塑性関節法の一般化に関する研究

正員 上 田 幸 雄* 正員 矢 尾 哲 也*
正員 藤 久 保 昌 彦**

Generalization of The Plastic Hinge Method

by Yukio Ueda, *Member* Tetsuya Yao, *Member*
Masahiko Fujikubo, *Member*

Summary

Previously, one of the authors developed the new mechanism of plastic hinge based on the plastic flow theory, derived the plastic stiffness matrices of elements and established the plastic hinge method for elastic-plastic analysis of space frame structures accompanied by large deflection. In this paper, the previous theory is further extended for analysis of plastic strength of plates based on the finite element method and a general theory is proposed. Applying this generalized plastic hinge method, several examples including elastic-plastic large deflection problems are analysed, and the effectiveness of this method is demonstrated.

1 緒 言

構造物、あるいはその部材の塑性挙動を解析する方法には、基本的に二つある。すなわち、その一つは外力の作用のもとで生じる応力が降伏条件を満足する点に対しては塑性理論に基づく応力・ひずみ関係を導入し、塑性域の拡がりを逐次追跡する方法である。いま一つは、塑性域の拡がりを塑性関節、あるいは塑性関節線に縮約して取り扱う、いわゆる塑性解析法である。前者は有限要素法と共に、精度良い計算法として発展し、その有用性が認められている。この計算法が発展する以前には、後者は剛塑性体に対する解析的な計算法として基礎理論が確立されたものであったが、解析可能な問題は限定されていた¹⁾。しかしながら、近年、電子計算機の発達により、概念的に簡潔で計算手数の少ないこの解析法と有限要素法との組合せ、特に板の問題への適用が再び注目されるようになってきている^{2)~4)}。

著者らの1人は、これまでに塑性流れ理論に基づく新しい塑性関節機構を考案し、塑性関節法を一次元部材に一般的に適用する理論を展開して部材の弾塑性行列を導出した⁵⁾。そしてこれを用い、大たわみを伴う場合を含めて3次元骨組構造物の塑性強度を解析している⁶⁾。さらにこの方法をもとにして、局部座屈の影響も考慮した理想化構造要素法を考案し、計算時間が極端に短くなる

解析法に発展させている^{7),8)}。

ところで、船体をはじめとする板構造物の強度を解析するに当たって、有限要素法は最適な解析法の一つであるので、本研究では、この有限要素法と塑性解析法を併用して板の塑性強度を解析するために、1次元部材に対して提案した塑性関節法をより一般化した理論を展開する。そして、この一般化理論に従って大たわみを伴う場合も含めたいくつかの例題を解析しその有効性を示す。

2 解 析 理 論

本論文では、有限要素法をもとに塑性関節法の一般化を図る。したがって、これらの解析法の基本的な仮定をそのまま適用することになるが、二、三重要なものを以下に示す。

- (1) 通常の変位法による有限要素法を用いる。
- (2) 節点における合応力が塑性条件を満足すると、節点に塑性関節を生じる。その後も塑性化した節点を除いて要素は弾性挙動する。
- (3) 塑性関節は完全弾塑性挙動をし、塑性条件を満足した後の塑性挙動は、塑性歪増分理論によって表わされる。

2.1 有限要素の節点における塑性条件

いま、 m 個の節点を有する一つの有限要素を考える。この要素の全節点力 $\{X_n\}$ および全節点変位 $\{u_n\}$ は次のように表わし得る。

$$\{X_n\} = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}^T \quad (1)$$

* 大阪大学溶接工学研究所

** 大阪大学大学院

$$\{u_n\} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}^T \quad (2)$$

各節点の節点変位が s 個の自由度を有するとすると、

i 節点での節点力 $\{X_i\}$ 、節点変位 $\{u_i\}$ は

$$\{X_i\} = \{R_{1i}, R_{2i}, \dots, R_{si}\}^T \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

$$\{u_i\} = \{h_{1i}, h_{2i}, \dots, h_{si}\}^T \quad (i=1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

さて、本論文では i 節点の塑性条件を次のように考える。

“ i 節点の合応力が降伏条件を満足すると i 節点に塑性関節が形成される。”

