(昭和 52 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

sway・yaw 運動を記述するための 座標系に関する一考察

正員 藤 野 正 隆*

A Consideration on the Coordinate System Used to Describe
Sway and Yaw Motions of a Ship

by Masataka Fujino, *Member*

Summary

At present, both the coordinate axis fixed in the space and that fixed on a moving ship are used to almost the same extent when the sway and yaw motions of a ship are described. The former is preferred rather in the seakeeping study to treat ship motion in waves, and the latter is preferred in the study of ship manoeuvre in calm sea. So far, these two branches of ship dynamics have been developed independently of each other. In the near future, however, we shall have to treat more frequently problems related to both seakeeping and manoeuvring. On the occasion, we shall be forced to make a due choice of the coordinate system, by which the equations of motion will be described. For this purpose, the author tries to throw light on the essential difference between the above-mentioned coordinate systems. In section 2, are compared the body-fixed coordinate axis and the space-fixed coordinate axis with each other by assuming that neither sway force nor yaw moment generate due to surging, heaving and pitching of a ship, and that sway force and yaw moment are represented as linear functionals of sway and yaw velocities of a ship. Furthermore in section 3, the same discussion is succeeded by attaching the condition of causality to the hydrodynamic force generated on a ship by its motion. As a result, it is ascertained that the body-fixed coordinate system is more suitable than the space-fixed coordinate system for clear understanding of physical nature of the hydrodynamic force.

1 緒 言

一般に物体の運動を記述するのに、空間に固定された座標系またはこれに対して一様速度で運動する座標系（これらは本質的には同一であるので、以下では空間固定の座標系と呼ぶことにする）を用いる方法と、運動する物体に固定された座標系を用いる方法との二通りの選り方が広く用いられていることは衆知のとおりである。これら二通りの方法のうち、いずれの方法によるかは、その選択によって物体の運動の本質が、いかに的確に捉えられるか否かによって決まるといえる。たとえば、運動物体の変位を捉えるという点では空間に静止した観測者の立場、すなわち空間固定の座標系を用いる方が、より直観的で理解しやすいといえよう。

ところで、船の sway・yaw 運動を記述するのに、空間固定の座標系を用いる方法と船体固定の座標系による方法の二通りが、現在ほぼ同程度に使用されている。前者すなわち空間固定の座標系を用いて記述された運動方程式においては船体運動を表わす変数は当然、空間固

定の座標系で定義される運動変数であるので、船体運動を静止した観測者の立場で見るという点で、運動を理解するのが容易であるということは、すでに述べたとおりである。では、船体固定の座標系を使う理由は何であろうか。力学の法則が、“物体の運動量および角運動量の時間変化が、その物体に働く外力および外力のモーメントにそれぞれ等しい”と述べられるときの物体の運動量および角運動量の時間変化の具体的記述式に関しては、空間固定の座標系を用いようが物体固定の座標系によろうが、両者の間には本質的な差異は生じない。しかし、本論文でこれから考察しようとする、流体中を物体が運動する場合のように、運動物体とそれを囲む流体との相対運動によって生ずる流体力が新たに、運動物体に働くような場合には、空間固定の座標系に基づいて物体の運動を記述するのが運動の本質を、より強く反映する、すなわち物理現象の理解にとって合目的的であるとは必ずしもいえないのではないか。このような流体力（以下、流体力としては、静止流体中を運動するとき物体に働く流体力のみを考察の対象とし、いわゆる波浪強制力のようなものは考えない）を表現するのに、いずれの座標系

* 東京大学工学部

による方が、より合理的であるかによって、座標系選択の問題に対する一つの解答が与えられるものと思われる。

次節では、運動する船体に働く流体力を船体の運動速度の関数として記述するとき、我々の経験的認識から許容される仮定を、流体力の基本的性格に課することにより、流体力の記述に、より適合する座標系はいずれであるかを検討する。

さらに、船体の運動によって誘起されて船体に生ずる流体力を、“船体の運動”を原因とする結果であると見るとき、因果律または因果性の条件と呼ばれる次の仮説を、このようにして生じた流体力に置くことも、我々の経験的認識から許されるであろう：いかなる結果も原因に先行することはない（この内容を“因果律”と呼ぶのは必ずしも適当ではなく、しいていうならば“原因”の“結果”に対する“時間的先行性”とでも呼ぶべきものであろうが、この時間的先行性を指して“因果律”と呼ぶことがあるので、ここでもその用語法を踏襲する¹⁾）。このような因果律の数式的表現として、我々はKramers-Kronigの関係式を知っている（たとえば文献2))。この因果性の条件を、我々が検討しようとしている“船体運動によって船体に生ずる流体力”に適用するとき、その物理現象を記述するのに使用する座標系の相違によって、因果律の具体的表現式であるKramers-Kronigの関係式に矛盾を導いてはならないことは、因果律の意味する事柄から明白である。

このような見地から、次々節では船体固定の座標系または空間固定の座標系を基礎とした流体力の記述式における、流体力の理解の仕方の適切性の如何を検討する。

2 運動の変位を記述する座標系と流体力を記述する座標系

船体運動のうち、sway・yaw運動を記述するのに現在用いられている座標系には、空間固定のものと物体す

なわち船体固定のものとの2種類があり、ほぼ同程度に使われていることは緒言にも述べたとおりである。このうち、前者は主として、いわゆる耐航性研究の分野で波浪中での微小船体運動を計算するのに広く使用されているのに対し^{3),4),5)}、後者は主として静水中で舵などのcontrole surfaceの操作による運動を取扱う操縦性研究の分野で使用されている^{6),7),8)}。このように、使用する座標系が上述の両分野の間で異なるため、それぞれの分野での成果が必ずしも十分に、他の一方の分野の研究に生かされがたいのと、耐航性および操縦性の両分野にまたがる波浪中での操縦運動を論ずる場合などには、いずれかの一方の座標系を選択せねばならないといった現実的な問題に対処するためにも、両座標系の本質的な差異について検討しておくことは無駄ではないと思われる。

以下の考察における議論の前提を明確にしておくために、両座標系を次のように導入し、そこでのpure sway運動とpure yaw運動を比較しておく（Fig. 1参照）。

