(昭和52年11月 日本造船学会秋季講演会において講演)

流体力学諸問題の一離散化解析

(その 1)

正員 川 井 忠 彦* 渡 辺 正 明**

A Discrete Method of Analysis on Fluid Dynamics Problem (1st Report)

by Tadahiko Kawai, *Member* Masaaki Watanabe

Summary

Recently the finite element method for analysis of flow problems has been established and a number of important contributions are being reported every year all over the world.

It is common practice to use the higher order shape functions for these finite element flow analysis. Use of the higher order shape functions, however, may present a serious problem on computing time and cost in practice and it is believed that this situation will be more critical in case of flow analysis than in case of nonlinear analysis of solid mechanics problems.

In view of such a situation, use of the lower order shape functions will be proposed in the finite element analysis of flow problems in this paper. In this approach, the higher derivative of velocity components, for example, will be approximated by the finite difference expression of the lower order derivatives. Therefore, it is expected that computing time for matrix manipulation will be considerably reduced. So far, application of this method has been made to analysis of KdV equation in the shallow water wave, steady creep flow and the potential flow problems. Results of these analysis have duly proved validity of this method. In this paper application will be attempted to analysis of the Navier-Stokes equation and discussion will be presented in comparison with existing finite element method.

1 緒 言

有限要素法は造船工学の分野では、その当初から船体構造強度解析に用いられ、かなりの成果をあげている。しかし、船舶流体力学の面では付加質量等の計算の目的で自由表面条件を線形化した Potential 理論に若干の応用例がみられるのみのようである³⁾。また、Navier-Stokes 方程式を直接解いて船体回りの流れ場を解析することは行われていないようである。これは、自由表面という、非常に扱いにくい境界条件が課せられるためだと思われる。2次元没水体回りの流れ場は、Navier-Stokes 方程式を線形化した Oseen 式を考えることによって、姫野によって解かれている⁴⁾。また最近、山本らは外部解としての Oseenlet と内部解としての有限要素法解とを重ね合わせることで、同様な問題を解いている¹⁰⁾。木下は、Oseenlet を物体表面に分布させ、積分方程式を解くことによって3次元没水体回りの流れ場を求めている²⁾。

本報告で、著者らは有限要素法により非圧縮性流体の

Navier-Stokes 方程式を直接解く一つの方法を提案するものである。有限要素法では、有限な領域を有限個の要素に分割し、各要素の節点値を用い要素内を多項式で近似するのが普通である。従来の有限要素法による流れ問題（主に粘性流体）の解析では、用いる要素の適合、非適合とに拘らず比較的高次の形状関数を用いられてきた^{4),5)}。流れ問題では慣性項に起因する強い非線形性の存在のため、高次の形状関数を用いると、自由度が多くなるばかりでなく、その計算のためには多くの時間と費用を要する。また、要素マトリックスの定式化も複雑となるばかりでなく、数値積分などの手段も必要となってくる。

このような従来の有限要素法におけるいくつかの短所を考へて、著者らは、従来より低次の形状関数を用いる有限要素法を提案し、比較的高階な偏微分方程式によって支配される問題、例えば、浅水波問題における KdV 方程式や、2次元定常クリープ流れに応用し良好な結果を得た⁷⁾。そこでこの思想は、有限要素法と差分法とを組み合わせる用いればよいことであつた。

この考へが、すべての問題に適用できるとは思われないが、本報告では Navier-Stokes 方程式に適用する時の

* 東京大学生産技術研究所

** 東京大学大学院

方法について述べる。解析領域を三角形要素の集合に分割するのは、従来の有限要素法と同じであるが、その要素内での速度、圧力を重心点での値によって代表させ、差分法による解析を前提として開発された SMAC 法 (simplified marker and cell method)⁹⁾ と FLIC 法⁶⁾ (fluid in cell method) とを組み合わせ用いることによって行なった。今回は、まだ基礎的な問題しか解析していないが、御批判を仰ぎたく、発表する次第である。