ここで、 i 節点の応力成分を $\sigma_{xi}, \dots, \tau_{xyi}, \dots$ とすると i 節点の塑性条件は下式のように表すことができる。

$$f_i(\sigma_{xi}, \dots, \tau_{xyi}, \dots) = 0 \quad (5)$$

ところで、 i 節点の応力は、有限要素の変位関数にもよるが、一般に i 節点をはじめ他の節点を含む j 個の節点の節点力の関数となっている。すなわち

$$\{\sigma_i\} = \{\sigma_i(X_1, X_2, \dots, X_j)\} \quad (j \leq m) \quad (6)$$

したがって、 i 節点の応力と、 j 個の節点の節点力の関係 (式(6)) を式 (5) に代入すると

$$F_i(X_1, X_2, \dots, X_j) = 0 \quad (j \leq m) \quad (7)$$

となる。すなわち j 個の節点の節点力が (7) 式を満足した時、 i 節点は塑性化する。

2.2 塑性関節を有する有限要素の仮想仕事と塑性節点変位

いま、一つの要素が微小変形し節点力 $\{X_n + dX_n\}$ のもとで釣合っており、節点1から節点 k までに塑性関節が形成されているものとする。この状態で、仮想変位増分 $\{\delta du_n\}$ を与えた場合に内力および外力のなす仕事、 δW_i および δW_e を考える。

塑性関節は領域としての広がりはないが、負荷状態では節点変位 $\{u_n\}$ は弾性成分 $\{u_n^e\}$ と塑性成分 $\{u_n^p\}$ の和

$$\{u_n\} = \{u_n^e\} + \{u_n^p\} \quad (8)$$

となる。また、要素は塑性関節を除いて弾性であるので、要素内の弾性ひずみ $\{\epsilon^e\}$ は変位・ひずみ行列 $[B]$ を用いると、次のように書ける。

$$\{\epsilon^e\} = \{\epsilon_x^e, \epsilon_y^e, \dots, \gamma_{xy}^e, \dots\} = [B]\{u_n^e\} \quad (9)$$

まず、要素が弾性の場合の剛性方程式は、よく知られているように仮想仕事の原理により次式となる。

$$\{X_n\} = [K^e]\{u_n^e\} \quad (10)$$

ここに、 $[K^e]$ は有限要素法の弾性剛性行列である。

次に塑性関節が生じている要素に仮想変位増分 $\{\delta du_n\}$ を与えた場合、内力のなす仕事 δW_i は弾性仕事 δW_i^e と塑性仕事 δW_i^p の和として表わせる。すなわち

$$\delta W_i = \delta W_i^e + \delta W_i^p \quad (11)$$

一般に弾性仕事は弾性挙動をする部分 (V_{ei}) の応力、ひずみの積で、また塑性仕事は塑性挙動をする部分 (V_{pi}) における等価応力 $\{\bar{\sigma} + d\bar{\sigma}\}$ と等価塑性ひずみ増分 $\{d\bar{\epsilon}^p\}$ の積で表わすことができるので、式 (11) は

$$\begin{aligned} \delta W_i = & \int_{V_{ei}} \{\delta d\epsilon^e\}^T \{\sigma + d\sigma\} dV \\ & + \int_{V_{pi}} \{\delta d\epsilon^p\}^T \{\bar{\sigma} + d\bar{\sigma}\} dV \end{aligned} \quad (12)$$

この理論では、要素は塑性関節を除いて弾性であるので、上式第1項の弾性項は弾性剛性行列 $[K^e]$ と弾性節点変位 $\{u_n^e + du_n^e\}$ で表せる。また、第2項の塑性項については、 V_{pi} について積分して節点に縮約したものと考えることができ、節点力で表わした塑性条件を塑性ポテンシャルとみなすと、塑性仕事は節点力ベクトルと塑性変位増分ベクトルのスカラー積で表わすことができる。すなわち i 節点の塑性関節に関係した塑性変位増分ベクトル $\{du_n^p\}$ は

$$\{du_n^p\} = \lambda_i \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right\} \quad (13)$$

ここに、 λ_i は正のスカラー量である。したがって式 (12) は

$$\begin{aligned} \delta W_i = & \{\delta du_n^e\}^T [K^e] \{u_n^e + du_n^e\} \\ & + \sum_{i=1}^k \left(\delta \lambda_i \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right\} \right)^T \{X_j + dX_j\} \end{aligned} \quad (14)$$