いま、船は水面上を運動しているとして、ある瞬間($t=0$)における船の重心位置に原点 O をおき、船の前後軸の方向に ξ 軸、これに直交して水面上に η 軸、 O 点を通して鉛直下向きに ζ 軸をとって空間に固定する。これが空間固定の座標系である。ただし、船の運動は微小で、船の横変位は平均的には ξ 軸のまわりに起こるものとする。一方、 $t=0$ の瞬間に物体の重心 G に原点をおき、船の前後軸の方向に x 軸、これに直交して水面上に y 軸、 G 点をとって鉛直下向きに z 軸をとるが、このように定められた座標軸は船体に固定されている、船体とともに動くというのが船体固定の座標系である。したがって、pure sway運動とpure yaw運動は次のように定義される。

- i) 空間固定の座標系における sway 運動とは、 $O\xi$ 軸からの船の重心 G までの距離 η_G が変化する運動であり、sway速度は $d\eta_G/dt$ で与えられる。また、

a) 空間固定座標系

b) 船体固定座標系

Fig. 1 座 標 系

yaw 運動とは原点 O まわりの船の回頭運動で、yaw 角速度は $d\psi/dt$ で与えられる。よって、pure sway 運動とは船の方位角変化はないが ($d\psi/dt=0$)、 O から軸からの距離 η_G が変化する運動として定義され、pure yaw 運動とは O から軸からの距離 η_G は変化しないが ($d\eta_G/dt=0$)、船の方位角 ψ が変化する運動として定義される。

- ii) 船体固定の座標系における sway 運動とは、船体縦中心線 (x 軸) に直交する y 軸方向への並進運動であり、sway 速度は重心点の並進速度の y 方向成分として定義される。また、yaw 運動とは重心 G まわりの船の回頭運動で、yaw 角速度は回頭の速さ $d\psi/dt$ で与えられる。よって、pure sway 運動とは回頭運動をともしない y 方向速度成分を有する並進運動をいい、pure yaw 運動とは y 方向並進速度成分のない (船の並進速度ベクトル U が $U \neq 0$ であるとすれば、 U ベクトルは常に x 軸に接している) 回頭運動をいう。

このように定義される“pure”運動の両座標系での定義の差は、次のような例を考えれば明らかである。いま、Fig. 1 (a) で船はある瞬間回頭運動をせず並進運動のみをしていて、その速度ベクトル U が船体縦中心線の方に一致していたとする (すなわち U ベクトルは O から軸と $\psi (=0)$ なる角をなしている)。空間固定の座標系の立場では、この船は pure sway 運動をしていることになるが、船体固定の座標系の立場から見れば、船は sway 運動も yaw 運動もしていないことになる。次に、船の重心は任意の曲線上を動いていくが船体縦中心線は、この重心軌跡に常に接している場合を考えてみる。この運動は、船体固定の座標系を用いる立場からみると、sway 速度が常に 0 であることから pure yaw 運動であるということになるが、空間固定の座標系の立場では yaw 運動とともに sway 運動をしていることになる。

このような相違点はどこから生じたかを考えてみると次のようにいえる：yaw 角速度の定義は、空間固定の座標系と船体固定の座標系のいずれにおいても同一であるが、並進速度成分 sway 速度は座標系の如何によって異なる。空間固定の座標系を用いるときの船の sway 速度は、並進速度ベクトル U が空間に固定された座標軸に対して、いかなる角度 α をとるかで決まり、船体の空間固定座標軸に対する角度 ψ には依らないのに対し、船体固定座標系を用いるときの船の sway 速度は、並進速度ベクトル U の船体に対する角度 β によって決まり、船体の方位角 ψ には依らないのである。

結局、船体運動を表わす運動速度の定義の相違、いいかえれば“pure”運動の相違は定義の異なる座標系を用

いるかぎり避けられぬことなのである。

ところで、我々が問題にしているのは、それ自身の運動によって流体から力を受ける船体の運動を記述することである。運動している船体の変位——そして運動速度——を記述する際には、空間固定の座標系あるいは船体固定の座標系のいずれを用いるかによって、具体的表示式に差異はあっても本質的な差はなかったが、船体に働く流体力を船体の運動変数の関数として表わす場合にもそうであろうか。この問題を考えるために、船体に働く流体力に関する、次のような仮定を設けよう。それらの仮定が、我々の到底受け入れられないものではなく、むしろ我々の経験的認識と合致するものであることは、仮定の主張する事柄から明らかであろう。

仮定 1：船体は船体縦中央面 (xz 面) に関して左右対称であり、船体の任意の点での速度ベクトルがすべて、船体縦中央面に平行であるような運動 (surge, heave, pitch) によっては、船体は sway 力および yaw モーメントは受けないものとする。

仮定 2：船体が sway・yaw 運動するとき、船体に加わる流体力は船の sway・yaw 運動によって一義的に決まるものとする。特に、船体の運動が微小であるときには流体力も微小で sway 速度および yaw 角速度に関して線形であるとする。

ただし仮定 2 において“流体力は sway 速度と yaw 角速度によって一義的に決まる”というときの sway 速度と yaw 角速度とは、瞬時瞬時の sway 速度と yaw 角速度を意味するばかりでなく、その時点までの sway 速度と yaw 角速度の履歴までもを含む広い意味に解釈するものとする。すなわち、ある瞬間に船体に働く sway 力と yaw モーメントは、その瞬間における値をも含む sway 速度と yaw 角速度の履歴によって決まるもので、流体力は sway 速度 $v(t)$ と yaw 角速度 $r(t)$ の線形汎関数であると仮定している：すなわち、括弧 $[]$ をともなう Y, Y_1, Y_2, N, N_1, N_2 を、 $[]$ 内の変数に関する線形汎関数であるとするとき、sway 力 $Y(t)$ と yaw モーメント $N(t)$ は、

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= Y[v(t), r(t)] = Y_1[v(t)] + Y_2[r(t)] \\ N(t) &= N[v(t), r(t)] = N_1[v(t)] + N_2[r(t)] \end{aligned} \right\} \quad (1-1)$$

と書き表わせるとしているのである。

仮定 1 の主張は、運動の記述が空間固定座標系によるべきか船体固定座標系によるべきかの選択に資するものでないことは、この仮定の内容から明らかである。

一方、仮定 2 では、流体力は sway 速度と yaw 角速度の線形汎関数であると主張していること、ならびにすでに述べたごとく、sway 速度はここで問題にしている両座標系で明らかに定義が異なることを考え合せると、座標系選択に関する手掛りを仮定 2 が与えるであろうこ