2 基礎式

流体力学の問題は、移動現象問題の一つとして考えることができ、その支配微分方程式は、質量、運動量、エネルギーなどの保存則から導びける。いま、流体は Newton 流体であるとして、Stokes の関係を仮定すれば、Fig. 1 に示す境界面 $\partial\Omega$ で囲まれた閉領域 Ω に関して、それぞれの保存則は総和規約を用いて次のように書ける。

質量保存則

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho dV = - \iint_{\partial\Omega} \rho v_i n_i dS \quad (1)$$

運動量保存則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho v_i dV = & - \iint_{\partial\Omega} P n_i dS \\ & + \mu \iint_{\partial\Omega} (v_{i,j} + v_{j,i}) n_j dS \\ & - \iint_{\partial\Omega} \rho v_i v_j n_j dS \end{aligned} \quad (2)$$

エネルギー保存則

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} |v|^2 + E \right) dV = & - \iint_{\partial\Omega} P v_i n_i dS \\ & + \mu \iint_{\partial\Omega} (v_{i,j} + v_{j,i}) v_i n_j dS \\ & + \iiint_{\Omega} Q dV - \iint_{\partial\Omega} q_i n_i dS \\ & - \iint_{\partial\Omega} \rho \left(\frac{1}{2} |v|^2 + E \right) v_i n_i dS \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 ρ : 質量

t : 時間

v_i : 速度ベクトルの i 方向の成分

$P = p + \frac{2}{3} \mu \Theta \dots (\Theta = v_{i,i})$

p : 圧力

μ : 粘性係数

$|v|^2 = v_i v_i$

E : 内部エネルギー

Q : 発熱量

q_i : 熱流束ベクトルの i 方向成分

n_i : 外向き法線ベクトルの i 方向への方向余弦

また、(2)、(3) 式において、物体力は potential か

Fig. 1 One domain Ω bounded by $\partial\Omega$

ら導びけるものとして、圧力 p に含まれている。上述の保存則は直交デカルト座標系で示してある。

さて、非圧縮性を仮定したときの支配微分方程式は、(1)、(2) 式の表面積分を、Gauss の発散定理を用いて体積分分に書き換えれば、領域 Ω が任意であることより、非圧縮性流体の保存則、つまり連続の式

$$v_{i,i} = 0 \quad (4)$$

と、運動方程式

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - \frac{p_{,i}}{\rho} + \nu v_{i,jj} - v_j v_{i,j} \quad (5)$$

とが求められる。ここに、 ν は動粘性係数と呼ばれ次式で定義される。

$$\nu = \mu / \rho$$

(4) 式よりわかるように、非圧縮性流体では、質量保存則が特別な形をしている。つまり、時間微分項を含んでいないことより、数値解析上の困難さの原因となっている。

3 数値計算法

3.1 MAC, SMAC と FLIC 法について

2 次元問題を考えることにする。本解析法の説明に入る前に MAC 法 (marker and cell method)⁸⁾ や SMAC 法、FLIC 法の簡単な説明を行ないたい。

MAC 法は非圧縮性粘性流体解析のために開発された差分法のアルゴリズムで、(4) 式の連続の式を厳密に満足させるのではなく、逐次近似計算の修正項的なものとして用いるものとして、連続の式の満足度を表わすパラメーター

$$D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6)$$

を導入する。(5) 式より圧力に関する Poisson の式が次のように導びける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = & - \left(\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 uv}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} \right) \\ & + \nu \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial D}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

ここに、 $S = p / \rho$ である。

上の 3 つの方法とも unsteady approach method と呼ばれる数値解法の一つで、課せられた境界条件の下での定常解、あるいは非定常解を適当な初期条件より出発し、各時間ごとに解を求める方法である。

