組合せ荷重を受ける平板の最終強度 (第 1 報)

——圧縮と剪断を受ける正方形板——

正員 藤 田 譲* 正員 野 本 敏 治*
正員 仁 保 治**

Ultimate Strength of Rectangular Plates Subjected to Combined Loading (1st Report)

——Square Plates under Compression and Shear——

by Yuzuru Fujita, *Member* Toshiharu Nomoto, *Member*
Osamu Niho, *Member*

Summary

When a plate structure is externally loaded, it is considered that structural elements such as stiffened plate and panel are usually subjected to combined stresses. In order to estimate the ultimate strength of these structural elements, as a basic study, a square plate subjected to compression and shear is treated in this paper. As a practical example of such elements in ship structure, horizontal girders, a part of longitudinal bulkhead and so on can be cited.

In the previous papers^{1),2)}, the authors proposed a new analytical method for evaluating the ultimate strength of a stiffened plate subjected to compression. This simplified method in which numerical and experimental results were taken into consideration was proved to be fairly efficient.

In this paper, this method is extended for a problem of estimating the ultimate strength of a square plate under compression and shear. This extended method consists of two parts. The first one is elastic analysis in which Galerkin's method is adopted. The second one is plastic analysis in which collapse mechanism is assumed. In both of them large deformation theory is considered.

The analyses were carried out for a problem of a plate subjected to various combinations of compressive and shear loading. In addition, the influence of initial imperfections on the ultimate strength was clarified.

The following conclusions are obtained.

- 1) For a plate whose edges are kept straight under pure shear, it can be said that the maximum shear stress which corresponds to ultimate strength equals to τ_Y .
- 2) The ultimate strength of thick plate without initial distortion is not influenced by types of load in combination. With the decreasing thickness of plate, in the range where compressive load is dominant, the ultimate strength becomes smaller.
- 3) On the other hand, the influence of initial deformations on the ultimate strength becomes remarkable with the increase of plate thickness and share of compressive load.

1 緒 言

構造物が外荷重を受けるとき構造要素である防撓板やパネルが単一荷重下にあることは少なく、一般には複雑な組合せ荷重を受ける場合が多いと考えられる。組合せ荷重を受ける構造要素の最終強度を知るための基礎的な研究として本論文では圧縮と剪断を同時に受ける正方形板の最終強度について考える。船体構造中の構造要素

でこのような荷重状態に近いものとして Horizontal Girder や Longl. Bhd. があげられる。

著者らはすでに圧縮荷重を受ける防撓板について大撓みを考慮した弾性解析と塑性解析とを組合せて最終強度を算定する解析の方法を示した^{1),2)}。この方法は数値解析結果などによって得られた知見の上に立つ見通しの良い簡易計算法であり、十分な精度を有することが確認されている。

本論文では上述の方法を圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板の最終強度解析に対して拡張する。まず、

* 東京大学工学部

** 三井造船(株)本社(研究当時 東京大学工学系大学院)

弾性解析においては Galerkin 法を用いて大撓み解析を実施し、一方で崩壊機構を仮定した塑性解析を行ない両解析結果から最終強度を算定する。圧縮と剪断の荷重比を変化させて解析を行ない、最終強度相関曲線を求める。また、初期撓みが最終強度に及ぼす影響についても明らかにする。

2 弾 性 解 析

2.1 基礎方程式

平板の座屈後挙動を解析的に求める手法の一つに Galerkin 法がある。ここでは J. Djubek³⁾ の定式化にしたがって基礎方程式を導入する。

Fig.1 に示すような $a \times b$ の矩形平板が周辺単純支持条件の下で圧縮、曲げおよび剪断の任意の組合せ荷重を受ける場合を考える。適合条件式および平衡方程式は Airy の応力関数 F を用いて

$$\nabla^2 F = E(w_{,xy}^2 - w_{,xx}w_{,yy} + 2w_{,xy}w_{,0,xy} - w_{,0,xx}w_{,yy} - w_{,xx}w_{,0,yy}) \quad (1)$$

$$\nabla^2 w = (t/D)[F_{,yy}(w+w_0)_{,xx} - 2F_{,xy}(w+w_0)_{,xy} + F_{,xx}(w+w_0)_{,yy}] \quad (2)$$