とが予想される。そこで、ある簡単な運動をしている船体に働く流体力について考察してみる。

いま、船は任意の微小 sway 運動と yaw 運動をしているが、たまたまある有限時間^{注1)}の間、 $O\xrightarrow{\circ}$ 軸に対して $\psi = \psi_0 (\neq 0) =$ 一定の方向に直進 (船の前後軸方向の並進運動) していたとする。仮定1を認めるのであれば、このような運動によっては、船体に sway 力も yaw モーメントも生じないはずである。ところが、

i) 空間固定の座標系で船体の運動を考える場合には、上に仮定された運動では、船体は $d\eta_G/dt = U \sin \psi_0$ の sway 速度を持っていることになる。しかも、この例での ψ_0 は sway 速度 $d\eta_G/dt$ が微小であるという条件を満たすかぎりにおいては任意であるから、仮定1を認めるかぎり任意の微小 sway 速度を有する船体に対して sway 力と yaw モーメントは0であるということになる。このことは (1-1) 式で $v(t)$ による流体力の成分 $Y_1[v(t)]$ と $N_1[v(t)]$ が恒等的に0であるという結論を導くことになり、流体力は sway 速度には一切依らないといわざるをえない。この結論は明らかに、我々の経験的認識と適合しない。一方、

ii) 船体固定の座標系から、上に仮定された運動を見る場合には、 ψ_0 がいかなる値をとろうと、船は yaw 角速度を持たないのはいうに及ばず sway 速度も持たないことになるので、仮定2からも船体には sway 力も yaw モーメントも生じないといえ、i) に述べたような矛盾は生じない。

さらに次のような場合を考えてみる。Fig. 1 (a) で船が $\psi = \psi_0 (\neq 0) =$ 一定かつ $\eta_G = \eta_{G0} (\neq 0) =$ 一定で $O\xrightarrow{\circ}$ 軸に平行に並進運動をする場合を考える。この場合、船体には何等かの sway 力および yaw モーメントが生じるであろうことは、仮定1の主張の裏返しとして理解できるであろう。

ところが

i) 空間固定の座標系の立場から見ると、この船体は sway 速度も yaw 角速度も持たないことになるから、仮定2によれば船体には sway 力も yaw モーメントも生じないといわねばならない。これは不合理で

ある。

ii) 船体固定座標系の立場に立てば、船体は0でない sway 速度をもつことになり、仮定2によって船体は、その sway 速度に相当する流体力を受けることになり、i) の意味での不合理は生じない。

結局、以上に述べた座標系間の相違は、仮定2に述べられた主張が任意の座標系において定義される sway 速度と yaw 角速度に対して成立つものではない、と要約することができる。すなわち、仮定2の主張を受入れるとすれば、その際の sway 速度と yaw 角速度としては空間固定の座標系において定義されるものは不適当であるということになる。だからといって、空間固定の座標系では sway・yaw 運動を正しく記述できないといっているのではない。ここまでの議論では、仮定1と2の下では船体固定座標系を用いれば一応矛盾なく、流体力を記述できるので、空間固定座標系で定義される運動変数で船体固定座標系における sway 速度と yaw 角速度を書き表わせれば、確かに空間固定の座標系を用いても sway・yaw 運動を記述することはできる。ただし、sway 速度 $\dot{\eta}_G$ と v には、微小運動の仮定の下では

$$\dot{\eta}_G = u \sin \psi + v \cos \psi \approx U \psi + v \quad (1-2)$$

の関係があり、両者の間には $U\psi$ の差がある。このため、空間固定座標系を用いて流体力を表わすと、見掛け上の復原項に相当する ψ に依存する流体力が現われることになり、(1-1) 式のような物理的意味の明解な流体力の記述——いいかえれば明解な流体力の理解の仕方——を捨てざるをえない。

我々の経験的認識から許容される仮定1を受入れ、かつ、物理現象の記述の適切性および目的性の一つの具体的表現である仮定2を認めるならば、上述の議論は次のようにまとめることができる。

船体運動そのものを記述する運動変数としては、空間固定の座標系において定義されたものであろうと船体固定の座標系において定義されたものを用いようが、本質的な差異はないが、船体に加わる流体力を仮定2の下で矛盾なく記述するには空間固定の座標系は不適当で、船体固定の座標系によるべきである。

実は、この結論は自明なこともいえる。運動する船体に生ずる流体力は船体と流体との相対運動によるのであり、相対運動が同一ならば生ずる流体力も同一であるとするのが最も自然な見方である。ところが、空間固定の座標系を用いる場合には、船体と流体とはただ一つの相対運動をしていても、空間に固定された座標軸に対する船の姿勢によって運動変数——とくに線速度成分——は異なり、運動変数は一意に定まらない。したがって、船体と流体との相対運動によって生ずる流体力を、空間固定の座標系において定義される運動速度の関数として記述

注1) 「ある瞬間」ではなく「ある有限時間の間」としたのは、仮定2にも述べたごとく、流体力は時々刻々の運動に依存するばかりでなく、運動の履歴にも依るので、たとえある瞬間に $v(t) = r(t) = 0$ であっても、ただちに $Y(t) = N(t) = 0$ とするわけにはゆかない。一方、十分長く $v(t) = r(t) = 0$ の状態が続けば、 $Y(t) = N(t) = 0$ となる。あるいは $Y(t) = N(t) = 0$ であるといえるほど、 $v(t) = r(t) = 0$ であったということを表わすために、「ある有限時間の間」といったと解してもよい。

することは、最初から無理であったともいえるのである。 注2)。

3 pure yaw 運動と forced yaw 運動における流体力の因果律

前節では、運動する船体に働く流体力を船体の運動速度の線形関数であると仮定して、座標系間の相違を検討した。本節では、船体運動に起因する流体力に因果律を課することから、同じ問題を再び考察する。

さて、ここでも前節の仮定2を採用する。すなわち、微小運動の仮定のもとでは、流体中を運動する船体に働く力は船体の運動速度の線形関数 (1-1) 式の形に書き表わすことができるとする。

$$\text{sway 力: } Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} K_r(t-\tau)r(\tau)d\tau \quad (2-1)$$

$$\text{yaw モーメント: } N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M_v(t-\tau)v(\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} M_r(t-\tau)r(\tau)d\tau \quad (2-2)$$