さて、MAC 法では、時間微分項を Euler 法による差分で近似する。

$$\frac{\partial D}{\partial t} \doteq \frac{D^{(n+1)} - D^{(n)}}{\delta t} \quad (8)$$

これ以後、上の添字は時間サイクルを示すものとする。 $t=n\delta t$ の $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $S^{(n)}$ を知って $t=(n+1)\delta t$ の解を求めるのに次の 2 段階のステップを踏む。第 1 は、(7) 式において $D^{(n+1)}=0$ と仮定し、 $S^{(n+1)}$ を求める。第 2 に、これを (5) 式に代入し、 $u^{(n+1)}$, $v^{(n+1)}$ を求める。

SMAC 法とは、MAC 法における第 1 ステップの計算を簡略化したものである。次の (9), (10), (11) 式を考えてみる。

$$\bar{v}_i = v_i^{(n)} - \delta t (v_j^{(n)} v_{i,j}^{(n)} - \nu v_{i,jj}^{(n)}) \quad (9)$$

$$S_{ij}^{(n)} = \bar{v}_{i,j} \quad (10)$$

$$v_i^{(n+1)} = \bar{v}_i - S_{ii}^{(n)} \quad (11)$$

(9), (11) 式より

$$\frac{v_i^{(n+1)} - v_i^{(n)}}{\delta t} = -\frac{S_{ii}^{(n)}}{\delta t} - (v_j^{(n)} v_{i,j}^{(n)} - \nu v_{i,jj}^{(n)}) \quad (12)$$

を得るが、もし

$$\left. \begin{aligned} S &= \rho \delta t / \rho \\ v_{i,t} &= 0 \text{ at } t=0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ならば、(12) 式より、(9), (10), (11) 式を順に用いて解く SMAC 法のアルゴリズムは、(4), (5) 式と比較して非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式の近似解法となっていることがわかる。

次に FLIC 法であるが、これは圧縮性流体解析の目的のために開発されたアルゴリズムである。最初は直交格子を用いる差分法を前提としていたが、最近、足立は、これを有限要素法に近い立場で、任意形状境界が扱えるように、不等三角形メッシュによる差分法を提案した⁶⁾。

圧縮性流体では、すべての物理量が保存則表示され、質量、運動量、エネルギー等をまとめて一つのベクトル G で表わせば、(1), (2) と (3) 式より

$$\frac{D}{Dt} \iint_{\Omega} G dV = Q \quad (14)$$

と書くことができる。ここに、 D/Dt は物質導関数で次式で定義される。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Q は、(1), (2), (3) 式の右辺において、物質導関数に無関係な項をまとめて、式の順に並べてベクトル表示したものである。FLIC 法では、第 1 に、(14) 式の左辺の物質導関数を単純な Euler 法による差分近似

$$\frac{\bar{G} - G^{(n)}}{\delta t} A_0 = Q \quad (15)$$

を行なって、中間的な値 $\bar{G}$ を求める。ここに、 A_0 は注目している要素の面積である。

次に、要素境界上における速度が、その要素の外向きであるか、内向きであるかによって、中間値 $\bar{G}$ が、 $t=(n+1)\delta t$ の段階で、流出していくのか、あるいは、回りの要素から流入してくるのかを考えて、 $G^{(n+1)}$ を求める。

このように、FLIC 法は、質量、運動量等の輸送を考えるという点で、かなり物理的モデルに近い数値解法であると思われる。これに対して MAC 法は、Navier-Stokes 方程式をそのまま差分近似して解く方法で数学的モデルであると思われる。しかし、その名が示すように、直交格子に切った各セル内に慣性のない Marker を置き、その飛跡を追跡するという点では、FLIC 法と一脈相通じるものがあるように思われる。また、この Marker を配置することにより、自由表面のある問題が比較的容易に処理できる利点をもっている。

