(昭和 53 年 5 月 日本造船学会春季講演会において講演)

底置型海洋構造物の動的応力解析

(第 2 報 衝撃応答)

正員 清水 茂 俊* 正員 佐藤 正 視**
 正員 河野 俊 一*

Dynamic Stress Analysis of Fixed Offshore Structure

(2 nd Report Impact response)

by Shigetoshi Shimizu, *Member* Masashi Sato, *Member*
 Shun-ichi Kawano, *Member*

Summary

In the previous paper, the characteristic equation for the three dimensional beam structures contained the rigid bodies and mass particles was introduced by using of the solutions of four kinetic differential equations, i.e. two bendings, torsion, and tension-compression.

The orthogonality of the vector mode function composed of the four kinds of the shape functions was proved.

In this paper, we investigate in the modal analysis method of the general three dimensional beam structures contained the rigid bodies and mass particles.

We conduct the impact experiment, using the structure model constructed by a flat rigid deck with four legs same size as described in the previous paper.

The transient responses of the model subjected to the concentrated impact force at the deck and the leg are calculated by the proposed modal analysis method.

The theoretical results coincide with the experimental ones fairly well.

1 緒 言

前報告¹⁾において剛体および質点を含んだ 3 次元梁構造物の振動応答を解析するために、2 方向の梁の曲げ、振りおよび引張り-圧縮に対する 4 個の振動方程式の解を用いて、変位法によって固有値決定方程式を求める方法について述べた。さらにその結果から得られる一般 3 次元梁構造物のモード関数の直交性を証明し、複雑な構造物のモード法による振動応答解析の可能性を示した。

本報告では一般 3 次元梁構造物のモード法による振動応答の解析法を導き、解の収束性について吟味を試みた。このために前報告の計算例に用いた底置型海洋構造物のモデル、すなわち剛体のデッキと部分的に接水する 4 本の長脚を有する構造物を用い、まず 4 本の脚に同時に一様な衝撃力が作用する場合のインデシャル応答を求め解の収束性を明らかにした。

次に同じモデルについて、デッキおよび脚柱に集中衝撃力を作用させ、脚柱に貼布した歪ゲージにより衝撃に

対する動的応力分布を実験的に求め、本方法を用いて計算した結果と比較したところ、極めて良好な一致を見ることができた。

2 モード法による衝撃応答の計算式

2.1 モード関数のベクトル表示

第 1 報の 3.2 節で定義した構造物全体の r 次のモード関数は、次に示すように 6 次元のベクトル関数として表わされる。

$$\Phi_r = \sum_{i=1}^6 a_i \cdot (\Psi_i(x))_r \quad (2.1)$$

ただし、 $x(x, y, z)$: 位置ベクトル

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = a_3 = (\gamma A/g)^{1/2}, \\ a_4 &= (\gamma I_P/g)^{1/2}, \quad a_5 = a_6 = 0 \end{aligned} \right\} (x \in S)$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_2 = a_3 = (\delta(x) m_P)^{1/2}, \\ a_4 &= a_5 = a_6 = 0 \end{aligned} \right\} (x \in S_P)$$

$$a_i = (\gamma B/g)^{1/2}, \quad (i=1 \sim 6) \quad (x \in S_B)$$

$$|(\Psi_1)_r| = \tilde{u}_r, \quad |(\Psi_2)_r| = \tilde{v}_r, \quad |(\Psi_3)_r| = \tilde{w}_r$$

$$|(\Psi_4)_r| = \tilde{\alpha}_r, \quad |(\Psi_5)_r| = \tilde{\beta}_r, \quad |(\Psi_6)_r| = \tilde{\gamma}_r$$

S: 梁要素の占める領域

* 山口大学工学部

** 北九州工業高等専門学校

S_P : 質点の占める領域

S_B : 剛体の占める領域

γ : 梁要素の密度, γ_B : 剛体の密度

$\delta(\mathbf{x})$: デイラックのデルタ関数

(2.1)式で示すベクトルモード関数が直交することは、すでに第1報の3.2節で証明した。正規化されたベクトルモード関数を次のように表わすと

$$\bar{\Phi}_r = \Phi_r / (\Phi_r \cdot \Phi_r)^{1/2} \quad (2.2)$$

$$\text{ただし, } (\Phi_r \cdot \Phi_r) = \int \Phi_r \cdot \Phi_r d|\mathbf{x}|$$

(2.2) 式の分母は次のような簡単な式で表わされる。

$$(\Phi_r \cdot \Phi_r)^{1/2} = (D\Phi_r \cdot D\Phi_r)^{1/2} \quad (2.3)$$

$$(S \cup S_P \cup S_B \ni \mathbf{x}) \implies (S \ni \mathbf{x})$$

$$D = (EA)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} n_1 n_1 + (EI_z)^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n_2 n_2 + (EI_y)^{1/2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} n_3 n_3 + (GI_P)^{1/2} \frac{\partial}{\partial x} n_4 n_4$$

n_i : Ψ_i 方向の単位ベクトル

$n_i n_i$: ダイヤデリックオペレータ ($i=1 \sim 4$)