いうまでもなく、上式中の $v(t), r(t)$ はそれぞれ船体の sway 速度および yaw 角速度を表わすが、それらが空間固定座標系において定義されたものであるか、船体固定座標系において定義されたものかは、この段階では問わない。また、 $K_v(t), K_r(t), M_v(t), M_r(t)$ はいずれも、船体に働く sway 力と yaw モーメントの、 $v(t)$ および $r(t)$ に関するインパルス応答である。

我々が考察の対象としている、船体運動による sway 力および yaw モーメントというような巨視的な物理現象に、時間的先行性の意味での因果律を置くことは我々の認識の認めるところである。船体に生ずる流体力に、この意味での因果律を課することは (2-1), (2-2) 式中のインパルス応答 $K_v(t), K_r(t), M_v(t), M_r(t)$ のフーリエ変換の実数部と虚数部——それらは運動角周波数 ω の関数としての流体力微係数に対応している——は互に独立ではないということを意味し、よく知られた Kramers-Kronig の関係式によって結ばれる^{9),10),11)}。以下、因果律から帰結される Kramers-Kronig の関係式を、具体的に検討する。

まず、船体固定座標系を用いて船体運動を記述する場合を考える。この座標系の下で定義された sway 速度と yaw 角速度を $v(t), r(t)$ とすると、(2-1), (2-2) 式は便宜的に次の線形方程式で置換えられることがあ

注2) この方程式は時間を独立変数とする常微分方程式でありながら、その係数は周波数 ω の関数になっているので、数学的に正しい表現ではない。正しくは integro-differential equations として書かれるべきものである^{10),11),12),13),14)}。

$$Y(t) = \{m - Y_v(\omega)\} \frac{dv}{dt} - Y_v(\omega)v - Y_r(\omega) \frac{dr}{dt} + \{mU - Y_r(\omega)\}r \quad (2-3)$$

$$N(t) = -N_v(\omega) \frac{dv}{dt} - N_v(\omega)v + \{I_{zz} - N_r(\omega)\} \frac{dr}{dt} - N_r(\omega)r \quad (2-4)$$

ここで、 m, I_{zz} は船の質量および z 軸まわりの慣性モーメントで、下付き添字の係数はその添字に関する偏微分係数を表わすものとする。上式中の周波数 ω の関数である諸係数を実験的に決める方法として、いわゆる Planar Motion Mechanism を用いて pure sway 試験および pure yaw 試験と呼ばれる実験を行なう方法があり¹⁵⁾、それぞれ sway 運動および yaw 運動に関連した微係数を決める遣り方が広く用いられている。船体固定座標系を用いる場合、pure sway 試験における船体の流体に対する運動は文字どおり純粋な並進運動で、 x 方向速度成分によっては sway 力も yaw モーメントも生じないので、pure sway 運動中の船体に生ずる流体力はまさに、 y 方向並進速度成分の存在によるものである。一方、pure yaw 運動中の船体は、静止した観測者の立場からみると回頭運動と同時に並進運動をしているが、すでに述べたように並進速度ベクトルは常に船体縦中心線の向きと一致しているので、この並進運動によっては sway 力も yaw モーメントも生ぜず、pure yaw 運動中の船体に加わる流体力は船体の流体に対する回頭運動にのみ起因するものである。このように船体固定座標系でいう pure sway 運動および pure yaw 運動中の船体に生ずる流体力は、船体の流体に対する並進運動および回頭運動のみによって生ずるものであり、このことは空間固定の座標系を用いる場合の pure sway 運動および pure yaw 運動、とくに後者の pure yaw 運動中の船体に生ずる流体力の成因が流体に対する回頭運動のみならず、流体に対する並進運動にもあることとくらべて著しい対比をなしている。

したがって、船体固定座標系を用いる場合の pure sway 運動中に働く力およびモーメントは、(2-1), (2-2) 式においては右辺第1項のみで記述され、(2-3), (2-4) 式では右辺第1項および第2項で表わされる。また pure yaw 運動では (2-1), (2-2) 式の右辺第2項、(2-3), (2-4) 式の右辺第3項および第4項で、力およびモーメントは表わされる。この結果、たとえば (2-1) 式の右辺第1項中の核関数 $K_v(t)$ のフーリエ変換

$$\tilde{K}_v(\omega) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t)e^{-i\omega t}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t) \cos \omega t dt - i \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t) \sin \omega t dt$$

$$\equiv \tilde{K}_v^c(\omega) - i \tilde{K}_v^s(\omega) \quad (2-5)$$

の実数部と虚数部は、運動角周波数 ω の関数としての流体力微係数と次の関係式で結ばれる¹¹⁾。

$$\tilde{K}_v^c(\omega) = -Y_v(\omega) \quad (2-6)$$

$$\tilde{K}_v^s(\omega) = -\omega \{m - Y_{\dot{v}}(\omega)\} \quad (2-7)$$

さらに流体力に因果律——インパルス応答 $K_v(t)$ は $t < 0$ なる t に対し $K_v(t) = 0$ ——を課せば、 $\tilde{K}_v^c(\omega)$ と $\tilde{K}_v^s(\omega)$ は互に独立でなくなる。便宜上、 $-\omega \{m - Y_{\dot{v}}(\infty)\}$ を $\tilde{K}_v^s(\infty)$ と書くことにすれば、

$$\tilde{K}_v^s(\omega) - \tilde{K}_v^s(\infty) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_v^c(y) - \tilde{K}_v^c(\infty)}{\omega - y} dy \quad (2-8)$$

$$\tilde{K}_v^c(\omega) - \tilde{K}_v^c(\infty) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{K}_v^s(y) - \tilde{K}_v^s(\infty)}{\omega - y} dy \quad (2-9)$$

が成立ち、これを流体力微係数で書き直すと

$$\omega \{Y_{\dot{v}}(\omega) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(y) - Y_v(\infty)}{\omega - y} dy \quad (2-10)$$

$$Y_v(\omega) - Y_v(\infty) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \{Y_{\dot{v}}(y) - Y_{\dot{v}}(\infty)\}}{\omega - y} dy \quad (2-11)$$