外力のなす仕事 δW_e は

$$\delta W_e = \{\delta du_n\}^T \{X_n + dX_n\} \quad (15)$$

仮想仕事の原理により、 $\delta W_i = \delta W_e$ となるので

$$\begin{aligned} \{\delta du_n\}^T \{X_n + dX_n\} = & \{\delta du_n^e\}^T [K^e] \{u_n^e + du_n^e\} \\ & + \sum_{i=1}^k \delta \lambda_i \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right\}^T \{X_j + dX_j\} \end{aligned} \quad (16)$$

塑性関節が生じている節点での節点力 $\{X_n + dX_n\}$ は塑性関節の外側と、弾性部分である内側とで同じである。したがって要素に生じている弾性応力から計算でき式 (10) となる。また、 j を $j+1$ から n までとると、 $(\partial F_i / \partial X_j) = 0$ となるので次のように書ける。

$$\{\partial F_i / \partial X_j\} = \{\partial F_i / \partial X_n\} \quad (17)$$

式 (10) および式 (17) を式 (16) に代入すると

$$\begin{aligned} \{\delta du_n\}^T \{X_n + dX_n\} = & \{\delta du_n^e\}^T \{X_n + dX_n\} \\ & + \sum_{i=1}^k \delta \lambda_i \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X_n} \right\}^T \{X_n + dX_n\} \end{aligned} \quad (18)$$

これより変位増分 $\{du_n\}$ は次式となる。

$$\{du_n\} = \{du_n^e\} + \sum_{i=1}^k \lambda_i \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial X_n} \right\} \quad (19)$$

上式から、各節点の塑性条件が、その節点のみでなく他の節点の節点力の関数になっている場合には、塑性関節の生じていない節点にも、式 (19) の右辺第2項のように見かけの塑性変位が生じていると考えて取り扱う必要があることがわかる。ただし、塑性関節の生じていない節点は、見かけの塑性変形はあるが、弾性であるので、その節点の塑性条件を満足するまで応力は増加することができる。

2.3 塑性関節を有する有限要素の塑性剛性行列

塑性関節が節点1から k まで生じているひとつの有限

要素の塑性剛性行列を導出する。

塑性関節の生じている節点 ($i=1, \dots, k$) では、次式を満足している。

$$F_i(X_n)=0 \quad (i=1, \dots, k) \quad (20)$$

i 節点で塑性関節に除荷が生じる場合には

$$dF_i(X_n)=\{\partial F_i/\partial X_n\}^T \{dX_n\} < 0 \quad (21)$$

となるが、負荷が続く限り

$$dF_i(X_n)=\{\partial F_i/\partial X_n\}^T \{dX_n\}=0 \quad (i=1, \dots, k) \quad (22)$$

式 (20) を増分形で表わすと

$$\{dX_n\}=[K^e]\{du_n^e\} \quad (23)$$

また、式 (19) を式 (23) に代入すると

$$\{dX_n\}=[K^e]\left(\{du_n\}-\sum_{i=1}^k \lambda_i \left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right\}\right) \quad (24)$$

式 (22) に式 (24) を代入すると

$$\{\partial F_i/\partial X_n\}^T [K^e]\left(\{du_n\}-\sum_{i=1}^k \lambda_i \left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right\}\right)=0 \quad (i=1, \dots, k) \quad (25)$$

上式は $\lambda_i (i=1, \dots, k)$ に関する k 個の 1 次連立方程式になっている。いま $\{\lambda\}=\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}^T$ なるベクトルを定義すると式 (25) は

$$[G]\{\lambda\}=[H]\{du_n\} \quad (26)$$

となる。ここで

$$G_{ij}=\left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right\}^T [K^e]\left\{\frac{\partial F_j}{\partial X_n}\right\} \quad (i, j=1, \dots, k) \quad (27)$$

$$H_{ir}=\left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right\}^T [K^e] \quad (i=1, 3, \dots, k, r=1, 2, m \times s) \quad (28)$$

式 (26) を解けば $\{\lambda\}$ が求まる。すなわち

$$\begin{aligned} \{\lambda\} &= [G]^{-1} [H] \{du_n\} \\ &= [M] \{du_n\} \end{aligned} \quad (29)$$

この $\{\lambda\}$ を式 (24) に代入すると、塑性関節を有する要素の節点力増分 $\{dX_n\}$ と節点変位増分 $\{du_n\}$ の関係が導出される。

$$\{dX_n\}=[K^p]\{du_n\} \quad (30)$$

ここに

$$[K^p]=[K^e]-\sum_{i=1}^k [K^e]\left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right\} [M_{ir}] \quad (r=1, 2, \dots, m \times s) \quad (31)$$

