果を述べる。まず、物体表面のポテンシャル流線に沿った座標を s とし、等ポテンシャル線に沿って n を取る。 s, n 方向の運動量積分は、よく知られているように次の(1)、(2)式で表される。

$$-\frac{\partial}{\partial s}(U^2\theta_{11}) + U\delta_1 \frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial n}(U^2\theta_{12}) + U\delta_2 \frac{\partial U}{\partial n} - K_2 U^2(\theta_{12} + \theta_{21}) - K_1 U^2(\theta_{11} - \theta_{22}) = -\frac{\tau_s}{\rho} \quad (1)$$

* 大阪大学工学部

** 大阪府立大学工学部

$$-\frac{\partial}{\partial n}(U^2\theta_{22}) + \frac{\partial}{\partial s}(U^2\theta_{21}) - 2K_1U^2\theta_{21} - K_2U^2(\theta_{22} - \theta_{11} - \delta_1) = \frac{\tau_n}{\rho} \quad (2)$$

ここで、 U は層外速度、 τ_s , τ_n は s , n 方向の摩擦応力成分、 ρ は密度である。また、 s , n 方向の層内速度成分を u , v とし、表面からの法線座標を ζ とすると、境界層厚さ δ_1 , δ_2 , θ_{11} , ……などは次の(3)式で定義される。

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta, \quad \delta_2 = \int_0^\infty -\frac{v}{U} d\zeta, \quad \theta_{11} = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\zeta \\ \theta_{12} &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) -\frac{v}{U} d\zeta, \quad \theta_{21} = \int_0^\infty -\frac{uv}{U^2} d\zeta, \quad \theta_{22} = \int_0^\infty -\frac{v^2}{U^2} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(1), (2) 式中の係数 K_1 はポテンシャル流線の拡大縮少率 (縮少を正とする), K_2 は物体接平面でのポテンシャル流線の曲率で、流線座標では

$$K_2 = -\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial n} \quad (4)$$

となる。

積分型の解法では、上記の運動量積分の外に一般に補助方程式と局部摩擦則が併用される。補助方程式は、もともと運動方程式の高次運動量積分や、連続式の積分 (Entrainment) から導かれるので、厳密に考えれば補助方程式そのものの3次元影響が入ってくるが、ここでは簡単のため2次元境界層の解法で用いられている表現をそのまま適用する。この最も一般的な形としては Granville⁴⁾ の提案した次式が適当であろう。

$$\theta \frac{dH}{ds} = -M \frac{\theta}{U} \frac{dU}{ds} - N \frac{\tau_s}{\rho U^2} \quad (5)$$

ただし、 $\theta = \theta_{11}$, $H = \delta_1/\theta_{11}$ 。従来の補助方程式のほとんどがこの形に整理できる。係数 M , N は $R_\theta (= U\theta/\nu)$ に弱い依存性があるものの、ほぼ H のみの関数と考えてよい。 M はどの方法でも同じような値をとるので、ここでは指数法則に従う速度分布をエネルギー積分に代入して得られる表現

$$M = H(H-1)/(3H-1) \quad (6)$$

を採用する。一方、 N は正に千差万別であって、どのような表現を標準的とみなすべきか判断しかねる面があるが、Rotta⁵⁾ の試みた比較図をみると平板流れに近い状態では比較的まとまっており、今回の「平板流れからの第1近似」という観点からみると $dU/ds=0$ の付近で大体合っていれば差し支えないと思われるので、以下のように独自に N の表示および数値を決めることにする。すなわち、(5) 式は平衡流 ($dH/ds=0$ の流れ) の条件を含む必要があるので、まず $dU/ds=0$ なる平板の場合は $N=0$ 、また $\tau_s=0$ なる剥離流れでは dU/ds は有限値をもつことから $N \rightarrow \infty$ となる必要がある。このことから

$$N = a \frac{H-H_0}{H_{sep}-H} \quad (7)$$

とおく。 H_0 , H_{sep} は各々、平板及び剥離流れにおける H の値である。係数 a は、平衡流に関する Clauser⁶⁾ の実験から圧力勾配の弱い方の例 ($\delta_1/\tau_s \cdot dp/ds = 2$ で $H=1.48$, ただし p は圧力) に合うように決める。このとき $H_0=1.3$, $H_{sep}=2.0$ とすると $a=9.54$ となる。この値を用いて Rotta の比較図で他の方法と比較すると、Buri, Hudimoto, Head らの方法と近いことが分かる。

主流方向の局部摩擦則としては、従来の慣例に従って Ludwig-Tillmann の公式を用いる。すなわち

$$\frac{\tau_s}{\rho U^2} = \alpha(H) (U\theta/\nu)^{-n}, \quad \alpha = 0.123 \times 10^{-0.678H}, \quad n = 0.268 \quad (8)$$

