深海域における定常波動問題の近似解析法

正員 山 本 善 之* 正員 中 野 孝 昭**

A Finite Element Approach to Steady Water Wave Problems in Deep Sea

by Yoshiyuki Yamamoto, *Member* Takaaki Nakano, *Member*

Summery

Finite element formulations have been proposed by several authors for water waves caused by harmonic motions of a body. In any case, the water field is divided into two parts, the outer and inner domains, by a fictitious surface which surrounds the body under consideration. The solution in the outer domain, which will be called the outer solution, can be determined analytically within a number of unknown parameters, and it can be expressed by the eigenfunction expansion or the linear combination of Green's function and its derivatives. The solution in the inner domain, which will be called the inner solution, can be obtained by a numerical method such as the finite element method, and the unknown parameters in the outer solution are determined by the continuity condition for both solutions on the fictitious surface.

In the case of shallow water, the formulation with the eigenfunction expansion in the vertical direction can be applied efficiently. In the case of deep water, however, Green's function has to be used as an analytical solution for the outer domain, which is inconvenient for treatments because of its complexity.

In the present paper, a method of superposition of analytical and numerical solutions, which is proposed by Seto and the senior author^{1),2)} for water wave problems, is modified for easy treatments of infinite or deep water field. The progressing part of the outer solution is determined for the actual depth of water, and the standing part is approximately determined by the eigenfunction expansion for a water depth restricted properly. The validity of this approximation for the outer solution can be ascertained by the fact that the standing part decreases rapidly with the increase of depth. This analytical solution thus obtained does not necessarily satisfy the condition of continuity everywhere; this difficulty can be solved by modifying the continuity condition properly on the fictitious surface.

By this method, the inner domain is reduced to a great deal, and numerical computations can be performed efficiently. Example calculations by this method for two-dimensional or three-dimensional axi-symmetric wave propagation problems are performed by the aid of an input generator prepared, and the results obtained show good agreement with the previous authors'.

1 序 論

定常波動問題の解析法としては、特異点分布を用いる積分方程式による方法、変分原理による方法とともに、2次元問題や鉛直軸まわりの3次元軸対称体の問題の解析に対しては、有限要素法が非常に有力である。この方法はとくに、物体形状に対する柔軟さ、プログラミングの容易さの面ですぐれている。有限要素法を適用する際には、一般に流場を物体を含む内部領域と残りの外部領域に分割し、外部解を解析的に仮定して、内部解を有限

要素解または有限要素解と外部解析解を内部まで延長したものの和として求める手順がとられる。このような方法では、深海域問題に対しては、瀬戸・山本の提案^{1),2)}したように Green 関数を用いる必要があるが、その計算が多少複雑であること、また特異点の位置などによっては精度が落ちることなどの問題が考えられた。

このような見地から、著者らは前論文⁴⁾で中間領域において解析的な解と有限要素解を重ね合わせる方法を提案し、Green 関数を用いずに深海域での流体力を求める近似解析法ならびにその有効性を示した。

本論文ではその考え方を発展させ、適当な固有関数展開を利用して外部の解析解を近似する方法を提案し、2

* 東京大学工学部

** 東京大学工学系大学院

次元および3次元軸対称体の問題の解析を行なった。このような方法をとることで、有限要素解析領域の縮小、計算時間の短縮、精度の向上が図られた。また、数値計算には前論文同様、自動要素分割プログラムを採用しデータ入力を簡略化している。なお、本論文の数値計算例においては、特にことわらない限り前論文において用いたのと同様な自動要素分割プログラムを使用している⁴⁾。

2 基礎理論

2.1 座標系および基礎方程式

Fig. 1 に示すような物体を囲む流場について考察する。座標系は、物体中央部と静止水面の交点に原点を置き、静止水面上に x , y 軸、鉛直上向きに z 軸をとる直交座標系と円筒座標系 (r, θ, z) を適宜併用する。また流場を表わす記号として、内部領域を D_I 、外部領域を D_O 、自由表面を S_f 、船体表面を S_h 、有限水深の場合の水底を S_b とし、物体を囲む適当な境界 S_r を仮想する。法線は外向きを正とする。