で表わされる。ここに w_0 は初期撓みであり、 w は付加撓みである。

面内に関する境界条件は周辺が直線を保ち、かつ一定の剪断応力 τ が働くものとする。すなわち、

$$\int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = c_1 y + c_2, \quad \int_0^b \frac{\partial v}{\partial y} dy = c_3 x + c_4, \quad F_{,xy} \Big|_{x=0, a} = -\bar{\tau} \quad (3, 4, 5)$$

ただし、 $c_1 \sim c_4$ は定数である。

周辺単純支持の境界条件を満たす付加撓み w および初期撓み w_0 を次式で置く。

$$w = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (6)$$

$$w_0 = \sum_m \sum_n W_{0mn} \sin(m\pi x/a) \sin(n\pi y/b) \quad (7)$$

($m=1, 2, 3, \dots; n=1, 2, 3, \dots$)

Fig. 1 Rectangular plate subjected to combined loads

これらの撓みを適合条件式 ((1) 式) に代入すると

$$\begin{aligned} \nabla^2 F = & (\pi^4 E/4a^2b^2) \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s (W_{mn}W_{rs} \\ & + W_{mn}W_{0rs} + W_{0mn}W_{rs}) \\ & \times \left[ms(nr-ms) \cos \frac{m+r}{a} \pi x \cos \frac{n+s}{b} \pi y \right. \\ & + ms(nr-ms) \cos \frac{m-r}{a} \pi x \cos \frac{n-s}{b} \pi y \\ & + ms(nr+ms) \cos \frac{m+r}{a} \pi x \cos \frac{n-s}{b} \pi y \\ & \left. + ms(nr+ms) \cos \frac{m-r}{a} \pi x \cos \frac{n+s}{b} \pi y \right] \quad (8) \end{aligned}$$

となる。(8) 式の特解を F_p とすると

$$\begin{aligned} F_p = & \frac{E\beta^2}{4} \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s (W_{mn}W_{rs} \\ & + W_{mn}W_{0rs} + W_{0mn}W_{rs}) \\ & \times \sum_i g_i \cos \frac{m \pm r}{a} \pi x \cos \frac{n \pm s}{b} \pi y \quad (9) \end{aligned}$$

($i=1, 2, 3, 4$)

ただし

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{ms(nr-ms)}{[(m+r)^2 + \beta^2(n+s)^2]^2} \\ g_2 &= \frac{ms(nr-ms)}{[(m-r)^2 + \beta^2(n-s)^2]^2} \\ g_3 &= \frac{ms(nr+ms)}{[(m+r)^2 + \beta^2(n-s)^2]^2} \\ g_4 &= \frac{ms(nr+ms)}{[(m-r)^2 + \beta^2(n+s)^2]^2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$\beta = a/b$: アスペクト比

(9) 式に現われる $m \pm r, n \pm s$ の正負の符号は (10) 式の $g_i (i=1, 2, 3, 4)$ の分母の形にしたがうものとする。

このとき応力関数 F の一般解は次式で表わされる。

$$F = F_p - \frac{\bar{\sigma}_y}{2} x^2 \left(1 - \frac{\zeta}{3a} x\right) - \frac{\bar{\sigma}_x}{2} y^2 \left(1 - \frac{\eta}{3b} y\right) - \bar{\tau} xy \quad (11)$$

$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}$ および ζ, η は荷重を表す変数であり、Fig.1 に示すとおりである。(11) 式より剪断応力を求めると境界 $x=0, a$ および $y=0, b$ で一様となっており、応力関数 F は境界条件 (5) 式を満足している。また、 x 軸方向および y 軸方向の相対変位 $\int_0^a (\partial u / \partial x) dx, \int_0^b (\partial v / \partial y) dy$ を求めると応力関数 F は周辺が直線を保つという条件 ((3), (4) 式) も満足している。

以上で面内の境界条件を満足する応力関数 F が撓み w の関数として表わされたので次に平衡方程式 ((2) 式) を Galerkin 法で解く。すなわち、(2) 式の両辺に $\sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b)$ を乗じて板全面で積分した式；

$$\int_0^a \int_0^b X \sin(p\pi x/a) \sin(q\pi y/b) dx dy = 0 \quad (12)$$

($p=1, 2, 3, \dots; q=1, 2, 3, \dots$)