となる。なお、右辺の積分は Cauchy の主値とする。(2-8)～(2-11) 式と同様の関係式が、他の核関数 $K_r(t)$, $M_v(t)$, $M_r(t)$ についても成立つことはいうまでもない。ここでは後の便宜のため、(2-10), (2-11) 式に相当する $K_r(t)$ に関する関係式を重複をいとわず記しておく。

$$\omega \{Y_{\dot{r}}(\omega) - Y_{\dot{r}}(\infty)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_r(y) - Y_r(\infty)}{\omega - y} dy \quad (2-12)$$

$$Y_r(\omega) - Y_r(\infty) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y \{Y_{\dot{r}}(y) - Y_{\dot{r}}(\infty)\}}{\omega - y} dy \quad (2-13)$$

これら (2-10)～(2-13) 式が、流体力に課された因果律の一つの数式表現で、次の事実を意味している：流体中を単一周波数で調和運動する船体に働く流体力のうち運動と in phase な成分と quadrant な成分——いいかえれば、流体力を瞬時瞬時の船体運動速度に比例する成分と運動加速度に比例する成分の和で表現するとき、各成分中の比例係数——は (2-10)～(2-13) 式で互に結ばれるのである。

これと同じ事は、船体運動を空間固定座標系を用いて記述するときにも成立つであろうか。それは、sway・yaw の運動を (2-3), (2-4) 式の代りに

$$\left. \begin{aligned} Y(t) &= A_{22}(\omega) \ddot{\eta}_G + B_{22}(\omega) \dot{\eta}_G \\ &\quad + A_{26}(\omega) \ddot{\psi} + B_{26}(\omega) \dot{\psi} \\ N(t) &= A_{62}(\omega) \ddot{\eta}_G + B_{62}(\omega) \dot{\eta}_G \\ &\quad + A_{66}(\omega) \ddot{\psi} + B_{66}(\omega) \dot{\psi} \end{aligned} \right\} \quad (2-14)$$

と書くとき、運動角周波数 ω の関数である $A_{22}(\omega)$, $B_{22}(\omega)$ ……等が先の (2-10)～(2-13) 式の関係式と類似の関係式で結ばれるか否かと問うことに相当する^{注3)}。 ω の関数である $A_{22}(\omega)$, $B_{22}(\omega)$ ……等を実験的に決める方法としては、先の pure sway 試験・pure yaw 試験と類似な forced sway 試験・forced yaw 試験^{注4)}が一般的である。通常実施されている forced sway 試験は船の方位角 ψ を 0 に保ったまま、 η_G を単一周波数 ω の調和運動させるもので、これは船体固定座標系の場合の pure sway 試験と完全に一致している。一方、forced yaw 試験では η_G を $\eta_G = 0$ と保って、船の方位角 ψ を振幅 ψ_0 、角周波数 ω で周期的に変化させる。この場合船体は流体から、回頭運動のみならず並進運動による流体力をも受けることはすでに述べたとおりである。すなわち、

$$r = \frac{d\psi}{dt} = \psi_0 \omega \cos \omega t \equiv r_0 \cos \omega t \quad (2-15)$$

の yaw 角速度のほか、流体に対して y 方向並進運動成分

$$v = -U \sin \psi \approx -U \frac{r_0}{\omega} \sin \omega t \quad (2-16)$$

を有することになる。したがって、船体固定座標系の言葉を用いれば、船は (2-15) 式で与えられる yaw 角速度 $r(t)$ に相当する流体力を受け、かつ (2-16) 式の sway 速度 $v(t)$ に起因する流体力をも同時に受けることになる。しかし、空間固定の座標系によって船体運動を考えるかぎりには、forced yaw 運動中の船体に働く流体力は、船体の yaw 運動のみによって生ずると考えざるをえないので、船体に加わる力およびモーメントは

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K_r'(t-\tau) r(\tau) d\tau \quad (2-17)$$

$$N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} M_r'(t-\tau) r(\tau) d\tau \quad (2-18)$$

と表現されると考えることになる。ただし、核関数のダッシュ (') は、船体固定の座標系を用いた場合のインパルス応答 $K_r(t)$ と $M_r(t)$ と明確に区別するためである。ここで、核関数 $K_r'(t)$ のフーリエ変換を

$$\tilde{K}_r'(\omega) \equiv \tilde{K}_r^c(\omega) - i \tilde{K}_r^s(\omega) \quad (2-19)$$

注3) (2-14)式についても、注2)と同じことがいえる。
注4) 空間固定の座標系に基づくかぎり、それらは本来 pure sway 試験・pure yaw 試験と呼ばれるべきものであるが、船体固定の座標系による場合の pure sway 試験・pure yaw 試験の名称が早くから定着している⁵⁾。ここでもその呼称を用いる。

と書けば、その実数部と虚数部は (2-14) 式中の係数と

$$\tilde{K}_r'^e(\omega) = B_{26}(\omega) \quad (2-20)$$

$$\tilde{K}_r'^s(\omega) = -\omega A_{26}(\omega) \quad (2-21)$$

の関係で結ばれることは、先の (2-6), (2-7) 式と同様である。ところで、前述のように forced yaw 運動中の船体に働く力およびモーメントは回頭運動 (2-15) 式と並進運動 (2-16) 式に起因するのであるから、(2-20), (2-21) 式の右辺は次の内容を持つことになる。

$$\tilde{K}_r'^e(\omega) = B_{26}(\omega) = U Y_{\dot{v}}(\omega) - Y_r(\omega) \quad (2-22)$$

$$\tilde{K}_r'^s(\omega) = -\omega A_{26}(\omega) = \frac{U}{\omega} Y_v(\omega) + \omega Y_{\dot{r}}(\omega) \quad (2-23)$$

ここで、核関数 $K_r'(t)$ に因果律—— $K_r'(t) = 0, t < 0$ ——を課すると、(2-10)~(2-13) 式に相当する次式を得る (付録を参照)。

$$U \{Y_{\dot{v}}(\omega) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} - \{Y_r(\omega) - Y_r(\infty)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - y} \left[\frac{U}{y} Y_v(y) + y \{Y_{\dot{r}}(y) - Y_{\dot{r}}(\infty)\} \right] dy \quad (2-24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{U}{\omega} Y_v(\omega) + \omega \{Y_{\dot{r}}(\omega) - Y_{\dot{r}}(\infty)\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega - y} [U \{Y_{\dot{v}}(y) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} \\ & \quad - \{Y_r(y) - Y_r(\infty)\}] dy \end{aligned} \quad (2-25)$$