すなわち梁端部でエネルギー損失がない場合、(2.2) 式の右辺の分母は (2.3) 式の右辺を梁要素領域でのみ計算した値に等しくなる。

2.2 モード法による動的応答解析

前節と同様に第1報の(2.1)~(2.3) 式をベクトル表示すると次のように表わされる。

$$\left(\sum_{i=1}^4 b_i n_i n_i \right) \cdot w_r = F \quad (2.4)$$

ただし, $w_r = u_r n_1 + v_r n_2 + w_r n_3 + \alpha_r n_4$

$$F = f_x(\mathbf{x}, t) n_1 + f_y(\mathbf{x}, t) n_2 + f_z(\mathbf{x}, t) n_3 + f_a(\mathbf{x}, t) n_4$$

$$b_1 = -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2} - EA \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + C \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$b_2 = EI_z \frac{\partial^4}{\partial x^4} + EI_z \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} + C \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$b_3 = EI_y \frac{\partial^4}{\partial x^4} + EI_y \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial t} + C \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma A}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$b_4 = -GI_P \frac{\partial^2}{\partial x^2} - GI_P \frac{\mu}{\omega} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t} + C' \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma I_P}{g} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

上記の右辺の第2項はいわゆる構造減衰²⁾を表わし、第3項は粘性減衰である。

質点および剛体についても再記すると、質点については

$$m_P \frac{d^2 U_P}{dt^2} + C_P \frac{dU_P}{dt} + \frac{\mu'}{\omega} \frac{\partial R}{\partial t} + R = F_P(t) \quad (2.5)$$

剛体の振動方程式は

$$m_B \frac{d^2 U_C}{dt^2} + C_B \frac{dU_C}{dt} + \frac{\mu'}{\omega} \frac{\partial Q}{\partial t} + Q = F_B(t) \quad (2.6)$$

$$J_C \frac{d^2 \theta_C}{dt^2} + C_C \frac{d\theta_C}{dt} + \frac{\mu'}{\omega} \frac{\partial N_C}{\partial t} + N_C = F_C(t) \quad (2.7)$$

となる。

梁要素、質点および剛体に $F = \tilde{F} \cdot \tau(t)$ で表わされる分布荷重が作用した場合の解を求めると次のようになる。まず、外力の振幅 $\tilde{F}(\mathbf{x})$ はベクトルモード関数によって

$$\tilde{F} = \sum_{i=1}^6 a_i n_i n_i \sum_{r=1}^{\infty} A_r \bar{\Phi}_r \quad (2.8)$$

の形に展開できる。係数 A_r は $\bar{\Phi}_r$ が正規直交関数であるから

$$A_r = (\tilde{F} \cdot \bar{\Phi}_r) \quad (2.9)$$

となる。

ただし

$$\tilde{F} = \sum_{i=1}^6 a_i n_i n_i \cdot \tilde{F} \quad (2.10)$$

特に梁、質点あるいは剛体上の任意の点に $\delta(\mathbf{x}_j) \tilde{P}_j \cdot \tau(t)$ なる集中荷重が作用する場合は

$$\tilde{F} = \delta(\mathbf{x}_j) \tilde{P}_j = \sum_{i=1}^6 a_i n_i n_i \cdot \delta(\mathbf{x}_j) \tilde{P}_j \quad (2.11)$$

とおくと (2.9) 式は次のように簡単になる。

$$A_r = \tilde{P}_j \cdot \bar{\Phi}_r(\mathbf{x}_j) = \tilde{P}_j \cdot \sum_{i=1}^6 (\Psi_i(\mathbf{x}_j))_r / (\Phi_r \cdot \Phi_r)^{1/2} \quad (2.12)$$

(2.4) 式の左辺の w を

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^4 \frac{1}{a_i} n_i n_i \bar{\Phi}_r \right) \varphi_r(t) \quad (2.13)$$