Fig. 1 Coordinate system

流体は、非粘性・非圧縮性・非回転とし、物体の微小な定常周期運動（振幅 X ）によって、流体も微小な定常周期運動を行なうものと仮定する。このとき流体運動の速度ポテンシャルを、 $\phi = \text{Re}[\phi e^{-i\omega t}]$ とすると、 ϕ は

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{in } D_I, D_O \quad (1)$$

$$\text{自由表面条件} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} - K\phi = 0, \quad K = \frac{\omega^2}{g} \quad \text{on } S_f \quad (2)$$

$$\text{水底条件} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_b (h < \infty) \quad (3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} \longrightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow \infty \quad (4)$$

$$\text{物体表面条件} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = v_n \quad \text{on } S_h \quad (5)$$

無限遠方で反射の生じない条件、すなわち放射条件を満たす。ただし、 K は無限水深の場合の波数で、円振動数を ω 、重力加速度を g 、有限水深のときの水深を h 、波数を κ_0 とすると

$$\kappa_0 \tanh \kappa_0 h = K \quad (6)$$

の関係がある。したがって、 $h \rightarrow \infty$ のとき $\kappa_0 = K$ となる。

外部領域 D_O において、放射条件と、 $h \rightarrow \infty$ のときは (4) 式を満たす解析解 ϕ_a を仮定すると、 ϕ は境界 S_r 上でのポテンシャルおよび速度の連続条件

$$\phi = \phi_a, \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\partial\phi_a}{\partial n} \quad \text{on } S_r \quad (7-a, b)$$

を満たす必要がある。

このとき、以上の境界値問題は、次の変分条件式と同等である。

$$\begin{aligned} \delta II[\phi, \phi_a] = & \int_{D_I} \nabla\phi \nabla\delta\phi \, dD - K \int_{S_f} \phi \delta\phi \, dS \\ & - \int_{S_h} v_n \delta\phi \, dS - \int_{S_r} \frac{\partial\phi_a}{\partial n} \delta\phi \, dS \\ & - \int_{S_r} (\phi - \phi_a) \delta\left(\frac{\partial\phi_a}{\partial n}\right) dS \end{aligned} \quad (8)$$

本論文で扱う深海域問題では、境界 S_r として、軸が z 軸と平行な適当な柱面 S_R およびその底面 $S_R^*(z = -h^*)$ よりなる曲面を選ぶ。また有限水深のとき、水深 h は一定として実用上差支えない。

2.2 重ね合わせ法

物体の運動による流体運動の速度ポテンシャルの漸近的性質により、外部領域 D_O において一価連続な解析解 ϕ_a が与えられると、内部領域 D_I における解 ϕ は以下の手順で求められる。

a) 外部解析解 ϕ_a を有限個の未知定数 $C_j (j=1 \sim N)$ を含む形に仮定する。

$$\phi_a = \sum_{j=1}^N C_j \phi_{aj} \quad (9)$$

b) ϕ_0 を条件 (1), (2), (3) または (4), (5) および次の条件を満足するように有限要素法で求める。

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_r = S_R \cup S_R^* \quad (10)$$

c) $\phi_{rj} (j=1 \sim N)$ を (1), (2), (3) または (4) および次の条件を満足するように有限要素法で求める。

$$\frac{\partial\phi_{rj}}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_h, \quad \frac{\partial\phi_{rj}}{\partial n} = \frac{\partial\phi_{aj}}{\partial n} \quad \text{on } S_r \quad (11)$$

d) ϕ_0 と ϕ_{rj} の線形結合は境界 S_r 上での速度の連続条件を満たすから、未知定数 $C_j (j=1 \sim N)$ をポテンシャルの連続条件を満たすように求める。