ただし

$$X = (D/t) \nabla^2 w - F_{,yy}(w+w_0)_{,xx} \\ + 2F_{,xy}(w+w_0)_{,xy} - F_{,xx}(w+w_0)_{,yy}$$

に (6), (7) および (11) 式を代入して得られる連立方程式より平板の大撓み挙動が決定される。(12)式は具体的には次式で表わされるような $w_{pq}(=W_{pq}/t)$ に関する 3 次の連立方程式となる。

$$\sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \sum_k \sum_l (w_{mn} w_{rs} + w_{mn} w_{ors} \\ + w_{0mn} w_{rs}) (w_{kl} + w_{0kl}) \\ \times \sum_{i=1}^4 g_i \{ [k^2(n \pm s)^2 + l^2(m \pm r)^2] \\ \times J_p(m \pm r, k) K_q(n \pm s, l) \\ - 2kl[(m \pm r)(n \pm s)] J_p(k, m \pm r) K_q(l, n \pm s) \} \\ + \frac{1}{12\beta^4(1-\nu^2)} \{ -(p^2 + \beta^2 q^2)^2 w_{pq} \\ + [k_x(1 - \frac{\eta}{2})\beta^2 p^2 + k_y(1 - \frac{\zeta}{2})\beta^2 q^2] (w_{pq} + w_{0pq}) \\ - 4k_x \eta (\frac{\beta p}{\pi})^2 \sum_l (w_{pl} + w_{0pl}) \frac{lq}{(l^2 - q^2)^2} [(-1)^{l+q} - 1] \\ - 4k_y \zeta (\frac{\beta^2 q}{\pi})^2 \sum_k (w_{kq} + w_{0kq}) \frac{kp}{(k^2 - p^2)^2} [(-1)^{k+p} - 1] \\ + 8k_x \eta \frac{\beta^3}{\pi^2} \sum_k \sum_l (w_{kl} + w_{0kl}) \frac{klpq}{(k^2 - p^2)(l^2 - q^2)} \\ \times [(-1)^{k+p-1}][(-1)^{l+q-1}] \} \\ = 0 \quad (13)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} w_{0mn} &= W_{0mn}/t, \quad k_x = \bar{\sigma}_x/\sigma_e, \quad k_y = \bar{\sigma}_y/\sigma_e \\ k_{xy} &= \bar{\tau}/\sigma_e, \quad \sigma_e = \pi^2 E(t/b)^2/12(1-\nu^2) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

なお, J_p, K_q は次の積分値である。

$$\left. \begin{aligned} J_p(m^*, k^*) &= \frac{1}{4a} \int_0^a [\cos(m^* + k^* - p) \frac{\pi x}{a} \\ &\quad - \cos(m^* + k^* + p) \frac{\pi x}{a} \\ &\quad + \cos(k^* - m^* - p) \frac{\pi x}{a} \\ &\quad - \cos(k^* - m^* + p) \frac{\pi x}{a}] dx \\ K_q(m^*, k^*) &= \frac{1}{4b} \int_0^b [\cos(m^* + k^* - q) \frac{\pi y}{b} \\ &\quad - \cos(m^* + k^* + q) \frac{\pi y}{b} \\ &\quad + \cos(k^* - m^* - q) \frac{\pi y}{b} \\ &\quad - \cos(k^* - m^* + q) \frac{\pi y}{b}] dy \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

2.2 数値解法

平板の座屈後挙動を解析するためには 3 次の連立方程式である (13) 式を解くことが必要となるが, その具体的な手順について以下に述べる。まず, (6), (7) 式で

の撓みの展開項数 (m, n) を決め, それらの値に応じて (13) 式中の w_{pq} の係数を求めたのち, これらの連立方程式を解くことになる。なお (13) 式中の w_{pq} の 3 次項にかかる係数 $\sum_{i=1}^4 g_i \times \{\dots\}$ は計算機を用いれば系統的に求めることができる。