とおき (2.8) 式を代入すると (2.4) 式は

$$\sum_{r=1}^{\infty} \{ \ddot{\varphi}_r + [\mu\omega_r + C/(\gamma A/g)] \dot{\varphi}_r + \omega_r^2 \varphi_r \} \sum_{i=1}^4 a_i n_i n_i \bar{\Phi}_r = \sum_{i=1}^4 a_i n_i n_i \sum_{r=1}^{\infty} A_r \bar{\Phi}_r \cdot \tau(t)$$

となる。

これより

$$\ddot{\varphi}_r + [\mu\omega_r + C/(\gamma A/g)] \dot{\varphi}_r + \omega_r^2 \varphi_r = A_r \tau(t) \quad (2.14)$$

従って、外力の作用の仕方および時間関数 $\tau(t)$ が既知であれば、(2.14) 式より $\varphi_r(t)$ が計算でき、さらに (2.13) 式より変位が求まる。ただし、上記の解は構造減衰係数 μ および粘性減衰係数が、曲げ、引張り-圧縮、振りの各振動時においてもすべて等しく、 $C' = (I_P/A)C$ なる条件においてのみ解くことができる。

3 収束性の検討

モード法による解の収束性の検討例として、Fig. 3.1 に示すようなすべての脚柱に一樣な z 方向の分布荷重

Fig. 3.1 Convergence of mode expansion on uniform step load

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}_z \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{H}(t) \quad (3.1)$$

$\mathbf{H}(t)$: 単位ステップ関数

が作用する場合のインデシヤル応答について計算を行なった。(2.8) 式より

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\mathbf{F}}_z \mathbf{n}_3 \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} a_r \mathbf{n}_i \sum_{r=1}^{\infty} A_r \bar{\Phi}_r \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$A_r = 4 \int_0^L [\tilde{F}_z / (\gamma A/g)^{1/2}] \mathbf{n}_3 \bar{\Phi}_r dx \quad (3.3)$$

L : 脚柱の全長

(3.2) 式による荷重振幅のモード展開による収束性を Fig. 3.1 に示す。ただし S は固定端, R は剛体との結合点を意味し, 脚柱 1 本のみを示した。この図から, 1~2 次モードの和は非常に小さく, 15 次モードの和で収束する傾向が現われる程度である。(3.2) 式より

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{\mathbf{F}}_z \mathbf{n}_3 / (\gamma A/g)^{1/2} \\ &= \sum_{r=1}^{\infty} A_r \bar{\Phi}_r \end{aligned} \quad (3.4)$$

となり, 次式が導かれる。

$$\begin{aligned} \int (\tilde{\mathbf{F}} - \sum A_r \bar{\Phi}_r)^2 dx &\geq 0 \\ \therefore \sum A_r^2 &\leq \int [\tilde{F}_z^2 / (\gamma A/g)] dx \\ &\leq 4 \tilde{F}_z^2 L / (\gamma A/g) \end{aligned} \quad (3.5)$$

従って A_r^2 の総和はこの例の場合 $4 \tilde{F}_z^2 L / (\gamma A/g)$ に収束する。この収束性を調べるために, 縦軸に $(\sum_{r=1}^n A_r^2) / [4 \tilde{F}_z^2 L / (\gamma A/g)]$, 横軸にモードの和 n をとると Fig. 3.2 に示すようになる。ただし 4, 8 および 12 番目の固有値は前報告で示した D Type (付録参照) の固有値で重根である。図から $\sum A_r^2$ の収束には 2 次, 6 次および 15 次のモードが卓越し, 残りのモードの和 $\sum_{r=17}^{\infty} A_r^2 / [4 \tilde{F}_z^2 L /$

Fig. 3.2 Relation between convergency and number of modes

$(\gamma A/g) \leq 0.18$ であることがわかる。以上の検討は荷重振幅の収束性についてのみ行ない, この例に関してはあまり収束性が良好とはいえない。

しかしステップ力では各モードに対して変位は固有値 β_r の 4 乗に, 曲げモーメントは 2 乗に反比例する。すなわち変位は A_r / β_r^4 , 曲げモーメントは A_r / β_r^2 に比例するので高次の影響は急激に小さくなる。 r 次と 2 次との比 $(A_r / \beta_r^4) / (A_2 / \beta_2^4)$ および $(A_r / \beta_r^2) / (A_2 / \beta_2^2)$ を Table 3.1 に示す。この表の $(A_r / \beta_r^2) / (A_2 / \beta_2^2)$ の例から明らかなように, 曲げモーメントは 6 次モードが 2 次モードの 24% 程度, 15 次のモードは 2% 程度であり, 16 次以後のモードの総和に関してまたかたか 2% 程度の影響しかない。また変位に関しては 2 次モードが卓越し 6 次モードが 2 次モードの 2% 程度で, 他は無視できる。すなわち変位および曲げモーメントに関しては 6 次までとれば充分であることがわかる。