3.2 SMAC+FLIC 法による非圧縮粘性流れの数値解法

前章で述べた SMAC 法のアルゴリズムで非圧縮性粘性流れの解析を行なう。この時、FLIC 法の運動量などが輸送されるという概念も導入する。まず、そのために三角形要素内で積分して、(9), (10), (11) 式の保存則表示式を求めれば

$$\iint_{\Omega_i} \bar{v}_i dS = \iint_{\Omega_i} v_i^{(n)} dS - \delta t \int_{\partial \Omega_i} (v_j^{(n)} v_{i,j}^{(n)} n_j - \nu v_{i,jj}^{(n)} n_j) ds \quad (16)$$

$$\int_{\partial \Omega_i} S_{ij}^{(n)} n_j ds = \int_{\partial \Omega_i} \bar{v}_i n_i ds \quad (17)$$

$$\iint_{\Omega_i} v_i^{(n+1)} dS = \iint_{\Omega_i} \bar{v}_i dS - \int_{\partial \Omega_i} S_{ii}^{(n)} n_i ds \quad (18)$$

となる。

Fig. 2 4 triangular elements

さて、緒言で触れたように、Fig.2 に示す各三角形要素内、 v_i , S とも一定と考えているので、O-三角形要素に注目すれば、上式の面積積分は

$$\iint_{\Omega_i} \bar{v}_i dS = \bar{v}_i A_0 \quad (19)$$

となる。ここに、 Δ_0 は、O-三角形要素の面積である。また、(16)、(17)式にある、要素境界上の積分項の中の微分項は

$$\int_{\partial\Delta_0} S_{jk}^{(n)} n_j ds = \int_{\partial\Delta_0} \frac{\partial S^{(n)}}{\partial n} ds$$

と書けることより、Fig.2 を参照して、次のように近似する。

$$\int_{\partial\Delta_0} \frac{\partial S^{(n)}}{\partial n} ds \approx \sum_{i=1}^3 \frac{S_{jk}}{h_i + h_{\bar{i}}} (S_{\bar{i}}^{(n)} - S_0^{(n)}) \quad (20)$$

ここに、 i, j, k は 1, 2, 3 を循環的にとるものとする。次に、(16)式の慣性項の処理であるが、そこに FLIC 法 の概念を真似て隣接要素との運動量の流出、流入を考える。

$$v_j^{(n)} n_j = V_n^{(n)} \quad (21)$$

であるから、 $V_n^{(n)}$ が正の時は、その要素の運動量 v_{i0} が流出していき、 $V_n^{(n)}$ が負の時は、隣接要素の運動量 $v_{i\bar{i}}$ が流入してくると考える。

以上のことより、SMAC 法と FLIC 法とを組み合わせる非圧縮性流体の Navier-Stokes 方程式の離散近似は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 = u_0^{(n)} - \frac{\delta t}{\Delta_0} \left\{ \sum_{i=1}^3 \bar{u}_{\bar{i}jk}^{(n)} V_n \bar{v}_{\bar{i}h}^{(n)} S_{jk} \right. \\ \left. - \nu \sum_{i=1}^3 \frac{S_{jk}}{h_i + h_{\bar{i}}} (u_{\bar{i}}^{(n)} - u_0^{(n)}) \right\} \quad (22.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_0 = v_0^{(n)} - \frac{\delta t}{\Delta_0} \left\{ \sum_{i=1}^3 \bar{v}_{\bar{i}jk}^{(n)} V_n \bar{v}_{\bar{i}h}^{(n)} S_{jk} \right. \\ \left. - \nu \sum_{i=1}^3 \frac{S_{jk}}{h_i + h_{\bar{i}}} (v_{\bar{i}}^{(n)} - v_0^{(n)}) \right\} \quad (22.2) \end{aligned}$$

ここに、

$$V_n \bar{v}_{\bar{i}jk}^{(n)} = l_{jk} \frac{u_0^{(n)} + u_{\bar{i}}^{(n)}}{2} + m_{jk} \frac{v_0^{(n)} + v_{\bar{i}}^{(n)}}{2}$$