ここでは正方形板 ($\beta=1$) を解析対象とし, 付加撓み w は $W_{11}, W_{12}, W_{13}, W_{21}, W_{22}, W_{23}, W_{31}$ および W_{33} の合計 8 項を取り, 初期撓み w_0 は (7) 式で W_{011} のみを採用して (以下では W_{011} を W_0 と書く) (13) 式の係数を決定する。その結果, w_{pq} に関して次式で表わされる 8 元連立方程式が得られる。

$$a_0 w_{pq}^3 + a_1 w_{pq}^2 + a_2 w_{pq} + a_3 = 0 \quad (16)$$

ただし $(p, q) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)$ 。

係数 $a_0 \sim a_3$ は w_{pq} 以外の撓みおよび荷重の関数でありその詳細については文献 4) を参照されたい。

(16) 式の解法は電子計算機によった。すなわち, Fig. 2

Fig. 2 Flow chart

に示すようにある荷重段階 n step において w_{pq} に関する 8 個の 3 次方程式をそれぞれ根の公式を用いて解く。一つの step 内では、例えば $(p, q) = (2, 1)$ に関する方程式を解く際にはその step 内ですでに得られている w_{11}, w_{12}, w_{13} および $(n-1)$ step ですでに求められている $w_{22}, w_{23}, w_{31}, w_{33}$ を用いて係数 $a_0 \sim a_3$ を決める。この 3 次方程式を解くことにより w_{21} が求まる。このようにして 1 つの step 内で 8 個の方程式を解き、それぞれの撓み w_{pq} がある収束条件を満足するまでくり返して計算を行ない、収束した場合には次の step に進む(なお以下に示す計算においては収束条件として $CON=0.001$ を採用した)。本方法は根の公式を用いているので、Newton-Raphson 法に比べると演算時間は短くてすむと考えられる。

2.3 計算結果

本論文では外荷重として圧縮荷重 (x 軸方向のみ) および剪断荷重を考えた。以下では 2.1 節で用いた $\bar{\sigma}_x, \bar{\tau}$ をそれぞれ σ, τ と書くことにする。

本方法の計算精度をチェックするため、まず圧縮荷重のみを受ける正方形板の座屈後挙動を解析した。Fig. 3 に八巻の結果⁵⁾との比較を示すが、本計算結果は十分な精度を有していることがわかる。ただし、以下に示す図において W は正方形板中央での全撓み ($W = W_0 + W_{11} - W_{13} - W_{31} + W_{33}$) を表わしている。

また、純剪断荷重を受ける正方形板の座屈後挙動解析を行なった結果を Fig. 4 に示す。Fig. 4 には小西らの結果⁶⁾および M. Skaloud らの結果⁷⁾もあわせてのせている。小西らは本解析と同数の波数をとっているが撓み波形のすべてを独立変数と考えずに w_{13}/w_{33} の値を座屈

Fig. 3 Load-deflection curves (compression)

Fig. 4 Load-deflection curves (shear)

Fig. 5 Load-deflection curves (combined loads, $\tau/\sigma=1.0$)

時の値に固定しているため本方法と荷重-撓み曲線が少し異なっているようである。

以上で計算精度の確認ができたので、次に圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板を考える。荷重比 ($\tau/\sigma = \tan \theta$) を種々変化させた場合の座屈後挙動について解析した。Fig. 5 は $\theta=45^\circ$ ($\tau/\sigma=1.0$) の場合の荷重-撓み曲線および $k_x=k_{xy}=14$ ($\sigma/\sigma_{cr}=\tau/\tau_{cr}=4.03$) のときの波形である。

2.4 荷重-撓み曲線の近似式

(16) 式の係数 $a_0 \sim a_3$ を求めることは手数を要し、また多元連立 3 次方程式を解くことは実際にはかなり煩雑である。そこで本節では 2.3 節の結果から圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板の荷重-撓み関係を表わす近似式を導く。

圧縮と剪断荷重を同時に受ける場合の座屈に関する相関関係式として次式で表わされる放物線；

$$\sigma_{cr}/\sigma_{cr}^0 + (\tau_{cr}/\tau_{cr}^0)^2 = 1 \quad (17)$$

が近似式として用いられる⁸⁾。ただし $\sigma_{cr}^0, \tau_{cr}^0$ はそれぞれ圧縮荷重、剪断荷重が単独で作用した場合の座屈応力である。(17)式と本計算による座屈値とを比較した結果を Fig. 6 に示す。なお、座屈値は (13) 式で初期撓みお