ステップ荷重が作用する場合の変位および曲げモーメントは, 初期条件 $t=0$ にて $w=0$, $\dot{w}=0$ とすれば (2.13) (2.14) 式より

$$w = \frac{1}{(\rho A)^{1/2}} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3 \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \bar{\Phi}_r / \omega_r^2) (1 - \cos \omega_r t) \quad (3.6)$$

$$M_z = -\frac{EI}{(\rho A)^{1/2}} \frac{d^2}{dx^2} \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3 \sum_{r=1}^{\infty} (A_r \bar{\Phi}_r / \omega_r^2) (1 - \cos \omega_r t) \quad (3.7)$$

$$\rho = \gamma / g$$

となる。(3.6), (3.7) 式を用いて, 脚柱と剛体の結合

Table 3.1.

r	$ A_r / A_2 $	$ (A_r / \beta_r^4) / (A_2 / \beta_2^4) $	$ (A_r / \beta_r^2) / (A_2 / \beta_2^2) $
6	3.22	0.018	0.24
10	0.03	2.4×10^{-5}	8.7×10^{-4}
15	1.41	2.8×10^{-4}	0.02
* $\sum_{r=17}^{\infty}$	1.7	$< 3.4 \times 10^{-4}$	< 0.024

* $\beta_r = \beta_{16}$ を用いた

Fig. 3.3 Response of deflection at point R

Fig. 3.4 Response of bending moment at point R

部R点の変位および曲げモーメントの動的応答を求めると、Fig. 3.3 および Fig. 3.4 に示すようになる。ただし δ_{ST} および M_{ST} は静荷重 $\bar{F}_2 n_0$ が全脚柱に作用した場合の変位および曲げモーメントである。Fig. 3.3 からわかるように変位の動的応答は2次が卓越し、他のモードは無視できる。またその大きさも静荷重による変位の2倍となっている。

しかし曲げモーメントの動的応答は Fig. 3.4 に見るように、2次が卓越しているものの、6次のモードの影響も少しあり、わずかに15次のモードが見られる程度である。動的曲げモーメントの最大値は、静荷重の場合の約3倍となった。

4 実験および計算例

衝撃応答実験は前報で使用した同じモデルを用いた。実験および測定装置の概略は Fig. 4.1 に示すように、衝撃力をハンマー先端にとりつけた円輪に歪ゲージを貼布したロードセルからとりだし、脚柱に貼布した歪ゲージと共に動歪計を通して二現象シンクロスコープに接続し写真撮影を行なった。

衝撃力は同図に見るように、デッキ部のZ方向の位置

Fig. 4.1 Block diagram of experimental equipments

に与える Type I と脚柱の下から 61.8 cm の位置に与える Type II の2種類とした。また Type I では $l_w/L = 0.66$, Type II では $l_w/L = 0$ で実験を行なった。ただし l_w は水深である。

衝撃力は Type I と Type II では photo. 4.1 (a), (b) に示すように異なるので、計算は Fig. 4.2(a), (b) のように折れ線で近似した。

また Impulse 応答との比較のために、次のような計算を行なった、(2.4) 式において

$$F = \delta(x_j) \cdot I \cdot \delta(t) \quad (4.1)$$

なる Impulse 荷重を考える。ただし

$$I = \bar{P}_j \int \tau(t) dt$$

従って (2.14) 式は

$$\ddot{\varphi}_r + [\mu\omega_r + C/(\tau A/g)]\dot{\varphi}_r + \omega_r^2 \varphi_r = A_r I \delta(t) \quad (4.2)$$

となる。 $\zeta_r = [\mu\omega_r + C/(\tau A/g)]$ とおくと $\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = 0$ のとき、(2.4) 式の解 (2.13) 式は次に示すようになる。

$$w = \sum_{r=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} n_i n_i \Phi_r \right) \times \frac{A_r I}{\omega_r (1 - \zeta_r^2)^{1/2}} e^{-\omega_r \zeta_r t} \sin \omega_r (1 - \zeta_r^2)^{1/2} t \quad (4.3)$$