このようにして得られた (2-24), (2-25) 式が、すでに得られた (2-10)~(2-13) 式と矛盾してはならないことは、因果律の意味するところから明らかである。

まず、(2-24) 式を検討する。既知の関係 (2-13) 式を用いれば、(2-24) 式は

$$Y_{\dot{v}}(\omega) - Y_{\dot{v}}(\infty) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(y)}{y(\omega - y)} dy \quad (2-26)$$

となる。ここで右辺を変形し $Y_v(y)$ が y に関して偶関数であることを用いれば

$$-\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(y)}{y(\omega - y)} dy = -\frac{1}{\pi \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(y)}{\omega - y} dy \quad (2-27)$$

となり、さらに恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\omega - y} = 0 \quad (2-28)$$

を使えば、(2-26) 式の右辺は

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(y)}{y(\omega - y)} dy \\ &= -\frac{1}{\pi \omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(y) - Y_v(\infty)}{\omega - y} dy \end{aligned} \quad (2-29)$$

となるので、(2-24) 式は (2-10) 式と一致し、別に矛盾は生じない。

一方、(2-25) 式に既知の関係式 (2-12) を用いると

$$Y_v(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - y} \{Y_{\dot{v}}(y) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} dy \quad (2-30)$$

となるが、右辺を変形して

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - y} \{Y_{\dot{v}}(y) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\omega - y} \{Y_{\dot{v}}(y) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} dy \\ & \quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{Y_{\dot{v}}(y) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} dy \end{aligned} \quad (2-31)$$

とし、既知の関係式 (2-11) 式を用いれば、上式は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - y} \{Y_{\dot{v}}(y) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} dy \\ &= Y_v(\omega) - Y_v(0) \end{aligned} \quad (2-32)$$

となり、(2-30) 式は

$$Y_v(\omega) = Y_v(\omega) - Y_v(0) \quad (2-33)$$

に帰着する。これは、 $Y_v(0)$ が 0 であらざるかぎりには矛盾である。この矛盾は、forced yaw 運動中の船体に生ずる流体力を回頭運動のみによって生ずるとみなす——このことは空間固定座標系を用い、かつ流体力に関する仮定 2 を受け入れるかぎり避けられないことである——ことによって生じたのである。さらに上述の検討は、forced yaw 試験によって得られる流体力微係数の対、 $A_{26}(\omega)$ 対 $B_{26}(\omega)$ および $A_{66}(\omega)$ 対 $B_{66}(\omega)$ に Kramers-Kronig の関係式が成立たないことを示している。だからといって、空間固定の座標系を用いて書かれた運動方程式が誤りであるといっているのではないことは、重ねがさね強調しておく必要がある。しかしながら、因果律が明解な形で成立つということ、いいかえれば流体力のうち運動と in phase の成分と quadrant な成分の間に物理的に明解な関係式が成立つということは、その成分の物理的意味を明確に理解することができるという点で、もう一方のしからざる場合にくらべて、すぐれた理解の方法といえる。さらに、このこととも関連すると思われることに、sway・yaw 運動を (2-14) 式のように記述した場合の係数の物理的解釈の問題がある。たとえば、同式中の $A_{66}(\omega)$ と $B_{66}(\omega)$ を見掛け慣性モーメントおよび yaw damping 係数と呼ぶことは適切ではないと筆者は考える。

4 結 言

ある物理現象を記述する、あるいは理解する仕方に、いま二通りの方法があるとき、

- i) それら二通りの方法は全く同等で、どちらの方法によるにしろ、その物理現象の本質を的確に捉えることができる。

という結論を得る場合と

- ii) 二者のうち、いずれか一方による方がその物理現象の本質を、よりの確に捉えることができると同時に、それと関連する他の現象の理解も容易になる。

という結論を得る場合の可能性がある。緒言にも述べたように、船の sway・yaw 運動を記述するために現在用いられている座標系に、空間固定座標系と船体固定座標系の二通りがあるわけであるが、これら二通りの方法のうち、いずれを選択するのが、より合理的であるのか、すなわち前述の両座標系は i) であるのか ii) であるのかを見極めるために、船体運動によって生ずる流体力に若干の基本的仮定をおいて考察しようとしたのが本論文の狙いであった。前節、前々節の考察の結果に関するかぎりは解答は ii) で、船体自身の運動により船体に生ずる流体力を、より合理的に理解するには空間固定座標系によるよりは船体固定座標系を用いる方が、より適切であると筆者は考える。しかしながら筆者も、本論文での考察がこの種の問題に対する結論を導くのに十分であったとは考えていない。本論文での検討は、尽すべき検討のほんの一部であって、他の面から考えると、むしろ空間固定座標系の方がすぐれているという見解が出て不思議ではない。筆者はそのような反論をむしろ期待するものであり、そのような議論を通して我々の sway・yaw 運動の理解がより良くなることを願うものである。

終りに、本論文の草稿の段階で試験水槽委員会第二部会の委員の方々ほか諸氏に、熱心にご討論いただいたことを記し、ここに深甚なる謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) Bunge, M.: "Causality—The Place of the Causal Principle in Modern Science", Harvard Univ. Press, (1959) (邦訳: 黒崎 宏, "因果性", 岩波書店, 1972).
- 2) Landau, L.D., and Lifshitz, E.M.: "Statistical Physics", Addison Wesley, (1958).
- 3) 田才福造: "Beam Sea における船体運動", 西部造船会会報, No. 30, (1965).
- 4) 田才福造, 高木又男: "規則波中の応答理論および計算法", 耐航性に関するシンポジウム (日本造船学会), (1968).
- 5) 高木幹雄, 田才福造: "横運動方程式の流体力について", 西部造船会会報, 第46号, (1973).
- 6) Davidson, K.S.M.: "On the Turning and Steering of Ships", Trans. SNAME, (1944).
- 7) 元良誠三: "航路安定性について", 造船協会会報第77号, (1955).
- 8) Gertler, M. and Hagen, G.R.: "Standard Equations of Motion for Submarine Simulation", NSRDC Rep. 2510, (1967).
- 9) Kotik, J. and Mangulis, V.: "On the Kramers-Kronig Relations for Ship Motion", International Shipbuilding Progress, Vol. 9, (1962).
- 10) Ogilvie, T.F.: "Recent Progress toward the Understanding and Prediction of Ship Mo-

tions", Fifth Symposium on Naval Hydrodynamics, (1964).