であり、また

$$\bar{u}_{\bar{i}jk}^{(n)} = \begin{cases} u_0^{(n)} & (V_n \bar{v}_{\bar{i}jk}^{(n)} > 0) \\ u_{\bar{i}}^{(n)} & (V_n \bar{v}_{\bar{i}jk}^{(n)} < 0) \end{cases} \quad (23)$$

である。

$$\sum_{i=1}^3 \frac{S_{jk}}{h_i + h_{\bar{i}}} (S_{\bar{i}}^{(n)} - S_0^{(n)}) = \sum_{i=1}^3 V_n \bar{v}_{\bar{i}jk}^{(n)} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0^{(n+1)} &= \bar{u}_0^{(n)} - \frac{1}{\Delta_0} \sum_{i=1}^3 \frac{S_0^{(n)} + S_{\bar{i}}^{(n)}}{2} l_{jk} S_{jk} \\ v_0^{(n+1)} &= \bar{v}_0^{(n)} - \frac{1}{\Delta_0} \sum_{i=1}^3 \frac{S_0^{(n)} + S_{\bar{i}}^{(n)}}{2} m_{jk} S_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ここに、 s_{jk} は O-三角形要素の辺 jk の長さであり、 l_{jk} 、 m_{jk} は辺 jk の外向き法線の方向余弦である。

結局、(22)、(24)、(25)式を順に解いて非定常解析を行えばよい。

(22)、(25)式において、要素境界上の速度 $v_i^{(n)}$ 、圧力 $S^{(n)}$ を求める必要があるが、不等三角形要素を用いる時は、重みを付けた次式を用いる。

$$S_{jk}^{(n)} = \frac{1}{h_i + h_{\bar{i}}} (h_{\bar{i}} S_0^{(n)} + h_i S_{\bar{i}}^{(n)})$$

境界条件は、Fig.3 に示すように境界要素と鏡像関係にある仮想要素を考える。Dirichlet タイプの境界条件に関しては、仮想要素との平均値が既知の値と等しいと考える。すなわち

$$\frac{S_0 + S_{\bar{i}}}{2} = \bar{S}_{23} \quad (26)$$

とおく、また、Neumann タイプの場合は、

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial n} = \frac{S_{\bar{i}} - S_0}{2h_i} \quad (27)$$

と近似する。しかし、(22)、(24)、(25)式において、上の二つのタイプの境界条件を厳密に評価できるものには、(26)、(27)式の近似式は用いない。

Fig. 3 Boundary and artificial elements

4 数値計算例

ここで提案したアルゴリズムで、粘性流に付きものの渦がはたして生じるか否かを検討した例題が Fig.4 に示されている。境界条件は Fig.4a に示されているように、流入口 AB と流出口 GH に x 軸方向の速度 u が y 軸方向に放物状の分布をなして一様に流れ、そこでの圧力は一定であるとして、 $t=0$ で突然に CF 部分の被いを取り除くという初期条件で非定常解析を行なった。最初くぼみ部分の流体は静止していると仮定したために、動粘性率を大きくするとその底部に渦が生じるという結果が得られた。これは次のように説明される。つまり、ABGH を一様に流れている主流が、粘性が高ければ高いほどくぼみの上部を引っばる効果大きい。くぼみの CF 付近の流れが主流に引きつられ流れ始めるが壁 EF に遮られ底部に渦が生じるのだと思われる。

なお、本方法は unsteady approach method であるので、用いる初期条件によっては、流れのパターンが異なったものになることがあるので、注意する必要がある。Fig.4 に示す解析では、時間間隔を $\Delta t=0.01$ とし、また、定常解が得られた判定する条件は次式を用いた。

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left| \frac{S^{(n+1)} - S^{(n)}}{S^{(n+1)}} \right| \leq 10^{-4} \quad (28)$$