また、解法にあたり速度分布は指数法則、2次流れ方向の速度分布には Mager モデルを使うこととすれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{U} &= \left(\frac{\zeta}{\delta}\right)^m, \quad v = u \left(1 - \frac{\zeta}{\delta}\right)^2 \tan \beta \\ \tau_n &= \tau_s \tan \beta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

ここで、 δ は境界層厚さ、 β は2次流れ角の壁面値である。このとき、 δ_2 , θ_{12} , θ_{21} などは $\tan \beta$ に、 θ_{22} は $\tan^2 \beta$ に比例することになる。

次にこれらの関係式の摂動展開を行う。まず、境界層の3次元性を表わす項 β , K_1 , K_2 などは微小とし、層外速度 U もその変化量 (圧力勾配) が小さいと考えて次のように展開する。

$$U = U_0 + U_1 + \dots \quad (10)$$

ここで U_0 は一様流速である。これに対応する解も次式のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \theta_1 + \dots \\ H &= H_0 + H_1 + \dots \\ c_f &= c_{f_0} + c_{f_1} + \dots, \quad c_f = 2 \frac{\tau_s}{\rho U^2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

このようにして求めた第 0 近似は平板解となり

$$\frac{d\theta_0}{ds} = \frac{c_{f_0}}{2}, \quad \frac{dH_0}{ds} = 0, \quad c_{f_0} = 2 \alpha(H_0) (U_0 \theta_0 / \nu)^{-n} \quad (12)$$

この解は次の段階である第 1 近似を求める際に必要であるので一応求めておく。ただし、ここで求める第 0 近似を平板の摩擦公式として実用することは好ましくなく、その目的に応じて精度のよい別の公式を使うべきである。それはともかく、(12) 式の解は次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} U_0 \theta_0 / \nu &= \{ \alpha(H_0) \cdot (n+1) \cdot U_0 s / \nu \}^{\frac{1}{n+1}}, \quad H_0 = \text{const.} \\ c_{f_0} &= 2 \alpha \{ \alpha \cdot (n+1) \cdot U_0 s / \nu \}^{-\frac{n}{n+1}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

また、摩擦抵抗係数 $C_{F_0}(s=0 \text{ から } s=s \text{ まで})$ は

$$C_{F_0} = 2 \frac{\theta_0}{s} = c_{f_0} (n+1) = \text{const.} \times \left(\frac{U_0 s}{\nu} \right)^{\text{const.}} \quad (14)$$

となって、Prandtl の公式に対応する。

次に、上で無視した β , K_1 , K_2 などを 1 次の微小量とみなして第 1 近似を求める。まず、主流方向の運動量積分 (1) 式を微小量で展開した第 2 項 (第 1 近似) は次のようになる。

$$U_0^2 \frac{\partial \theta_1}{\partial s} + U_0 \theta_0 (H_0 + 2) \frac{\partial U_1}{\partial s} + U_0^2 \frac{\partial \theta_{12}}{\partial n} - K_1 \theta_0 U_0^2 = \frac{c_{f_1}}{2} U_0^2 \quad (15)$$

n 方向の (2) 式も同様にして

$$\frac{\partial \theta_{21}}{\partial s} + K_2 \theta_0 (H_0 + 1) = \beta \frac{c_{f_0}}{2} \quad (16)$$

となる。ここで、 θ_{21} は速度分布を定義式に代入して

$$\theta_{21} = \beta \theta \cdot \lambda(H), \quad \lambda(H) = \frac{-2}{(H-1)(H+2)} \quad (17)$$

θ_{21} の第 1 近似は上式の θ , H に θ_0 , H_0 を代入したものとなる。次に補助方程式は

$$\theta_0 \frac{dH_1}{ds} = -M(H_0) \cdot \frac{\theta_0}{U_0} \frac{dU_1}{ds} - N'(H_0) H_1 \frac{c_{f_0}}{2} \quad (18)$$

ただし、

$$N(H_0) = 0, \quad N'(H_0) = \left. \frac{dN}{dH} \right|_{H=H_0}$$

また、摩擦則は

$$c_{f_1} = c_{f_0} \left\{ -0.678 (\ln 10) H_1 - n \frac{U_1}{U_0} - n \frac{\theta_1}{\theta_0} \right\} \quad (19)$$

となる。

第 1 近似の方程式 (15)~(19) 式はもちろん線型ではあるが、一般的な解析解を得ることは困難であるので近似計算を行う。まず、(16), (17) 式から第 0 近似の性質を考慮して 2 次流れ角 β を求めると、先端 $s=0$ で $\beta=0$ という条件の下に

$$\beta = \frac{(H_0+1)}{-\lambda(H_0)} \cdot \frac{1}{\theta_0^{\alpha_1}} \int_0^s K_2 \theta_0^{\alpha_1} ds, \quad \alpha_1 = \frac{1-\lambda(H_0)}{\lambda(H_0)} \quad (20)$$