Fig. 6 Interaction curve for buckling strength

よび w_{pq} に関する 2 次以上の項を 0 とおいて固有値として求めた。

よく知られているように圧縮荷重のみを受ける平板が座屈したのちの荷重増加は撓みの自乗に比例する ($(\sigma - \sigma_{cr}) \propto W^2$)⁹⁾。そこで初期撓みがない正方形板が圧縮と剪断の組合せ荷重を受けるときの荷重と W^2 との関係求めた。結果を Fig. 7 に示すが、両者の間には次式で表わされるような直線関係がほぼ成り立つことがわかった。

$$\sigma/\sigma_{cr} = \tau/\tau_{cr} = 1 + C(W/t)^2 \quad (18)$$

Fig. 7 から θ と係数 C との関係を求めると Fig. 8 に示すようになる。

次に初期撓みが存在する場合について考察する。初期撓みを有する正方形板が圧縮荷重のみを受ける場合の荷重-撓み関係式 (文献 1) の (21) 式を参考に、圧縮と剪断とを同時に受ける正方形板について荷重と板中央での撓みとの関係を次式で推定することにする (Fig. 8 参照)。

$$\sigma/\sigma_{cr} = \tau/\tau_{cr} = 1 - (W_0/W) + C[(W/t)^2 - (W_0/t)^2] \quad (19)$$

(17) 式, (19) 式および Fig. 8 を用いると圧縮と剪断とが任意の荷重比で加わる正方形板の荷重-撓み曲線を容易に求めることができる。 $\theta = 30^\circ$ の場合の計算例を Fig. 9 に示す。図中 ● 印は連立 3 次方程式を解いて得ら

Fig. 7 $k_x (= \sigma/\sigma_e)$ vs. $(W/t)^2$

Fig. 8 Coefficient $C(\tan \theta = \tau/\sigma)$

Fig. 9 Load-deflection curves

れた解であり、実線は (17) 式および (19) 式を用いた計算結果である。ここで述べた近似式は撓みが小さい場合 (W/t が 1.5 程度まで) には十分適用可能であると考えられる。

3 塑性解析

Fig. 10 に示すような圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板に対し塑性崩壊機構を仮定して大撓みを考慮した塑性解析を実施する。境界条件は弾性解析の場合と同一とする。

文献 1) と同様に外部仕事率 W_E を導入すると W_E は

$$\begin{aligned} W_E &= \int_0^b \int_0^b (\bar{p}_x \dot{u} + \bar{p}_y \dot{v} + \bar{p}_z \dot{w}) dx dy \\ &= - \int_C N_x n_x \dot{u} dC - \int_C (N_{xy} n_y \dot{u} + N_{xy} n_x \dot{v}) dC \\ &\quad + \sum_{m=1}^s \int_{l_m} (M + wN) \dot{\theta} dl_m - \sum_{m=1}^r \int_{l_m} N \dot{U} dl_m \end{aligned} \quad (20)$$

Fig. 10 Plastic analysis of square plate

と表わされる。ただし M は塑性関節線における塑性モーメント, N は塑性関節に垂直な合応力であり, $\dot{\theta}$ および $\dot{u}$ はそれぞれ角度および面内変位の不連続量を表わす。面内の境界条件より

$$\int_C N_x n_x \dot{u} dC = \sigma b t \dot{u} \quad (21)$$

$$\int_C (N_{xy} n_y \dot{u} + N_{xy} n_x \dot{v}) dC = \tau b^2 \dot{\gamma} \quad (22)$$

となる。ここで単位面積当たりの外力 $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ をそれぞれ 0 とおくと $W_E = 0$ となる。したがって (20) 式より

$$\sigma b t \dot{u} + \tau b^2 \dot{\gamma} = \sum_{m=1}^s \int_{l_m} (M + wN) \dot{\theta} dl_m - \sum_{m=1}^7 \int_{l_m} N \dot{U} dl_m \quad (23)$$

となる。こうして得られた (23) 式は圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける場合の塑性崩壊の条件式である。

塑性崩壊機構としては種々のパターンが考えられるが、ここでは弾性解析における撓み波形を考慮して Fig. 10 に示すような対角線の塑性関節線を仮定する。圧縮方向と $\phi = 45^\circ$ および -45° の角度をなす塑性関節線にそれぞれ I, II の添字をつけると (23) 式は

$$\sigma b t \dot{u} + \tau b^2 \dot{\gamma} = 2 \left[\int_0^{b/\sqrt{2}} (M^I + w^I N^I) \dot{\theta}^I dl_m + \int_0^{b/\sqrt{2}} (M^{II} + w^{II} N^{II}) \dot{\theta}^{II} dl_m \right]$$

$$- \int_0^{b/\sqrt{2}} N^I \dot{U}^I dl_m - \int_0^{b/\sqrt{2}} N^{II} \dot{U}^{II} dl_m \quad (24)$$