Impulse は実験値 Photo. 4.1 (a), (b) と合わせ、Type I, II でおのおの

Photo. 4.1 Impact load

Fig. 4.2 Assumed impact load

$$\int I \delta(t) dt = 0.0242 \text{ kg} \cdot \text{sec}, 0.0268 \text{ kg} \cdot \text{sec}$$

とした。

Type I における実験例を Photo. 4.2 に、計算例を Fig. 4.3 に示す。ただし測定値は脚柱の下から 4.1cm の位置、Gauge No.1 のものであり、接水部は 2 次元付加水質量 $\rho_w \pi D^2/4$ (D : 円柱の直径) を梁の質量に加えた。減衰係数は微小振動であるので粘性減衰の項を無視し ($C=0$), 各衝撃応答の写真から構造減衰係数 μ は各モードに対して定対数減衰率 $\mu=0.01$ とした。

実験および計算結果から明らかなように、 z 方向の振動を表わす A Type のモード、特に 2 次と 6 次が卓越している。 A_r は (2.12) 式に見られるように集中荷重ベクトルとその位置におけるベクトルモード関数との積、すなわち

$$A_r = \sum \left(\frac{1}{a_i} n_i n_i \cdot \tilde{P}_j \right) \tilde{\Phi}(x_j)$$

であるから、Type I の衝撃荷重の与え方においては

$$n_3 \tilde{\Phi}(x_j) = 0 \quad (\text{B, E Type}) \quad (4.4)$$

$$|\tilde{\Phi}_r(x_j)| = 0 \quad (\text{D Type}) \quad (4.5)$$

となり、B, D, E Type (付録参照) のモードはこの場合無関係となる。振幅では計算値と実験値は極めてよく一致しているが、時間が経つに従い両者の位相のずれが顕著になっている。

Photo. 4.2 Transient response of bending moment at gauge No.1

Fig. 4.3 Transient response of bending moment at gauge No.1

Fig. 4.4 に Type I における脚柱部の応力分布を示す。

計算値と実験値はよく一致し、柱中央部で曲げ応力 0 いわゆる一端固定、他が可動固定端の振動に近似している。

Fig. 4.5 に Type I と等価な impulse が作用した場合の応答を示す。Fig. 4.3 と比較すると高次のモードの影響が大きくなり、 $t=100$ msec までは最大ピーク値は約 1.1 倍となった。

次に Type II について、実験例を Photo. 4.3 に、計算例を Fig. 4.6 に示す。測定位置は前例と同様に脚柱の下から 4.1cm の個所である。Type II においても (4.4) 式が成り立つが、(4.5) 式は 0 でない。これは Photo. 4.3 および Fig. 4.6 から明らかなように、4 次、6 次、7 次および 8 次の卓越したモードのうち、特に D Type である 4 次モードが支配的で、その上に 8 次がのった形となっている。このときの脚柱の応力分布を Fig. 4.7 に示す。ただし、Type I と比べ、より位相のずれが顕著であるため、Photo. 4.3 と Fig. 4.6 を基準

Fig. 4.4 Dynamic stress distribution

Fig. 4.5 Impulse response of bending moment at gauge No. 1

Photo. 4.3 Transient response of bending moment at gauge No. 1

Fig. 4.6 Transient response of bending moment at gauge No. 1

Fig. 4.7 Dynamic stress distribution

Fig. 4.8 Impulse response of bending moment at gauge No. 1

Fig. A1.1 Deflection at free vibration

Fig. A1.2 Deflection at free vibration

におのおのピーク値の時間に合わせた。全体として両端固定梁の振動に近似し、応力分布の計算値は実験値とよく一致している。

等価な impulse が作用した場合の応答は Fig. 4.8 に

示すように実験値および Fig. 4.6 の計算値と比較して、最大ピーク値で約 3.5 倍となった。

参 考 文 献

- 1) 清水茂俊, 佐藤正視, 河野俊一: 底置型海洋構造物の動的応力解析(第1報), 日本造船学会論文集, 第141号(昭和52年5月), pp. 253~261.
- 2) R. W. Clough, J. Penzien: Dynamics of structures, McGraw-Hill (1975), p. 302.
- 3) 清水茂俊, 田中正信, 有馬治彦: 長脚柱の部分接水振動における付加水質量, 日本機械学会講演論文集, No. 755-1 (昭和50年11月), pp. 17~20.

付 録

自由振動時の変位モードは、第1報で述べたように次の4種類がある (Fig. A1.1)。高次になると梁要素の縦方向(x 方向)のみの振動モードが加わる (Fig. A1.2)。