上式をさらに簡単にするために、まず θ_0 を c_{f_0} で表し、被積分関数内の c_{f_0} にはその積分平均値である C_{F_0} を用い整理すると次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \alpha_2 \cdot \frac{1}{s^{\alpha_1}} \int_0^s K_2 s^{\alpha_1} ds \\ \alpha_1 &= \frac{H_0}{2} (H_0+1) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} (H_0-1) (H_0+1) (H_0+2) (n+1)^{\alpha_1} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

上式で現れる H_0 については、このような摂動展開では値を決めることができず不定であるが、ここでは仮に、大型模型に近いと思われる速度分布の 1/7 乗則に対応する値、 $H_0=1.3$ を用いておく。このとき、 $\alpha_1=1.50$ 、 $\alpha_2=1.63$ となる。また、 $s=s_0$ で $\beta=\beta_0$ なる初期値が与えられるときには、(21) 式右辺に減衰項 $\beta_0(s_0/s)^{0.1}$ が付加され、積分区間も (s_0, s) となる。

次に形状係数 H の変化分 H_1 について考える。 H_1 は (18) 式から分かるように、主に圧力勾配の影響を受ける。解法にあたっては簡単のため、2次元の場合と同じように上流の影響を無視する ($dH_1/ds=0$ と考える) と、

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \alpha_3(H_0) \frac{\theta_0}{c_{f_0}} \frac{1}{U_0} \frac{dU_1}{ds} \\ \alpha_3 &= -2 \frac{M(H_0)}{dN(H_0)/dH_0} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

となる。もっとも、(18) 式を厳密に解くこともできるが、その解の展開において U_1 の 2 次微分以上を無視すれば、本式と同型の関係式が得られるので、ここでは簡単な方を採用することにする。なお、係数 α_3 の値は $H_0=1.3$ で -0.166 程度である。

運動量厚さについては、境界層の性質上、上流影響を無視できない。(15)、(19)、(22) 式からこれを求めると、若干の計算の後、次の形となる。

$$\begin{aligned} \frac{\theta_1}{\theta_0} &= \alpha_4 \cdot \frac{1}{s} \int_0^s \frac{U_1}{U_0} ds + \alpha_5(H_0) \frac{1}{s} \int_0^s \frac{s}{U_0} \frac{dU_1}{ds} ds + \frac{1}{s} \int_0^s K_1 s ds \\ \alpha_4 &= -\frac{n}{n+1}, \quad \alpha_5 = -H_0 - 2 - 0.339(\ln 10) \alpha_3(H_0) \end{aligned} \quad (23)$$

また、 c_{f_1} は (22)、(23) 式を (19) 式に代入すれば求められる。

以上で重要な境界層の諸量の第 1 近似解が求められたが、これらの表式には、速度増加の影響や圧力勾配、流線の拡大縮少率、流線の曲率などの影響が陽に現れておりそれらの特性を見るのに便利である。特に、流線方向の量 θ_1, H, c_{f_1} は K_2 に無関係であること、また逆に β は K_2 の影響のみを受けるという興味ある性質が示されている。

以下に第 1 近似解と実験値との比較を行う。実験データとしては、手元にあった最も新しいデータの 1 つである Larsson⁷⁾ の SSPA 船型についての模型実験結果を引用する。模型船の要目、線図、レイノルズ数 R_n などを Fig. 1 に示す。図中、No. 3, 5, 7 の流線が示されているが、原論文にこれらに沿った静圧分布 (Fig. 2)、 K_1 (Fig. 3)、 K_2 (Fig. 4) などの値が与えられているので、計算もこれらの値を用い、各流線に沿って行った。計算の初期位置は Larsson の値を使用する関係上 SS 8 とし、 θ, c_f の初期値には Schoenherr の公式から推定した平板値を用い、 β の初期値は原著者の値に合わせた。また H_0 としては先述の 1.3 を用いた。この値は本模型船の値としては若干小さいと思われるが、全体の傾向をみる上では差し支えないものと考えた。No. 3, 5, 7 の流線に沿った θ, c_f, β の分布を Fig. 5, 6, 7 に示す。図中には Larsson 自身の計算値 (β を微小とし、補助方程式は一種の entrainment 法を使った方法) を併せて示している。初期値付近では、平板値とおいたことの影響が第 1 近似の θ, c_f に現われており、また No. 5 の流線では流線の拡大縮少率の影響が θ に現われているが、全体的な傾向を見れば、第 1 近似の計算値は c_f, θ, β ともに実験値とよく合っているようである。また、計算の初期位置をもっと前方、例えば SS 9³/₄ あたりに取り、かつ、 H_0 を含め初期値として実験値を採用すれば誤差は減少すると思われる。以上により、この第 1 近似解は 3 次元境界層の特性を簡明に示すものとして有用であると考えられる。