となる。面内の変形が適合していることを考えると面内の不連続量 $\dot{U}^I, \dot{U}^{II}$ は

$$\left. \begin{aligned} \dot{U}^I &= \dot{u}/\sqrt{2} + \dot{\gamma}(b/\sqrt{2} - l_m) \\ \dot{U}^{II} &= \dot{u}/\sqrt{2} - \dot{\gamma}(b/\sqrt{2} - l_m) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

となる。また Appendix に示す関係式

$$N^I = -(\sigma/2 + \tau)t, \quad N^{II} = -(\sigma/2 - \tau)t \quad (26)$$

を用いると (24) 式は次式のように変形される。

$$\begin{aligned} & \int_0^{b/\sqrt{2}} (M^I + w^I N^I) \dot{\theta}^I dl_m \\ & + \int_0^{b/\sqrt{2}} (M^{II} + w^{II} N^{II}) \dot{\theta}^{II} dl_m = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

さらに (27) 式に撓みおよび Appendix に示す面内力と塑性モーメントの相関関係式

$$w^I = w^{II} = W(1 - \sqrt{2} l_m/b), \quad \dot{\theta}^I = \dot{\theta}^{II} = 2\sqrt{2} \dot{W}/b \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} M^I &= \xi_I M_p, \quad M^{II} = \xi_{II} M_p, \quad M_p = t^2 \sigma_Y / 4 \\ \xi_I &= \frac{4(1 - \alpha^2 - \delta^2)}{\sqrt{16 - 15\alpha^2 + 4\sqrt{3}\alpha\delta - 4\delta^2}}, \\ \xi_{II} &= \frac{4(1 - \alpha^2 - \delta^2)}{\sqrt{16 - 15\alpha^2 - 4\sqrt{3}\alpha\delta - 4\delta^2}} \\ \alpha &= \sigma/\sigma_Y, \quad \delta = \tau/\tau_Y, \quad \alpha^2 + \delta^2 \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

を代入して整理すると

$$W/t = (\xi_I + \xi_{II})/2\alpha \quad (30)$$

が得られる。このようにして求めた (30) 式は前述のとおり塑性崩壊の条件式を表わしている。

4 最終強度解析

4.1 解析例

圧縮荷重を受ける場合^{1),2)}と同様、圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板についても弾性解析と塑性解析とを組合せて最終強度の算定を行なう。

$b/t = 80$ の正方形板について荷重比 ($\tau/\sigma = \tan \theta$) を変えた場合の最終強度解析例を Fig. 11 に示す。図中 ● 印が最終強度を与える。なお、横軸 W は板の中央点での全撓みを表わしている。また、Fig. 11(a), (b) の縦軸はそれぞれ平均圧縮応力 σ , 相当応力 $\sigma_{eq} (= \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2})$ を表わしている。

以下では板幅・板厚比 (b/t), 初期撓み (W_0) および圧縮と剪断の荷重比 ($\tau/\sigma = \tan \theta$) を変化させて最終強度を求めた。

4.2 純剪断荷重を受ける場合

純剪断荷重を受ける場合には、ここで仮定した崩壊機構のもとでは最高剪断応力は常に τ_Y となる。なぜなら

$$\frac{b}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} = 2.77$$

$$\left(\frac{b}{t} = 80, \sigma_Y = 25 \text{ kg/mm}^2 \right)$$

$$\left(E = 2.09 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2 \right)$$

	θ	σ_u/σ_Y	τ_u/τ_Y	σ_{eq}/σ_Y
—	0°	0.659	—	0.659
.....	30°	0.547	0.547	0.774
- - -	45°	0.436	0.755	0.872
----	60°	0.300	0.900	0.949
- · - · -	90°	—	1.000	1.000