$$\phi_0 + \sum_{j=1}^N C_j \phi_{rj} = \sum_{j=1}^N C_j \phi_{aj} \quad \text{on } S_r \quad (12)$$

e) このとき内部領域 D_I における解 ϕ は次式で与えられる。

$$\phi = \phi_0 + \sum_{j=1}^N C_j \phi_{rj} \quad (13)$$

$C_j (j=1 \sim N)$ を決定する方法としては、選点法・最小2乗法などが考えられるが、本解析においては (12) 式の両辺に ϕ_{aj} をかけて仮想境界上で積分し C_j に関する

“重み”付き方程式を求めるガラーキン法¹⁾を適用した。これによって解析領域を合理的に狭めることができる。なお、以下の数値計算例においては、 $N=11$ として計算を行なった。

2.3 深海域問題に対する近似解析法

Fig. 2 を用いて説明する。いま h^* を十分大きくすると、 S_R^* の延長 S^+ 上では定常波成分を無視できるので、 S_R の外側で S^+ と S_f の間の領域において定常波成分を、 S^+ を水底とみなした場合の定常波成分と同じであると仮定することができる。進行波成分については、正しい解を用いる。この方法は、前論文⁴⁾の放射境界を無限に遠ざけることに対応し、本論文の S_R は、前論文の第2仮想境界に相当する。

Fig. 2 Water field and fictitious surfaces

また、進行波成分により、 S_R^* の下の領域に不連続流量が生じるときは、対応する強制変動速度成分を位相に注意して S_R^* 上の z 軸近傍に与えることにより、合理的に補正することができる。この速度成分は、Green 関数の定常波成分に対応するものであり、本来はその S_f 上での分布形状も考慮する必要があるが、本論文では簡単のため、 z 軸上で進行波成分により生じる不連続流量を集散的に点 $(0, -h^*)$ に強制する方法をとった。この不連続流量は、実際には平均的に打ち消されるべきで、このような方法をとると、Fig. 4 に示すように付加質量に対する補正が過剰となる。これを修正するために理論的な不連続流量に修正係数 $\alpha=0.5$ を乗じたものを使用すると、田才理論と広範囲にわたって良い一致を示す。したがって本論文では、以下においてもこのように理論的な不連続流量を経験的修正係数 $\alpha=0.5$ によって修正したものを用いて計算を行なう。なお、このような補正を行なわないと、 K がごく小さな値のとき、付加質量が著しく減少する⁴⁾。

3 2次元問題の解析例

前節の諸論により外部領域における解析解は、次式の

ように与えられる。

$$\phi_a^\pm = C_0^\pm Z e^{\pm i\kappa_0 x} + \sum_{j=1}^N C_j^\pm \cos \kappa_j(z+h^*) e^{\mp \kappa_j x} \quad (14)$$

ただし

$$Z = \begin{cases} \exp(\kappa_0 z) & h \rightarrow \infty \\ \frac{\cosh \kappa_0(z+h)}{\cosh \kappa_0 h} & h < \infty \end{cases}$$

$$\kappa_0 \tanh \kappa_0 h = \frac{\omega^2}{g}, \quad \kappa_j \tan \kappa_j h^* = -\frac{\omega^2}{g} \quad (0 < \kappa_1 < \kappa_2 < \dots)$$

また z 軸近傍での流量の不連続は、物体が上下揺れをするときに現われ、その流量は進行波の z 軸上での水平方向の速度成分を $-h$ から $-h^*$ まで積分することにより得られる。このとき、点 $(0, -h^*)$ につぎの流量 F を強制すればよい。

$$F = \alpha(C_0^+ + C_0^-) \int_{-h}^{-h^*} i\kappa_0 Z dz, \quad \alpha = 0.5$$