ここに、 n は要素数である。

本解析法では、(24)式の Poisson の式を各時間ステッ

Fig. 4 Open flow with a cavity

ブごとに解かなければならないが、その解法として SOR を用いた。SOR を用いる利点は、前段階での解をその収束計算の初期値として用いると、計算時間がかなり短縮できることと、適当な初期条件より出発して定常解を求めようとする場合、最初から SOR の収束判定条件を厳しくする必要はなく、ある程度解が落ち着いてきたら厳しくすればよい点にあると思われる。

Fig. 5 に急拡大水路の流れの解析結果を示す。Fig. 5 (a) に境界条件を示すが、流出口 EF の境界条件として川原らは応力型の境界条件を用いているが⁴⁾、本アルゴリズムによる解法では考慮しにくいので次式を用いた。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0$$

$$p=0$$

つまり、速度に関して流れ方向の変化は無いという仮定をおいたことになる。Fig. 5(b) に用いた初期条件のフローパターンを示す。流入口の幅とそこにおける流速で定義したレイノルズ数 ($=Re$) をだんだんと高くしていったときのフローパターンを Fig. 5(c) から Fig. 5(h) に示す。従来の有限要素法による解と比較しても遜色がないと思われる。

5 結 言

比較的高次の形状関数を用いる従来の有限要素法よりも、低次の形状関数を用いる有限要素法が流れ問題のような強い非線形性が存在する問題では有利であることを指摘し、本報告では非圧縮性の Navier-Stokes 方程式を解析する一つの方法を提案した。本方法は差分法分野で開発された SMAC 法と FLIC 法を組み合わせたもの

で、2つの例題解析の結果、流れ場を定性的に把握するには十分であることがわかった。将来の課題として、カルマン渦列の問題や自由表面を有する問題への応用を考えている。

本研究を行なうに当り種々の御助言を頂いた、日本大学理工学部 戸川隼人教授、中央大学理工学部 中沢晶平助手をはじめ東京大学生産技術研究所 川井研究室の方々に深く感謝申し上げます。また、計算には東京大学大型計算機センター HITAC 8700/8800 システムを使用しました。

参 考 文 献

- 1) 姫野洋司：高レイノルズ数における肥大物体のまわりの流れ、日本造船学会論文集、第 128 号 (1970)、31.
- 2) 木下 健：二次元柱体及び軸対称物体のまわりの Oseen 流れについて、日本造船学会論文集、第 134 号 (1973)、1.
- 3) 瀬戸秀幸、山本善之：有限要素法による定常波動の基礎的研究、日本造船学会論文集、第 136 号 (1974)、181.
- 4) Kawahara, M., Yoshimura, N., Nakagawa, K. & Ohsaka, K.: Steady and Unsteady Finite Element Analysis of Incompressible Viscous Fluid, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10 (1976), 473.
- 5) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method in Engineering Science, McGraw-Hill (1971).
- 6) 足立武司：圧縮粘性流解析における変形 FLIC 法について、日本鋼構造協会第 7 回大会研究集会

Fig. 5 Channel flow with a sharp corner

- (1973), 637.
- 7) 川井忠彦, 渡辺正明: 低次形状関数を用いた有限要素法による流体問題の解析, 日本鋼構造協会第 11 回大会研究集会 (1977), 367.
 - 8) Harlow, F.H. & Welch, J.E.: Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface, *Phys. Fluids*, Vol.8 (1965), 2182.
 - 9) Bourianoff, G. I. : Numerical Simulation of Incompressible Viscous Flows with Reactive Boundaries: The IMP Method, *Comp. Meth. Non. Mech., TICOM* (1974), 121.
 - 10) 山本善之, 安部昭則, 大和裕幸: 遅い粘性流の有限要素法による外部問題の解析, 日本鋼構造協会第 11 回大会研究集会 (1977), 383.
-