Fig. 11(a) Ultimate strength of square plate subjected to combined loads

Fig. 11(b) Ultimate strength of square plate subjected to combined loads

ば (27) 式で $\sigma=0$ とおくと

$$M^I + M^{II} = (\xi_I + \xi_{II}) M_p = 0 \quad (31)$$

となる。ただし、このとき $\xi_I = \xi_{II} = 2(1-\delta^2)/\sqrt{4-\delta^2}$ ($\delta = \tau/\tau_Y$) であるので結局 (27) 式を満たす解は $\tau_u = \tau_Y$ ($\delta=1$) となる。

周辺が直線を保つという条件のもとで、矢尾¹⁰⁾は有限要素法により、また J.E. Harding ら¹¹⁾は差分法による解析を行なっているが、同様の結論を得ている (Fig. 12 参照)。この結果は、周辺が直線を保ったままで正方形板が剪断荷重を受ける場合には、板幅・板厚比、初期撓みに関係なく最高剪断応力は常に τ_Y となることを意味している。

4.3 組合せ荷重を受ける場合

圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける場合の最終強度相関曲線を Fig. 13(a)~(d) に示す。実際の計算にあつ

Fig. 12 Ultimate strength predictions of square plate subjected to pure shear

ては θ を 0° から 15° おきに 90° まで、また $w_0/t=0$ (または 0.01), 0.1, 0.5, 1.0 とした場合について板幅・板厚比を 4 とおき ($b/t=40, 60, 80, 120$ ただし $\sqrt{\sigma_Y/E}=0.0346$) に変えて計算を行なった。

純剪断荷重を受ける場合には前に述べたように板幅・板厚比、初期撓みに関係なく常に $\tau_u = \tau_Y$ となる。また圧縮荷重のみを受ける場合には板が薄くなるにしたがって、また初期撓みが大きくなるにしたがって σ_u は低下する。

組合せ荷重のときには厚板 ($b/t=40, 60$) でしかも圧縮荷重が支配的である場合には、初期撓みによる強度低下がかなり大きい。逆に板が薄い場合 ($b/t=120$) には初期撓みの影響は小さい。Fig. 13(b) には J.E. Harding らの差分法による結果¹¹⁾をプロットしているが、本解析結果と比較するとほぼ良い相関がある。また Fig. 13(d) には座屈相関曲線も同時に示している。

本解析結果によれば、i) 初期撓みがない厚板の場合、荷重比 ($\tau/\sigma = \tan \theta$) が変化しても最終強度は低下しないが、板が薄くなるにつれて圧縮荷重が支配的な領域では最終強度の低下が大きくなる。ii) 一方、初期撓みが正方形板の最終強度に及ぼす影響は板が厚いほど、また圧縮荷重成分が大きいほど著しくなる。

Fig. 13 Interaction curves for ultimate strength

5 結 言

本論文では圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板の最終強度解析を行なったが、その結果以下に述べるような結論が得られた。

(1) 弾性解析と塑性解析とを組合せて圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板の最終強度を解析的に求める方法を示し、最終強度相関曲線を得ることができた。

(2) Galerkin 法を用いた弾性解析結果から圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける正方形板の荷重と板中央点の撓みとの関係を表わす近似式を導いた ((19) 式)。

(3) 本計算で仮定した条件の下では純剪断荷重を受け、周辺が直線を保持する正方形板の最高剪断応力は τ_y であるといえる (Fig. 12)。

(4) 圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける初期撓みのない正方形板の最終強度は、厚板の場合、荷重比 ($\tau/\sigma = \tan \theta$) が変化しても最終強度は低下しないが、板が薄くなるにつれて圧縮荷重が支配的な領域では最終強度の低下が大きくなる。

一方、初期撓みが正方形板の最終強度に及ぼす影響は板が厚いほど、また圧縮荷重成分が大きいほど著しくなる (Fig. 13)。

最後に本研究での数値計算の一部においては船舶工学科大学院生 吉江淳彦君の援助を得たことに感謝します。また、本研究の一部は文部省科学研究費の援助のもとになされ、数値計算に際しては東京大学大型計算機センター HITAC 8800/8700 を使用させていただきました。

参 考 文 献

- 1) 藤田, 野本, 仁保: 防挠板の圧縮強度について, 日本造船学会論文集, 第 141 号 (1977. 6), pp. 190~197.
- 2) 藤田, 野本, 仁保: 防挠板の圧縮強度について (第 2 報), 溶接にとまう初期不整を有する防挠板, 日本造船学会論文集, 第 144 号 (1978. 12), pp. 459~467.
- 3) J. Djubek: Solution of the Non-linear Problem of the Deformation of Webs (in German), Pub. IABSE, Vol. 23 (1963), pp. 91~110.
- 4) 仁保 治: 板構造物の最終強度に関する研究, 東京大学学位論文 (1979), pp. 172~179.
- 5) N. Yamaki: Postbuckling Behavior of Rectangular Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, J. Appl. Mech., Vol. 26, No. 3 (1959), pp. 407~414.