物体は z 軸に関して対称であるとし、要素分割は Fig. 3 に示すようなものを採用した。Fig. 2 に示したように仮想水深を h^* 、物体の吃水を d 、半幅を b 、原点から境界 S_R までの距離を l で表わす。

Fig. 3 Mesh subdivision

流体力の定義は通常のものと同様で、グラフには付加質量係数と進行波振幅比を示した。

Fig. 4, Fig. 5 は半没水門筒の上下揺れ並びに左右揺れに対する計算結果を田才の理論値^{8),9)}と比較したもので、 K_4 および K_S は付加質量係数、 A_H および A_S は進行波振幅比である。Case I は $h^*/d=6.0$, $l/d=3.0$, Case II は $h^*/d=9.0$, $l/d=3.0$ に対応する。両者の一致は非常に良好で、Case I の場合上下揺れの Kd の小さなところでやや誤差が大きくなるが、近似としては十分であると思われる。

Fig. 6, Fig. 7 は半没水双胴門柱 ($2P/a=4.0$) に対する計算結果を大楠の理論値と比較したもので、両者の一致は良好である。なお本計算例および次の没水双胴門

Fig. 4 Added mass coefficient and asymptotic wave amplitude ratio of a circular cylinder in heave

Fig. 5 Added mass coefficient and asymptotic wave amplitude ratio of a circular cylinder in sway

柱の計算に対しては、Case II に対応する要素分割を使用した。 m_H , m_S は付加質量係数, A_H , A_S は進行波振幅比である。

Fig. 8, Fig. 9 は没水双円柱 ($2P/a=4.0$, $d/a=2.0$) に対する計算結果を大楠の理論値¹⁰⁾ (Fig. 8 のみ) と比較したものである。両者の差は、大楠によるものが“一方の円柱のつくる速度ポテンシャルは、そのうちの進行波分しか他の円柱に影響を与えない”という仮定をしているため、この例のような没水物体に対してはその影響が大きくなるものと考えられる。このような物体に対する浅水域の場合の計算例としては、瀬戸⁵⁾ によるもの ($2P/a=4.0$, $d/a=1.5$) がある。

Fig. 6 Added mass coefficient and asymptotic wave amplitude ratio of two circular cylinders in heave

Fig. 7 Added mass coefficient and asymptotic wave amplitude ratio of two circular cylinders in sway

Fig. 8 Added mass coefficient and asymptotic wave amplitude ratio of two submerged circular cylinders in heave

Fig. 9 Added mass coefficient and asymptotic wave amplitude ratio of two submerged circular cylinders in sway

以上の計算例において、エネルギーの保存に対応する進行波振幅比と造波減衰力の関係を用いて数値計算結果の妥当性のチェックを行なった。全般的に両者の一致は良好であり、本解析の合理性が確認できた。波数がごく小さいと、水底に与えた集中流量による補正の影響で多少の相違が現われるが、減衰係数自体の値が小さくなるのでこの点は無視できると思われる。

4 3次元形状軸対称物体の場合の解析例

3次元形状軸対称物体（軸は鉛直）の場合は、物体の運動速度の周方向のモードに対応して速度ポテンシャルを展開することにより、2次元の問題に帰着され、外部領域における解析解は、 x 、 z 面に対称な運動に対して次式で与えられる。

$$\phi_a = \sum_{\nu=0}^1 \left[C_{0\nu} \{ J_\nu(\kappa_0 r) + i Y_\nu(\kappa_0 r) \} Z + \sum_{j=1}^N C_{j\nu} K_\nu(\kappa_j r) \cos \kappa_j(z+h^*) \right] \cos \nu \theta \quad (15)$$

ただし、 Z は2次元の場合と同じである。 $\nu=0$ は上下揺れ、 $\nu=1$ は左右揺れに対応する。流量の不連続の処理は2次元問題の場合と同様で、集中流量 F は、次式で与えられる。

$$F = \alpha C_{00} \int_{-h^*}^{-h} 4iZ dz, \quad \alpha = 0.5$$

要素分割は Fig. 3 の斜線で囲んだような部分を採用した。なお以後の計算結果で、 m_H 、 m_S は付加質量係数、 n_H 、 n_S は造波減衰係数を表わす。