- 11) Fujino, M.: "The Effect of Frequency Dependence of the Stability Derivatives on Maneuvering Motion", International Shipbuilding Progress, Vol. 22, (1975).
- 12) Cummins, W.E.: "The Impulse Response Function and Ship Motions", Schiffstechnik, Vol. 9, (1962).
- 13) Lin, W.C.: "An Initial-Value Problem for the Motion of a Ship Moving with Constant Mean Velocity in an Arbitrary Seaway", Univ. of California, Rep. No. NA-66-9, (1967).
- 14) Frank, T., Loesen, D.J., Scragg, C.A., Sibul, O.J., Webster, W.C. and Wehausen, J.V.: "Transient-Maneuver Testing and the Equation of Maneuvering", 11th Symposium on Naval Hydrodynamics, (1976).
- 15) Gertler, M.: "The DTMB Planar-Motion-Mechanism System", Proc. of Symposium on Towing Tank Facilities, Zagreb, (1959).

付 録

核関数 $K_r'(t)$ のフーリエ変換 $\tilde{K}_r'(\omega)$ の実数部と虚数部は (2-22), (2-23) 式が示すとおり、角周波数 ω の関数としての流体力微係数で与えられるから

$$\begin{aligned} K_r'(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_r'(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_r'^c(\omega) \cos \omega t d\omega \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}_r'^s(\omega) \sin \omega t d\omega \\ &\equiv K_{re}'(t) + K_{ro}'(t) \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

なる逆変換によって、 $K_r'(t)$ を具体的に決定することができる。ただし、Kramers-Kronig の関係式を導くには核関数の詳細な具体的関数形は必要ではなく、核関数が $t=0$ にインパルスを持つかどうか、持つとすればいかなる形のインパルスかがわかれば十分である。(A-1) 式の最後の式は $K_r'(t)$ を偶関数部 $K_{re}'(t)$ と奇関数部 $K_{ro}'(t)$ の和の形に書き表わしたものである。偶関数部 $K_{re}'(t)$ は、

$$\begin{aligned} K_{re}'(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{UY_{\dot{v}}(\omega) - Y_r(\omega)\} \cos \omega t d\omega \\ &= \frac{U}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{Y_{\dot{v}}(\infty) + Y_{\dot{v}}(\omega) \\ &\quad - Y_{\dot{v}}(\infty)\} \cos \omega t d\omega \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{Y_r(\infty) + Y_r(\omega) \\ &\quad - Y_r(\infty)\} \cos \omega t d\omega \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

となる。ここで $Y_{\dot{v}}(\omega)$ を $Y_{\dot{v}}(\infty) + Y_{\dot{v}}(\omega) - Y_{\dot{v}}(\infty)$ としたのは、一般に $Y_{\dot{v}}(\infty) \neq 0$ であるため $Y_{\dot{v}}(\omega)$ のままではフーリエ余弦変換は収束しないことを考慮した

からである (詳しくは文献 11) を参照)。このように変形しておく、

$$K'_{re}(t) = UY_{\dot{v}}(\infty)\delta(t) + UK'_{re1}(t) - Y_r(\infty)\delta(t) - K'_{re2}(t) \quad (A-3)$$

と書くことができる。ここで $K'_{re1}(t)$, $K'_{re2}(t)$ は次式で定義され、 t の全域でインパルスを含まない関数である。

$$\left. \begin{aligned} K'_{re1}(t) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{Y_{\dot{v}}(\omega) - Y_{\dot{v}}(\infty)\} \cos \omega t d\omega \\ K'_{re2}(t) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{Y_r(\omega) - Y_r(\infty)\} \cos \omega t d\omega \end{aligned} \right\} \quad (A-4)$$

結局、 $K'_{re1}(t)$ は $t=0$ において $UY_{\dot{v}}(\infty)\delta(t)$ と $-Y_r(\infty)\delta(t)$ の 2 つのインパルスを持つことがわかる。

一方、奇関数部 $K'_{r0}(t)$ は定義より

$$K'_{r0}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{U}{\omega} Y_v(\omega) + \omega Y_{\dot{r}}(\omega) \right\} \sin \omega t d\omega \quad (A-5)$$

である。右辺{ }内の第 1 項 $Y_v(\omega)/\omega$ はたとえ $Y_v(\omega)$ が ω の全域で特異性がないとしても、 $1/\omega$ の因子のため $\omega=0$ で特異になる。そこで右辺第 1 項を

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\omega} [Y_v(0) + \{Y_v(\omega) - Y_v(0)\}] \sin \omega t d\omega \end{aligned} \quad (A-6)$$

とすると、第 1 項は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(0)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{Y_v(0)}{2} \operatorname{sgn} t \quad (A-7)$$

となる。第 2 項の積分は存在するとし注 5), これを $K'_{r01}(t)$ と書くことにする。よって、

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U}{\omega} Y_v(\omega) \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{U}{2} Y_v(0) \operatorname{sgn} t + UK'_{r01}(t) \end{aligned} \quad (A-8)$$

ただし

$$K'_{r01}(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_v(\omega) - Y_v(0)}{\omega} \sin \omega t d\omega \quad (A-9)$$

(A-5) 式の右辺第 2 項の積分は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega Y_{\dot{r}}(\omega) \sin \omega t d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega [Y_{\dot{r}}(\infty) + \{Y_{\dot{r}}(\omega) - Y_{\dot{r}}(\infty)\}] \sin \omega t d\omega \\ &= -Y_{\dot{r}}(\infty) \frac{d\delta(t)}{dt} + K'_{r02}(t) \end{aligned} \quad (A-10)$$

となる。ただし

$$K'_{r02}(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega \{Y_{\dot{r}}(\omega) - Y_{\dot{r}}(\infty)\} \sin \omega t d\omega \quad (A-11)$$

まとめると、

$$K'_{r0}(t) = \frac{U}{2} Y_v(0) \operatorname{sgn} t + UK'_{r01}(t) - Y_{\dot{r}}(\infty) \frac{d\delta(t)}{dt} + K'_{r02}(t) \quad (A-12)$$