上式の $[K^p]$ が塑性剛性行列である。

例えば、節点 1 のみに塑性関節が生じている場合には

$$[K^p]=[K^e]-\frac{[K^e]\left\{\frac{\partial F_1}{\partial X_n}\right\}\left\{\frac{\partial F_1}{\partial X_n}\right\}^T [K^e]}{\left\{\frac{\partial F_1}{\partial X_n}\right\}^T [K^e]\left\{\frac{\partial F_1}{\partial X_n}\right\}} \quad (32)$$

これまでに示した理論は微小変形する要素について展開したが、塑性関節の生成条件 (塑性条件) は要素節点の応力によって決められている。ところで板要素に大た

わみを生じる場合の応力は大たわみの影響を受けるが、ここで定義した塑性条件はそのまま有効である。したがって、大たわみを伴う弾塑性解析にも、本理論はそのまま適用することができる。

いま、大たわみを伴う 1 要素が節点力と完全に釣合っている場合の節点力増分 $\{dX_n\}$ と節点変位増分 $\{du_n\}$ は、弾性 (接線) 剛性行列 $[K^e]$ を用いると

$$\{dX_n\}=[K^e]\{du_n\} \quad (33)$$

となる。したがって、この要素に塑性関節が生じた場合の塑性 (接線) 剛性行列 $[K^p]$ は、本節の $[K^p]$ の導出手順をそのまま適用すると次式を得ることができる。

$$[K^p]=[K^e]-\sum_{i=1}^k [K^e]\left\{\frac{\partial F_i}{\partial X_n}\right\} [M_{ir}] \quad (r=1, 2, \dots, m \times s) \quad (34)$$

上式は、式 (31) の $[K^p]$ に含まれる $[K^e]$ に代って式 (33) の $[K^e]$ を挿入したものにはかならない。通常の有限要素法における弾性大たわみ解析法に、適宜上記の $[K^p]$ を採用すると弾塑性大たわみ解析を行なうことができる。

3 解 析 例

3.1 解析手順

2 章で展開した塑性関節法の一般化理論を用いて解析を行い、理論の妥当性を検討した。解析には三角形要素を用い、面内の変位関数としては一定ひずみとなる 1 次式を、また面外変形に対しては不適合である不完全 3 次式を採用した。したがって要素の節点数は $m=3$ 、可能な塑性関節の数は $k=3$ となる。応力は通常の有限要素法の計算手順による。たとえば微小変形する場合の各節点における面内応力 $\{\sigma_p\}$ および曲げ応力 $\{\sigma_b\}$ は

$$\{\sigma_p\}=\{\sigma_{xp}\sigma_{yp}\sigma_{xyp}\}^T=[A_p]\{X_{np}\} \quad (35)$$

$$\{\sigma_b\}=\{\sigma_{xb}\sigma_{yb}\sigma_{xyb}\}^T=[A_b]\{X_{nb}\} \quad (36)$$

ここに

$$\{X_{np}\}=\{X_1Y_1X_2Y_2X_3Y_3\}^T \quad (37)$$

$$\{X_{nb}\}=\{Z_1M_{x1}M_{y1}Z_2M_{x2}M_{y2}Z_3M_{x3}M_{y3}\}^T \quad (38)$$

上式の X, Y, Z は x 方向, y 方向, z 方向の節点力, また M_x, M_y は x 方向, y 方向の節点曲げモーメントを表わす。節点の応力は式 (35) と式 (36) の和として表わされる。

$$\{\sigma\}=\{\sigma_p\}+\{\sigma_b\}=[A_p]+[A_b]\{X_n\} \quad (39)$$

したがって、この要素では節点における応力は、すべての節点力 $\{X_n\}$ の関数となっている。

この要素の節点の塑性条件は Mises の降伏条件を用い、要素の節点の合応力成分で示すと

$$f_i=|m|+l^2-1=0 \quad (40)$$

となる (附録参照)。ここに

$$m^2=m_x^2-m_y^2+m_z^2+3m_{xy}^2 \quad (41)$$

$$t^2 = t_x^2 - t_x t_y + t_y^2 + 3t_{xy}^2 \quad (42)$$

$$m_x = 2\sigma_{xb}/3\sigma_Y, \quad m_y = 2\sigma_{yb}/3\sigma_Y, \quad m_{xy} = 2\tau_{xyb}/3\sigma_Y \quad (43)$$

$$t_x = \sigma_{xp}/\sigma_Y, \quad t_y = \sigma_{yp}/\sigma_Y, \quad t_{xy} = \tau_{xyp}/\sigma_Y \quad (44)$$