Fig. 10, Fig. 11 に半没水球の上下揺れ並びに左右揺れに対する計算結果を、Havelock¹³⁾、Kim¹⁴⁾、工藤¹¹⁾の計算結果と比較して示す。本計算では自動要素分割による結果と、Fig. 2 に $\bar{D}$ で示した領域で、円周にそって 12 等分割、半

Fig. 10 Added mass and damping coefficient of a sphere in heave

Fig. 11 Added mass and damping coefficient of a sphere in sway

径方向に 6 等分割するようなアイソパラメトリック要素による精確な要素分割による結果をあわせて示した。両者の差は小さく、自動要素分割の有効性が示されたものと思う。また Fig. 12 は、球の上下揺れおよび左右揺れ

$$\phi = \phi^C + i\phi^S \quad Ka=1.0$$

Fig. 12 Potential distribution on body surface of a sphere in heave or sway

のときのポテンシャル分布を示したもので、この例は $Ka=1.0$ のときのものである。

Fig. 13 は円筒 ($d/b=5.0$) の左右揺れに対する計算結果で、佐尾による変分法の結果¹²⁾と比較した。Fig. 14 はそのポテンシャル分布の一例 ($Kb=0.5$) を示したものである。

以上の計算例より、本方法による解析は十分信頼のおけるものと考えられる。

Fig. 15, Fig. 16 にはフーティングを有する円筒に対する計算例を示した。上下揺れのときに波無し周波数が存在することがわかる。

また Fig. 17 は有限水深 ($h/b=6.0$) における円筒 ($d/b=0.5$) の左右揺れに対する計算結果を Bai および Garrison の結果¹⁵⁾と比較したもので、本方法では $h^*/b=3.0$ として計算している。

Fig. 13 Added mass coefficient of a circular dock in sway

Fig. 14 Potential distribution on body surface of a circular dock in sway

Fig. 15 Added mass and damping coefficient of a heaving circular dock with cylinder type footing

Fig. 16 Added mass and damping coefficient of a swaying circular dock with cylinder type footing

Fig. 17 Added mass and damping coefficient of a circular dock in sway

以上の計算例においても進行波振幅比と造波減衰力の関係によりチェックを行ない、良好な結果を得ている。

5 考察および結論

i) 有限要素法による深海域問題の近似解析法を提案し、2次元及び3次元形状軸対称問題の数値計算例を示した。その結果、本方法の有効性が示された。また、さらに計算は複雑になるが、一般3次元の場合にも応用できる。

ii) 有限要素解析領域が大幅に縮小され、精度の向上、計算時間の短縮が図られた。また自由表面の要素を細かくすることが容易で、波数の大きな(波長の短い)範囲においても精度良く計算を行なうことができる。

iii) 本解析を通じて2次元および3次元形状軸対称問題の解析に対しては、有限要素法が非常に有力な手法であることが示されたと思われる。特に本計算には船型の自動要素分割プログラムが利用されており、各種の船型に対し容易に計算を行なうことが可能である。

iv) 計算には、東大大型計算機センターの HITAC 8700/8800 を使用し、計算時間は2次元の場合、1種の船型・3種の運動モード・10種の ω の値に対し25~30秒、3次元形状軸対称問題に対しては30~35秒である。なおプログラムには一部に「SOLID SAP」を応用している。