となり、 $K'_{r0}(t)$ は $t=0$ でインパルス $-Y_{\dot{r}}(\infty)d\delta(t)/dt$ を持つことになる。

さて、一般に時間の原点においてインパルスを持たない因果性関数 $f(t)$ — $t < 0$ なる t に対しては $f(t) = 0$ — の偶関数部 $f_e(t)$ と奇関数部 $f_o(t)$ は

$$\left. \begin{aligned} f_e(t) &= f_o(t) \operatorname{sgn} t \\ f_o(t) &= f_e(t) \operatorname{sgn} t \end{aligned} \right\} \quad (A-13)$$

の関係で結ばれるので、因果性関数 $K'_r(t)$ についても (A-13) 式と類似の式が成立つことが期待される。しかし (A-3), (A-12) 式から明らかのように $K'_{re}(t)$ は $t=0$ に $UY_{\dot{v}}(\infty)\delta(t)$ と $-Y_r(\infty)\delta(t)$ の 2 個のインパルスを、 $K'_{r0}(t)$ は $t=0$ に $-Y_{\dot{r}}(\infty)d\delta(t)/dt$ のインパルスを持つので、このことを考慮してやると、(A-13) 式と類似な関係式として

$$\begin{aligned} &K'_{re}(t) - UY_{\dot{v}}(\infty)\delta(t) + Y_r(\infty)\delta(t) \\ &= [K'_{r0}(t) + Y_{\dot{r}}(\infty) \frac{d\delta(t)}{dt}] \operatorname{sgn} t \end{aligned} \quad (A-14)$$

$$\begin{aligned} &K'_{r0}(t) + Y_{\dot{r}}(\infty) \frac{d\delta(t)}{dt} \\ &= [K'_{re}(t) - UY_{\dot{v}}(\infty)\delta(t) + Y_r(\infty)\delta(t)] \operatorname{sgn} t \end{aligned} \quad (A-15)$$

を得る。(A-14), (A-15) 式が時間の領域で核関数 $K'_r(t)$ の因果性を示すものである。この両式をフーリエ変換すれば (2-24), (2-25) 式を直ちに得る。

注 5) (A-9) 式の右辺の積分が確かに存在することを厳密に証明することは、微係数 $Y_v(\omega)$ の ω の全域での正確な知識を必要とするので、因果律の数式表現を別の面から考えてみる。すでに示したように因果律を考える際、我々に必要なのは、核関数 $K'_{re}(t)$ と $K'_{r0}(t)$ が $t=0$ でインパルスを持つか否か、持つとしたらどのようなインパルスかがわかれば事足りる。

核関数 $K'_r(t)$ は船がインパルス状の yaw 角速度をもったときに船体に加わる sway 力であること、このとき船体は流体に対して線速度成分 $v(t) = -U \sin \psi$ をもつことに注意すると、船体に加わる流体力は $\psi \ll 1$ として、

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} K'_r(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} K_r(t-\tau) \delta(\tau) d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t-\tau) \left(-U \int_{-\infty}^{\tau} \delta(p) dp \right) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_r(t-\tau) \delta(\tau) d\tau \\ &\quad - U \int_{-\infty}^{\infty} K_v(t-\tau) H(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (A-16)$$

ただし $H(\tau)$ は τ に関する単位ステップ関数である。これから、 $K'_r(t)$ は $K_r(t)$, $K_v(t)$ と

$$\begin{aligned}
 K_r'(t) &= K_r(t) - U \int_0^\infty K_v(t-\tau) d\tau \\
 &= K_r(t) - U \int_{-\infty}^t K_v(\tau) d\tau \quad (A-17)
 \end{aligned}$$

で結ばれることがわかる。よって、 $K_r'(t)$ の偶関数部 $K'_{re}(t)$ と奇関数部 $K'_{r0}(t)$ は

$$\left. \begin{aligned}
 K'_{re}(t) &= K_{re}(t) - U \int_{-\infty}^t K_{v0}(\tau) d\tau \\
 K'_{r0}(t) &= K_{r0}(t) - U \int_{-\infty}^t K_{ve}(\tau) d\tau
 \end{aligned} \right\} \quad (A-18)$$

と書き表わせる。ところで

$$\left. \begin{aligned}
 K_{re}(t) &= \{mU - Y_r(\infty)\} \delta(t) + K_{re}^*(t) \\
 K_{r0}(t) &= -Y_r(\infty) \frac{d\delta(t)}{dt} + K_{r0}^*(t) \\
 K_{ve}(t) &= -Y_v(\infty) \delta(t) + K_{ve}^*(t) \\
 K_{v0}(t) &= \{m - Y_v(\infty)\} \frac{d\delta(t)}{dt} + K_{v0}^*(t)
 \end{aligned} \right\} \quad (A-19)$$

であるから¹¹⁾、 $K_{re}'(t)$ は

$$K_{re}'(t) = \{mU - Y_r(\infty)\} \delta(t) + K_{re}^*(t)$$

$$\begin{aligned}
 &- U \int_{-\infty}^t \left[\{m - Y_v(\infty)\} \frac{d\delta(\tau)}{d\tau} \right. \\
 &\quad \left. + K_{v0}^*(\tau) \right] d\tau = U Y_v(\infty) \delta(t) \\
 &\quad - Y_r(\infty) \delta(t) + K_{re}^*(t) \\
 &\quad - U \int_{-\infty}^t K_{v0}^*(\tau) d\tau \quad (A-20)
 \end{aligned}$$

となって先の (A-3) 式と同じ形になり、 $t=0$ ではインパルス $U Y_v(\infty) \delta(t)$ と $-Y_r(\infty) \delta(t)$ を有する。一方、 $K_{r0}'(t)$ は

$$\begin{aligned}
 K_{r0}'(t) &= -Y_r(\infty) \frac{d\delta(t)}{dt} + K_{r0}^*(t) \\
 &\quad - U \int_{-\infty}^t \{-Y_v(\infty) \delta(\tau) + K_{ve}^*(\tau)\} d\tau \\
 &= -Y_r(\infty) \frac{d\delta(t)}{dt} + K_{r0}^*(t) + U Y_v(\infty) \\
 &\quad - U \int_{-\infty}^t K_{ve}^*(\tau) d\tau \quad (A-21)
 \end{aligned}$$

となり、 $t=0$ にインパルス $-Y_r(\infty) d\delta(t)/dt$ を持つことがわかる。