式(40)に式(39)を代入すると、各節点の降伏関数はすべての節点力の関数となる。すなわち

$$F_i(X_1 Y_1 Z_1 M_{x1} M_{y1} \dots) = 0 \quad (45)$$

なお、計算プログラムでは、要素の節点の一つずつ、 $F_i = 0$ の条件を満足して塑性化するようにプログラミングされている。

3.2 微小弾塑性解析

(a) 帯板の引張りおよび曲げ解析

まず、塑性相関関係（塑性条件）の基本的性質を調べるために、一端固定の帯板の自由端に面内および面外の荷重を加えた場合を解析した。荷重は変位を制御して与えた。解析対象は下記の3例である。

CASE (A) 面内変位だけ加える。

CASE (B) 面外変位だけ加える。

CASE (C) 面外変位だけで固定端が塑性化した後に、面内変位を加える。

Fig. 1(a), (b) に CASE(A) および CASE(B) の荷重～変位の関係を、また Fig. 1(c) に CASE(A), (B), (C) の固定端の節点における m と t の相関曲線を示す。

CASE (A) では、仮定した要素の面内変位関数の性質より要素内応力が一様となるために、要素の3節点は同時に塑性化する。Fig. 1(a)に示す荷重・変位の関係は、有限要素法による通常の微小弾塑性解析の結果と完全に一致することが確かめられている。

(a) Load-displacement curve under forced displacement, u

(b) Load-deflection curve under forced displacement, w

(c) Interaction between t and m

Fig. 1 Plastic behaviors of plates under tension or/and bending

CASE(B) では、固定端節点が塑性関節となるとメカニズムが形成され、以後荷重は増加しない。なお、固定端に塑性関節が形成される曲げモーメントは、要素分割を次第に細かくすると高めから正解に収束する。これは要素に生じる曲げ応力分布が低めから正しいものに近づくためであり、塑性条件が正しいことが認められる。したがって、この崩壊荷重の精度は用いた要素の性質および要素分割に依存するものである。Fig. 1 の程度の要素分割では厳密解より多少高い荷重で崩壊している。

CASE(A), (B) いずれの場合も、変位を増加させるにしたがって、それぞれの内力 t および m は、Fig. 1(c) の t 軸上あるいは m 軸上で増加し、降伏曲面に達した後は、ほとんど増加せず一定値を保つ。これに対して CASE(C) の場合には、固定端が曲げによって塑性化した時点で $(t, m) = (0, 1)$ の位置にあった内力は、面内変位を増加させるにしたがって降伏曲面に沿って $(t, m) = (1, 0)$ の方へ移動してゆく。降伏曲面からのずれは荷重増分の粗さに依存するものである。

なお、微小変形の枠内では、面内と曲げが同時に作用する場合に要素の弾性剛性行列には連成項がない。しかしながら、一旦塑性関節が生じると塑性剛性行列には連成項が生ずる。

(b) 横圧を受ける厚板の曲げ解析

厚板が横圧を受ける問題は、一般に微小弾塑性曲げ問題として取り扱うことができる。ここでは、正方形板が等分布荷重を受ける場合を解析した。Fig. 2(a) に単純支持の場合、また Fig. 2(b) に周辺固定の場合について、分布荷重と板中央部の横たわみ、および塑性関節の

Fig. 2 Elastic-plastic analysis of square plates under uniformly distributed lateral loads

生成過程を示す。図には楠田による上限値、および下限値⁹⁾を併せ示す。

ところで、本解析法による解の精度は有限要素の変位関数の性質および要素分割に依存する。Fig. 2 に示すいずれの場合にも、要素分割を細かくすると塑性強度は低めから収束している。これは、要素分割が粗いと板に分布する曲げモーメントの絶対値が正解より大きい方にはずれ、塑性化が早くなるためである。

Fig. 2(a) に示す単純支持の場合、楠田による上限値と下限値は一致して正解値を与えている。本理論による解析結果は、図に示した程度の要素分割（1辺を8等分）ではほぼ正解値に一致している。

これに対して Fig. 2(b) に示す周辺固定の場合には、同程度の精度の解を得るために細かい要素分割（1辺を16等分）を施した。この場合の結果は、楠田の下限値より少し高めとなっている。