3 摩擦形状影響係数

第 1 近似解の応用の 1 つとして、粘性抵抗に対する形状影響係数 K の摩擦成分 K_F を求めることができる。 K_F の理論値としては笹島ら⁸⁾ の発表した式がある。

$$K_F = \frac{1}{S} \int \frac{U^2 - U_0^2}{U_0^3} d\sigma \quad (24)$$

ここで、 $d\sigma$ は面素、 S は浸水表面積であり、積分は浸水表面全体にわたる。この式による K_F の値は、従来はほゞ妥当あるいは少し高めと考えられていたようであるが、以下では、今回の第 1 近似解から求められる値と比較検討してみる。第 1 近似の範囲では摩擦抵抗係数 C_F は次のように展開できる。

$$C_F = \frac{2}{\rho S U_0^2} \iint \tau_s ds dn \doteq \frac{1}{S} \iint (c_{f_0} + c_{f_1}) \left(1 + 2 \frac{U_1}{U_0}\right) ds dn \quad (25)$$

この場合 s は船長方向, n はガース方向と考えてよい。 K_F を求めると

$$K_F = \frac{C_F - C_{F_0}}{C_{F_0} S} = \frac{1}{C_{F_0} S} \iint c_{f_0} \frac{2 U_1}{U_0} ds dn + \frac{1}{C_{F_0} S} \iint c_{f_1} ds dn \doteq K_{F_1} + K_{F_2} \quad (26)$$

となる。積分を行う際、積分内の c_{f_0} については平均値 C_{F_0} を用いると

$$K_{F_1} \doteq \frac{1}{S} \iint \frac{2 U_1}{U_0} ds dn \doteq \frac{1}{S} \iint \frac{U^2 - U_0^2}{U_0^2} ds dn \quad (27)$$

となり、これは (24) 式に外ならない。上式は船体表面上の速度変化の補正のみを平板値に施したものと解される。一方、 c_f の変化による影響を表わす第2項 K_{F_2} は、(19) 式から明らかなように負の値となる。この具体的表現式を求めるために U_1 のガース方向の積分は平均値を考えると、各断面のガース長さ $b(s)$ も展開し、

$$b(s) = b_0 + b_1(s) + \dots \quad (28)$$

$$\text{ここで, } b_0 = \frac{1}{L} \int_0^L b(s) ds = \frac{S}{L}, \quad L: \text{船の長さ}$$

と考える。また K_1 も近似的に

$$K_1 = -\frac{1}{b} \frac{db}{ds} \doteq -\frac{1}{b_0} \frac{db_1}{ds} \quad (29)$$

と仮定して計算を進めると、 K_{F_2} が次のような形に整理できる。

$$K_{F_2} = 0.209 K_{F_1} + \frac{0.453}{S} \iint \frac{U^2 - U_0^2}{U_0^2} \ln\left(\frac{s}{L}\right) ds dn + 0.164 \left(\frac{\bar{U}_1}{U_0}\right)_{s=L} - \frac{0.268}{S} \int \left(b - \frac{S}{L}\right) \ln\left(\frac{s}{L}\right) ds \quad (30)$$

上式の右辺第3項は船尾における速度変化のガース平均を表わす。また、係数は $H_0 = 1.3$ とした時の値であるが、この値の影響については尺度影響に関連する事柄であるので次章に述べる。ともかく、船体周りの速度分布とガース分布が与えられれば、(26), (27), (30) 式を用いて K_F の値が算出できることになった。船尾端の $\bar{U}_1$ については、速度がポテンシャル流計算で求められるとき、船尾で岐点となるために $\bar{U}_1$ が異常な値を取る可能性があるが、実際問題としてはそのようなことは起こらないはずであるから、 $\bar{U}_1$ の値には上流の値を外挿するか、あるいは積分範囲に船尾端を含めないなどの処置を施す必要がある。

次に K_F の計算結果について述べる。計算に使用した船型は、BSRA の実験船 Lucy Ashton⁹⁾, Todd¹⁰⁾ の Series 60 ($C_B = 0.7$) の母型, Moor¹¹⁾ のタンカー船型 M 684, それに SR 98 の母型であるタンカー船型¹²⁾ M 167 である。船体表面の速度分布は、すべて Hess-Smith 法によるポテンシャル流計算から求めた。得られた K_F の計算値を Table 1 に示す。表中に抵抗試験によって得られた K の値を示すとともに、Lucy Ashton 及び Moor の M 684 については、Joubert^{13,14)} の風洞実験によって K_F の値が得られているのでこれも加えた。ただし、この場合の平板の値は Schoenherr の式によった。また、“exact cal.” とあるのは、著者らが別報¹⁵⁾ で報告する厳密な境界層計算による値である。第1近似の計算結果をみると K_F の値は従来考えられていた値 (K_{F_1}) よりも低く、ほとんど0か負となる。 U がポテンシャル流としての値であることを考えて、実際の値に近づくように船尾付近で粘性修正をしてやれば、僅かに正の方向に増加するであろうが、それにしても K_F の計算値が非常に小さい量であることに変わりはない。一方、実験値についていえば、Moor の値は第1近似の K_F とよく合っているが、2例とも K_F は非常に小さい。阪大で以前行った実験によれば¹⁶⁾, M 167 について抵抗試験で求めた全抵抗係数から、静圧分布の計測値を積分して求めた圧力抵抗係数を差し引いた差、すなわち摩擦抵抗係数は、Schoenherr line よりも低い事例があった。また最近並松ら¹⁷⁾ もタンカー船型について同様の結果を得ている。これらを併せ考えると、 K_F の値はタンカー船型でも非常に小さいものと考えられ、第1近似の K_F が従来の値よりかなり低い値となったことも肯定できるように思われる。