おわりに、著者らとの討論を通じて貴重なご助言を賜った、東京大学助教授大坪英臣博士、三菱重工業(株)瀬戸秀幸博士ならびに山本研究室の諸氏に深く感謝致します。

参考文献

- 1) H. Seto and Y. Yamamoto: Finite Element Analysis of Surface Wave Problems, Proceeding of First International Conference on Numerical Hydrodynamics, (1975).
- 2) 瀬戸秀幸, 山本善之: 有限要素法による定常波動問題の基礎的研究, 日本造船学会論文集, 第136号, (昭和49年).
- 3) 瀬戸秀幸, 山本善之: 重ね合わせ法による波動問題の解析, 日本鋼構造協会第9回大会研究集会, マトリックス構造解析法研究発表会論文集, (昭和50年).
- 4) 山本善之, 中野孝昭, 光田哲久: 有限要素法による定常波動問題の基礎的研究(第2報), 日本造船学会論文集, 第140号, (昭和51年).
- 5) 瀬戸秀幸: 有限要素法による定常波動問題の基礎的研究(第3報), 日本造船学会論文集, 第141号, (昭和52年).
- 6) 瀬戸秀幸: 浅海波問題の有限要素解析, 日本鋼構造協会第11回大会研究集会, マトリックス解析法研究発表会論文集, (昭和52年).

- 7) 山本善之, 中野孝昭: 無限水深における定常波動問題の取り扱いについて, 日本鋼構造協会第11回大会研究集会, マトリックス解析法研究発表会論文集, (昭和52年).
- 8) 田才福造: 船の上下動揺ならびに縦動揺における減衰力および附加質量について, 造船協会論文集第105号, (昭和34年).
- 9) 田才福造: 水面に浮んだ柱状体の左右揺れによって生ずる Hydrodynamic Force および Moment, 造船協会論文集, 第110号, (昭和36年).
- 10) 大楠 丹, 高木幹雄: 双胴船の運動について, 日本造船学会論文集, 第129号, (昭和46年).
- 11) 工藤君明: 三次元物体の波による漂流力(第1報), 日本造船学会論文集, 第141号, (昭和52年).
- 12) 佐尾邦久: 軸対称物体の左右揺及び横揺, 日本造船学会論文集, 第140号, (昭和51年).
- 13) T. H. Havelock: Waves due to a floating sphere making periodic heaving oscillations, Proceeding of R. S., Series A, Vol. 231, (1955).
- 14) W. D. Kim: On the Harmonic Oscillation of a Rigid Body on a Free Surface, J. of Fluid Mech., Vol. 21, Part 3, (1965).
- 15) K. J. Bai and R. W. Yeung: Numerical Solutions to Free Surface Flow Problems, 10th Symposium on Naval Hydrodynamics, (1974).
- 16) S. Wang: The Hydrodynamic Forces and Pressure Distributions for an Oscillating Sphere in a Fluid of Finite Depth, Dissertation MIT, Dept. of Naval Arch. and Marine Engineering, (1966).

Appendix I カタマランに対する自動要素分割法

Fig. A1 に示すように自動要素分割を行なう領域を、適当に(図では1点鎖線により)2つの部分領域に分け、各部分領域に前論文⁴⁾で示した方法と同様の手法を適用した。船型は、縦、横、斜めの折れ線で近似され、入力データとしては各点の座標と座標数を与えるだけでよい。

Fig. A1 Mesh generator of ship form for catamaran

Appendix II 浅海域問題の解析例

この場合には $h=h^*$ であるので、本方法をそのまま適用することができる。

解析例としては、球の上下揺れに対する計算を、 $h/a=6.0$, $h/a=3.0$ の2種の水深に対して非常に細かい間隔で行ない、結果を実線および1点鎖線で示す。比較解としては、Wang¹⁶⁾ および瀬戸の結果⁶⁾ ($h/a=6.0$) をあわせて記した。要素分割はアイソパラメトリック要素による精確なものを採用している。他の計算例との一致は良好で、付加質量係数のグラフ ($h/d=6.0$) の Ka の小さな範囲での折れ曲がり方が注目される。

Fig. A2 Added mass and damping coefficient of a sphere in heave