3.3 弾塑性大たわみ解析

(a) 中央集中荷重を受ける帯板の大たわみ解析

両端固定の帯板が横荷重を受ける場合、たわみが大きくなると、たわみの2次の項による面内力が無視できなくなる。ここでは簡単な弾塑性大たわみ問題として、中央に集中荷重を受ける帯板を解析した。解析により得られた荷重と帯板中央のたわみの関係を Fig. 3 に示す。図のA点で固定端および中央の載荷部の節点に塑性関節が形成され、メカニズムとなる。その後、たわみが増加す

Fig. 3 Load-deflection curve of a strip clamped at both ends under centrally concentrated load

るに従って面内力が増加し、塑性関節が増えてゆく（図のB点、C点）。やがてD点に達して全節点が塑性関節となる。この点は帯板が塑性膜となった状態に対応している。解析結果は破線で示された実験結果⁶⁾と良い相関を示している。なお、大たわみを伴う場合にも降伏した節点の内力 m , t は降伏曲面に沿って変化することが確かめられている。

(b) 面内圧縮を受ける板の大たわみ解析

最後に、正方形板が面内圧縮荷重を受ける場合につい

Fig. 4 Elastic-plastic large deflection analysis of square plates under thrust

て解析を行った。厚板および薄板について荷重とたわみの関係、および塑性関節の生成過程を Fig. 4(a), (b) に示す。図の破線は同じ要素分割で通常の有限要素法解析を行った結果を示すが、本解析法による結果はこれと比較して低めとなっている。この原因として次のことが考えられる。

本解析法では塑性変形を節点の塑性関節に縮約して考えており、塑性関節が形成されると要素の剛性は急激に低下する。これに対して通常の有限要素法解析では塑性化は要素の表裏面から始まり、塑性域は板厚方向とともに面内にも順次拡がってゆく。そのため塑性化した要素の剛性の低下はゆるやかである。したがって本解析例のように変形の平衡状態が、大たわみと要素の剛性の影響を敏感に受けるような問題に対する本解析法の適用は今後更に検討を必要とする。

なお、両解析法による結果とも、塑性部分の進展状況は一致している。

4 結 論

本論文では、著者らの1人が既に1次元部材に対してその有効性を確かめている塑性関節法のより一般化され

た理論を展開した。本解析理論は次の特性を有している。

- (1) 本解析理論は有限要素法をもとに、塑性関節法の一般化を図ったものである。
- (2) 弾性解析は、通常の有限要素法解析と一致する。
- (3) 要素の節点の合応力が降伏条件を満たすと、その要素のその節点は塑性関節となるという塑性条件は妥当である。
- (4) 節点が塑性関節となった後も、その節点の内力比、および要素の剛性は節点における降伏条件を満足しながら自動的に調節される。また、塑性関節となっていない節点にも見かけの塑性変形が生じる場合がある。
- (5) 微小変形の場合、一様ひずみとなる変位関数による有限要素を用いれば、解析結果は通常の有限要素法による弾塑性解析結果と完全に一致する。
- (6) 一般に、荷重増分および要素分割を細かくしてゆくと解析結果は正解に収束する。

この解析理論に基づいて、微小面内、微小曲げおよび大たわみ問題を解析するためのプログラムを組み立てた。そして、いくつかの例題を解析し、この一般化理論

の有効性を確認した。

本論文で用いた要素では、節点の応力はすべての節点の節点力の関数になっていたが、他の種類の要素に対しても本解析理論を容易に拡張し、適用することができると考えられる。さらに、温度変化を受ける場合、あるいは動的問題などへの適用も可能で、現在これらの研究を進めている。