一方、厳密解による値は C_B の増加につれて若干増加はするが、ほぼ同じような値である。この値の正否について言及するためには摩擦応力分布について論じなければならないので、詳細は別報¹⁵⁾ に示すこととし、ここではその結果を簡単に述べると、著者らの厳密解は船尾部で摩擦応力係数 c_f が実験値より僅かに大きくなる傾向があり、その影響が $1 + K_F$ にして数 % 程度になるものと思われる。その原因は厳密解で採用されている補助方程式にあるものと考えられるが、本報告中での近似式はこれと必ずしも完全に対応していないので、両者を

直接比較して論じることはできない。このような事情のために、ここでは厳密解の値を参考として示した訳である。

4 尺度影響

ここで求められた第1近似解の性質を用いて、境界層諸量の尺度影響、あるいは境界層問題として扱えた船尾流れの尺度影響について論じることができる。まず第1近似解についてみると、(12), (13), (14) 式で示される第0近似解の性質、例えば、 $H_0 = \text{const.}$, $\theta_0/L \propto c_{f0} \propto C_F$ などを考慮して、 β , H , θ_1/θ_0 , c_{f1}/c_{f0} などの分布形は尺度影響を受けず、また、 K_F もレイノルズ数 R_n の変化によらず一定と考えられる。

この結論は R_n の変化がそれ程大きくない範囲ではおそらく確かなものであろう。しかし、船舶のように模型と実船の尺度影響を論じる場合には、 $H_0 = \text{const.}$ とすることは無理がある。模型船と実船に対応する程度のレイノルズ数変化によって、 H_0 の値は 1.4 から 1.1 程度に減少するので、運動量積分式に現れる $H+2$ のような項には余り影響はないが、(17) 式の θ_{21} の定義式に現れる $H-1$ の項などには直接の影響が及ぶ。 H_0 の変化の影響を厳密に論じることは第2近似の問題であり、その解法は困難であるので、ここでは第1近似解の中で H_0 を変化させた時の影響を調べ、これを尺度影響と呼ぶことにする。

まず2次流れ角 β について調べる。(21) 式から明らかなように、 β の積分の前の係数 α_2 は H_0 の変化の影響を受けるが、指数部 α_1 には大きな影響はない。Schoenherr の式と Ludwig-Tillmann の式とから H_0 と C_F の関係を求め、 α_1 と α_2 を C_F の関数として示すと

$$\alpha_1 \doteq 1 + 150 C_F, \quad \alpha_2 \doteq 535 C_F. \quad (31)$$

となり (Fig. 8), β はほぼ C_F に比例することになる。この場合 α_2 の近似度は R_n 大のとき余りよいとは言えないが、この辺では Schoenherr の式も Ludwig-Tillmann の式も完全に保証されている訳ではないし、本論の立場上もこの程度の近似で差し支えないと判断した。別の例として Fig. 9 に M 167 の模型の SS 1/2 での β の分布を厳密解から求めた結果¹⁵⁾を示す。図中には、 $\beta \propto C_F$ と仮定して低いレイノルズ数から高いレイノルズ数の場合の値を推定した例が示してあるが、厳密解と比較してさ程違っていない。もう少し正確にいうと $\beta \propto C_F^{0.65} \sim C_F^{1.0}$ であるが、これを正確に求めても今の議論からみて意味があるようにも思われないので、ここでは実用上 $\beta \propto C_F$ としておく。

次に他の項の尺度影響について考える。このためには、ここで採用した補助方程式 (5), (6), (7) 式が R_n の変化に対して普遍的であることが必要である。(6) 式で得られる係数 M は、もともと運動方程式から導かれるので、一応 universal と考えてよいが、(7) 式の N の定数の決定には実験値を含んでおり、また剥離時の H の値の尺度影響も不明であるので、結局 N の尺度影響については明らかでない。ここでは、この事情を考慮しつつ影響のありそうな項をあたってみると、(22) 式の係数 α_3 の中に $M/(dN/dH_0)$ の項があり、これには上述の N の不確実性以外になお尺度影響の疑いが残る。したがって H_1 には量は別にして少なくとも定性的には影響が直接及ぶものと思われる。しかし θ_1/θ_0 にはその影響がほとんど現われず、尺度影響がないものと考えてよい。また c_{f1}/c_{f0} には H_1 の影響があり、更に K_F の中の圧力勾配が効く部分に H_1 の尺度影響が現われてその分だけ K_F が変化するが、その変化量あるいは正負については、上述の N の表現に深くかかわるので不明である。