- 6) 小西, 白石, 渡辺: 腹板の耐荷力に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第136号 (1966), pp.15~23.
- 7) M. Skaloud, J. Donea, C. H. Massonnet: Post-critical Behavior of a Stiffened Square Plate Subjected to Uniform Shear (in French), Pub. IABSE (1967), pp.187~210.
- 8) Structural Stability Research Council: Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures (Third Edition), edited by B. G. Johnson, A Wiley-Interscience Publication, p.106.
- 9) 吉識雅夫: 圧縮を受ける矩形平板の挫屈限界の決定法の一試案, 応用力学, 第1巻, 第6号 (1947), pp.193~199.
- 10) 矢尾哲也: 溶接による初期不整が構造要素の剛性・強度に及ぼす影響, 日本造船研究協会第200研究部会第5分科会提出資料, SR200-5-21 (1977).
- 11) J. E. Harding, R. E. Hobbs, B. G. Neal: The Elasto-plastic Analysis of Imperfect Square Plates under In-plane Loading, Proc. Instn Civ. Engrs., Part 2 (1977), pp.137~159.
- 12) 加藤, 福地: 板要素の変形能力について, 日本建築学会論文報告集, 第147号 (1968), pp.19~25.

Appendix 面内力と塑性モーメントとの 相関関係について

圧縮と剪断の組合せ荷重を受ける矩形板が圧縮方向と ϕ の角度をなす塑性関節線を軸として曲がる (Fig.14) ときの面内力 (σ, τ) と塑性モーメント (M) との相関関係式を求める (文献12) および文献1) 参照)。

Fig. 14 Plastic analysis

σ_1, σ_2 および τ_3 をそれぞれ塑性関節線に垂直, 平行な直応力および剪断応力とすると (Fig.14 参照)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma \sin^2 \phi + \tau \sin 2\phi \\ \sigma_2 &= \sigma \cos^2 \phi - \tau \sin 2\phi \\ \tau_3 &= \sigma \sin \phi \cos \phi + \tau \cos 2\phi \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

となる。Mises の降伏条件式は

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 + 3\tau_3^2 \quad (33)$$

以下では煩雑さを避けるため $\phi = 45^\circ$ および -45° の場合について考える。

(1) $\phi = 45^\circ$ の場合

(32) 式より

$$\sigma_1 = \sigma/2 + \tau, \quad \sigma_2 = \sigma/2 - \tau, \quad \tau_3 = \sigma/2 \quad (34)$$

(34) 式を降伏条件式 ((33) 式) に代入して引張側および圧縮側の σ_1 の最大値 $\sigma_{1m}^T, \sigma_{1m}^C$ を求め, これらを用いて塑性モーメントを計算すると

$$\frac{M}{M_p} \equiv \xi_I = \frac{4(1-\alpha^2-\delta^2)}{\sqrt{16-15\alpha^2+4\sqrt{3}\alpha\delta-4\delta^2}} \quad (35)$$

ただし, $\alpha = \sigma/\sigma_Y, \delta = \tau/\tau_Y, \alpha^2 + \delta^2 \leq 1$

(2) $\phi = -45^\circ$ の場合

同様にして

$$\sigma_1 = \sigma/2 - \tau, \quad \sigma_2 = \sigma/2 + \tau, \quad \tau_3 = \sigma/2 \quad (36)$$

$$\frac{M}{M_p} \equiv \xi_{II} = \frac{4(1-\alpha^2-\delta^2)}{\sqrt{16-15\alpha^2-4\sqrt{3}\alpha\delta-4\delta^2}} \quad (37)$$

となる。(35), (37) 式からわかるように, 圧縮と剪断とが同時に作用する場合には ϕ に関して対称ではなくなる。面内力と塑性モーメントとの相関曲線の例を Fig.15 に示す。

Fig. 15 Interaction curves between plastic moment and membrane stresses