参 考 文 献

- 1) P. G. Hodge : Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959).
- 2) 堀田佳克：塑性関節線による板の有限要素解析，日本機械学会論文集，第 43 巻，373 号 (1977)，pp. 3246~3255.
- 3) 藤田 譲，野本敏治，仁保 治：防撓板の圧縮強度について，日本造船学会論文集，第 141 号 (1977)，pp. 190~197.
- 4) 山本善之，大坪英臣，栗生和夫：有限要素法による平板構造物の簡易弾塑性解析法，日本造船学会論文集，第 145 号 (1979)，pp. 125~131.
- 5) 上田幸雄，松石正克，山川武人，赤松毅人：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析，日本造船学会論文集，第 124 号 (1968)，pp. 183~191.
- 6) 上田幸雄，赤松毅人，近江義夫：マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析(その 2)，日本造船学会論文集，第 126 号 (1969)，pp. 253~262.
- 7) 上田幸雄，Sherif Rashed：船体横強度解析に関する基礎的研究，日本造船学会論文集，第 136 号 (1974)，pp. 309~324.
- 8) 上田幸雄，Sherif Rashed，片山正孝：理想化構造要素法による二重底構造の最終強度解析，日本造船学会論文集，第 138 号 (1975)，pp. 322~329.
- 9) 楠田忠雄：垂直荷重を受ける板の塑性設計について，日本造船学会論文集，第 107 号 (1960)，pp. 195~202.

付録：板に曲げと面内力が同時に作用している状態での塑性関節の条件

ここでは、板に生じる応力の合応力が塑性関節の条件(塑性条件)を満足するまで弾性挙動すると仮定する。いま、ある節点が塑性条件を満足し、Fig. A-1 に示す

ような応力分布になったとする。この時の x 方向曲げモーメント M_x は

$$m_x = k_1 \sigma_Y t^2 / 4 - k_1 \sigma_Y (\alpha t)^2 / 4 = k_1 M_P (1 - \alpha^2) \quad (A-1)$$

上式で $M_P = t^2 \sigma_Y / 4$ は塑性モーメントを表わす。ここでつぎの無次元量を定義する。

$$m_x = M_x / M_P = k_1 (1 - \alpha^2) \quad (A-2)$$

同様に

$$m_y = k_2 (1 - \alpha^2) \quad (A-3)$$

$$m_{xy} = k_3 (1 - \alpha^2) \quad (A-4)$$

平面応力状態の Mises の降伏条件は

$$\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3 \tau_{xy}^2 = \sigma_Y^2 \quad (A-5)$$

ここで、板厚の一部分 αt を除いて、応力成分 $\sigma_x = k_1 \sigma_Y$ ， $\sigma_y = k_2 \sigma_Y$ ， $\tau_{xy} = k_3 \sigma_Y$ が降伏条件を満足するための条件は、

$$k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2 + 3 k_3^2 = 1 \quad (A-6)$$

式 (A-2)，(A-3)，(A-4) を式 (A-6) に代入すると

$$m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3 m_{xy}^2 = (1 - \alpha^2)^2 \quad (A-7)$$

ところで、Fig. A-1 の応力分布において、板厚の一部分 αt の σ_x と σ_y は異符号である。したがって、曲げモーメントを作った応力成分と同じ大きさでは降伏しない。いま、これをもとの応力の β 倍にする。すなわち

$$\sigma_x = \beta k_1 \sigma_Y, \quad \sigma_y = \beta k_2 \sigma_Y, \quad \tau_{xy} = \beta k_3 \sigma_Y \quad (A-8)$$

σ_x による軸力 T_x は

$$T_x = \beta k_1 \sigma_Y \cdot \alpha t = \alpha \beta k_1 T_Y \quad (A-9)$$

上式で、 $T_Y = t \sigma_Y$ 。ここで、つぎの無次元量を定義する。

$$t_x = T_x / T_Y = \alpha \beta k_1 \quad (A-10)$$

同様に

$$t_y = \alpha \beta k_2 \quad (A-11)$$

$$t_{xy} = \alpha \beta k_3 \quad (A-12)$$

式 (A-8) を式 (A-5) に代入し、さらに式 (A-10)，(A-11)，(A-12) を代入して β を消去すると次式が得られる。

$$t_x^2 - t_x t_y + t_y^2 + 3 t_{xy}^2 = \alpha^2 \quad (A-13)$$

式 (A-7)，(A-13) より α を消去すると

$$m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3 m_{xy}^2 = \{1 - (t_x^2 - t_x t_y + t_y^2 + 3 t_{xy}^2)\}^2 \quad (A-14)$$

これが塑性関節の条件である。

ここでつぎの無次元の合応力成分を定義する。

$$m^2 = m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3 m_{xy}^2 \quad (A-15)$$

$$t^2 = t_x^2 - t_x t_y + t_y^2 + 3 t_{xy}^2 \quad (A-16)$$

式 (A-15)，(A-16) を用いると式 (A-14) は次式のようになる

$$|m| + t^2 - 1 = 0 \quad (A-17)$$

Fig. A-1 Distributions of stress components at plastic hinge