次に速度分布の相似則について考える。まず s 方向の速度分布については (9) 式に示すような指数法則

$$\frac{u}{U} = \left(-\frac{\zeta}{\delta} \right)^m, \quad \delta = \frac{H(H+1)}{H-1}, \quad m = \frac{H-1}{2} \quad (32)$$

が成立するものと考えておく。第1近似の範囲では、相似船型に対して $\theta \propto \theta_0 \propto C_F \cdot L$ であり、また δ については $(H-1)/H \propto \sqrt{c_f}$ を考えれば、ほぼ $\delta/L \propto \sqrt{C_F}$ となる (また対数型速度分布を仮定すれば $\delta/L \propto C_F^{0.65}$ となる)。しかし u/U の指数部 m も実船では減少するので、 ζ/δ の対応点で u/U の値がその分だけ増加し、結局両者の影響を勘案すれば、 m を一定とし $\delta/L \propto C_F$ においても大差ないものと考えられる。すなわち、実船の速度分布 u/U は模型船の速度分布を ζ 方向に C_F の比で縮めれば大体よいという笹島¹⁶⁾の考えが導かれる。

n 方向の速度分布 v/U についても、(9) 式に示すように ζ/δ の関数と考えれば、 u/U と同様の議論で法線方向に C_F の比で縮めればよいことになる。ただこの場合 β が係数として存在するので、上述のように $\beta \propto C_F$ と考えれば、 v の大きさも C_F の比で縮める必要がある。

次にこれを船体固定座標 (x, y, z) の方向の速度 (V_x, V_y, V_z) に直して考えてみる。ただし、 x は船長方向、 y, z は断面内にとるものとする。まず x 方向については

$$V_x = v \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \cos(n, x) + u \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \cos(s, x) \quad (33)$$

となるが、右辺第1項は小さいので省略すると

$$V_x \doteq u \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \cos(s, x) \quad (34)$$

となる。したがって、 x 方向については、模型の速度分布を ζ 方向に縮めれば実船の値が出るという上述の結果が得られる。SR 107 のデータ¹⁹⁾あるいは並松らの実験²⁰⁾によると、詳細な所は若干の不一致はあるものの、大体の傾向はこのようになっている。

一方、 y, z 方向については

$$\left. \begin{aligned} V_y &= v \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \cos(n, y) + u \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \cos(s, y) \\ V_z &= v \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \cos(n, z) + u \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \cos(s, z) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

となり、右辺第1項、第2項はともに同程度の大きさであるため、どちらも無視できない。また、 v と u の尺度影響は上述のように異なるので、 ζ 方向に一律に V_y, V_z を縮めるという訳にはいかない。(35) 式の u は境界層外端で値が残る、 v はなくなるので、実船の速度分布の推定にあたっては、 V_y, V_z から V_x と相似な分布をする u の項を差し引いたものを v の項として換算すべきである。もっとも、これを SR 107 のデータに照らしてみても、 V_x の相似関係が模型と実船とで完全に対応しているとはいえないので、 V_y, V_z についても上の相似則を確認するまでに至らない。また並松ら²⁰⁾は流向 $V_y/V_x (= \beta_H)$ 、 $V_z/V_x (= \beta_V)$ を求めている (Fig. 10)。この場合は (34)、(35) 式から分かるように、境界層外端のポテンシャル流れからの差を v/u の分布とみればよく、模型船での分布形を C_{F_0} の比で縮め、かつ、その大きさも C_{F_0} の比で縮少する必要がある。並松らは y 方向（これはほぼ z 方向）にのみ C_{F_0} の比で縮めた実船推定値をあげているが、実船の計測値との差は壁の近くで大きくなっており、特にこの場合の2次流れの方向である β_V については、上に述べた第2の補正が必要であるように思われる。ただし、図中には仮想のポテンシャル値として水平線を入れてあるが、これはもとより厳密ではなく、そのため β_V と β_H とで仮想の境界層厚さが異なっているが、この影響は余り重要ではない。また、 β_H は今の場合壁からはほぼ垂直な方向の流れ角にあたるので、2次流れの相似則が必ずしも成立しておらず、今後の検討が必要であろう。ここでは境界層理論の立場から、主流方向の速度分布と2次流れ方向の速度分布は異なる尺度影響を受けることを指摘するにとどめたい。

次に、速度分布の相似則の拡張として、境界層理論の立場から縦渦の尺度影響について検討してみる。この前提条件として、船尾渦が境界層の2次流れの一種として扱うことが可能であることの論証が必要であるが、今はこれは困難である。ここではこれが妥当であることを期待させる2つの事実、i) 船尾渦は境界層の内部にあること、ii) 縦渦の一種である翼の Trailing vortex の解析には境界層の近似が適用され、成功していること、をあげるにとどめる。さて、いわゆる縦渦は x 方向の渦度 ω_x で表現される。(35) 式からこれを求めると

$$\omega_x = A \frac{\partial v}{\partial \zeta} + B \frac{\partial u}{\partial \zeta} = A \frac{U\beta}{\delta} f_1 \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) + B \frac{U}{\delta} f_2 \left(\frac{\zeta}{\delta} \right) \quad (36)$$

ここで右辺第1項は2次流れによる項で、第2項は流線方向の速度損失に基づく渦の x 軸への投影である。係数 A, B は位置の関数で、船体の幾何学的形状のみで定まり尺度影響を受けない。船尾の近くでは (36) 式の第1項、第2項はともに存在するので、尺度影響については両項とも考える必要がある。 $\delta/L \propto C_{F_0}$ 、 $\beta \propto C_{F_0}$ を考慮すると、 ω_x の大きさは C_{F_0} の減少とともに第2項の影響で徐々に増加する (Af_1 と Bf_2 は船尾渦の場合合同符号であるから)。しかし、第1項と第2項の割合は、同じ断面内であってもガース方向には異なるので、その増加量は一様でない。また模型船と実船とで境界層の排除影響の相違のために層外の流向に変化があったとすると、同じ位置でも第2項の影響が異なってくる。それにしても、いわゆる縦渦の渦度分布が示す特徴的な分布形状は、主として (36) 式第1項によるものであると考えられるので、その形状は全体的に δ の比で伸縮すればよい。ただし渦度の値は2項の和であるため非常に複雑である。第1項の渦度は、 β が模型と実船で同じなら C_{F_0} に逆比例して増大するが、上述のようにほぼ $\beta \propto C_{F_0}$ とすると大体一定になる。一方、第2項は C_{F_0} に逆比例して増大するが、場所により両項の寄与が異なるため簡単に論ずる訳にはいかない。ただ、船底に近い位置ほど流線の上向き傾斜が大きいため、第2項の効きが増加することが推測される。このことは縦渦の渦度分布の中心

が実船状態で下がることを意味するが、SR 107 のデータ¹⁹⁾もこれを支持するようにも考えられる。なお、下がる原因としては壁による渦の鏡像効果も考えるべきであるが、これは本境界層理論とは別の事柄となる。

更に、縦渦が存在する領域で渦度分布を積分し、循環 Γ を求めることができる。積分領域は $L\delta$ に比例するものとすれば、(36) 式から、面積素を dS として

$$\Gamma = \int \omega_x dS \propto U_\infty L (A'\beta + B') \quad (37)$$

上式の第1項は2次流れによる項で、 β は今の場合断面内の平均値と考えておく。第2項は流線方向の x 軸への投影によるものである。積分の範囲を壁面から層外まで厳密にとれば第1項は0、第2項は層外のポテンシャル流れによって決まる値となるが、実際に縦渦を取扱う場合は、壁面近傍及び境界層外端付近を除外して積分するので、上式の形となる。したがって Γ の値は実船では模型より少々小さめになると思われるが、係数 A' 、 B' の割合は各断面で異なるので量的なことは言えない。なお、 Γ が求まれば $\rho\Gamma^2$ に比例する誘導抵抗についても論じることになるが、3次元剥離、渦度の流出条件、伴流内の β の変化の具合などの問題があり、今回の議論の範囲外であるためここではこれ以上は触れない。

以上、境界層理論の立場から船尾流れを考えてみたが、この中で、主流方向と2次流れ方向とで尺度影響が異なることが基本的に重要な問題である。今後ともこの点に関して、実験、理論の両面からの詳細な検討が必要であると思われる。

5 結 言

3次元境界層方程式の摂動展開を行い、平板流れを基礎とした第1近似解を得た。その結果得られた主な結論は次の通りである。

- i) 境界層諸量の第1近似解は実験値と比較的良好な一致を示す。
- ii) 第1近似の摩擦形状影響係数 K_F は従来の公式よりかなり低い値となったが、この方がむしろ実験値に近いようである。
- iii) 境界層理論の立場からみた尺度影響としては、2次流れ角 β はほぼ C_F に比例する。また実船の2次流れを得るためには、模型の値を法線方向に C_F の比で縮めるだけでなく、大きさもその比で小とする必要がある。
- iv) いわゆる船尾縦渦の尺度影響に関し、その形状は模型の分布を法線方向にほぼ C_F の比で縮めればよいが、渦度の値は種々の条件で変わりうる。

本論を終えるにあたり、貴重なご討論を賜った笹島秀雄大阪大学名誉教授に深く感謝の意を表する次第である。また、研究上のご高配を頂いた大阪府立大学田中紀男教授、討論して頂いた大阪大学鈴木敏夫講師、数式のチェックなどで援助してもらった大阪府立大学奥野武俊助手、同大学院生林田滋君に厚くお礼申し上げる。また、本研究の一部は文部省科研費の補助によること、計算には京都大学共同利用大型計算機、大阪府立大学計算センターを利用したことを付記し、関係各位に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 田中一朗：船の粘性抵抗に対する形状影響について（その1）、造船協会論文集，第113号（1963），p.7，（その2），造船協会論文集，第114号（1963），p.34.
- 2) H. Sasajima & I. Tanaka : Form Effects on Viscous Resistance and Their Estimation for Full Ships, Proc. 10th ITTC (1963), p.122.
- 3) P. S. Granville : A Modified Froude Method for Determining Full-Scale Resistance of Surface Ships from Towed Model, Jour. of Ship Research, Vol.18, No.4 (1974), p.215.
- 4) P. S. Granville : Integral Methods for Turbulent Boundary Layers in Pressure Gradients, NSRDC Rep. 3308 (1970).
- 5) J. C. Rotta : Progress in Aeronautical Sciences, ed. by A. Ferri et al., Vol.2 (1962), p.202.
- 6) F. H. Clauser : See J. C. Rotta⁵⁾, p.124.
- 7) L. Larsson : Boundary Layers of Ships, Part I~IV, SSPA Allmän Rep., Nr.44~47 (1974).
- 8) 笹島秀雄他：船の摩擦抵抗に対する形状影響と大型油槽船の馬力推定について，造船協会論文集，第103号（1958），p.211.

- 9) J.F.C.Conn et al.: BSRA Resistance Experiments on the Lucy Ashton, Trans. INA, Vol.95 (1953), p.369.
- 10) F.H.Todd et al.: Ser.60-The Effect upon Resistance and Power of Variation in Ship Proportions, Trans. SNAME, Vol.65 (1957), p.445.
- 11) D.I.Moor: The C_B of some 0.80 C_B Forms, Trans. RINA, Vol.102 (1960), p.93.
- 12) 日本造船研究協会: SR 98, 巨大船の運航性能に関する実験研究報告書, 研究資料 No.61 (1967).
- 13) P.N.Joubert and N.Matheson: Wind Tunnel Tests of Two Lucy Ashton Reflex Geosims, Jour. of Ship Research, Vol.14, No.4 (1970), p.241.
- 14) N.Matheson and P.N.Joubert: Experimental Determination of the Components of Resistance of a Small 0.80 C_B Tanker Model, Jour. of Ship Research, Vol.17, No.3 (1973), p.162.
- 15) 姫野洋司, 田中一郎: 厳密な積分法に基づく3次元乱流境界層方程式の解法, 1975年11月造船3学会秋季連合大会において講演(関西造船協会誌 159号掲載).
- 16) 笹島秀雄他: 肥大船の圧力分布, 造船3学会連合大会において講演(1969).
- 17) 並松正明, 久志本仁: 船体表面圧力の計測例(その2), JTTC 資料, 36-13 (1975).
- 18) 笹島秀雄他: 肥大船の伴流分布, 造船協会論文集, 第120号 (1966), p.1.
- 19) 日本造船研究協会: SR 107, 船舶の速度計測および馬力推定法の精度向上に関する報告書, No.142 (1972).
- 20) 並松正明他: 肥大船における実船と模型船の伴流分布, 造船学会論文集, 第134号 (1973), p.65.

Fig.1 Body plan and streamlines of SSPA cargo ship model given by Larsson.

Fig.2 Pressure distribution along streamlines calculated by Larsson.

Fig.3 Streamline convergence K_1 given by Larsson.

Fig.4 Geodesic curvatures K_2 of streamlines given by Larsson.

Fig.6 Boundary layer solutions along No.5 streamline.

Fig.5 Boundary layer solutions along No.3 streamline.

Fig.7 Boundary layer solutions along No.7 streamline.

Fig.8 Coefficients α_1 and α_2 in the formula of cross flow angle at wall β .

Fig.10 Distribution of vertical and horizontal cross flow angles (β_V and β_H) at SS 0.45 of a tanker measured by Namimatsu et al. in full load condition.

Fig.9 Distribution of cross flow angle β at SS1/2 of a tanker model M167.

Table 1 Analysis of frictional form factor of models.

ship name	L.Ashton	Ser.60	Moor M684	M167
C_B	0.685	0.700	0.800	0.802
$R_n \times 10^{-6}$	4.53	1.30	6.63	3.08
K_{F1} , present cal.	-0.001	0.040	0.064	0.080
K_{F2} , present cal.	-0.122	-0.070	-0.050	-0.070
$1+K_F$, present cal.	0.878	0.970	1.014	1.010
$1+K_F$, exact cal.	1.058	1.056	1.065	1.073
$1+K_F$, experiment	1.006	—	1.018	—
$1+K$, experiment	1.071	1.097	1.362	1.320