骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析

正員 都 井 裕*

Nonlinear Dynamic Analysis of Frames and Axisymmetric Shell Structures

by Yutaka Toi, Member

Summary

New beam bending element was proposed in Ref. 1) including the effect of shearing deformation, which was composed of two rigid bars connected by two different types of springs. In case of uniform division this discrete element derived by physical consideration is equivalent to the beam element in the conventional finite element method, which was introduced in Ref. 2) by employing linear displacement and rotation functions in conjunction with one-point integration based on the penalty method. Almost the same situation holds for the conical frustum element used for the discrete analysis of axisymmetric shell structures.

These discrete elements give accurate linear elastic solutions in spite of their simplicity and they can be effectively used in the limit load analysis because they can construct the plastic collapse mechanisms.

In this paper the application of these discrete elements is treated to the nonlinear dynamic analysis of frames and axisymmetric shell structures. As numerical examples nonlinear behavior is analyzed of plane and space frames, circular plates, circular cylindrical shells, and spherical shells loaded impulsively. The obtained results are compared with theoretical solutions, other numerical ones, and experimental results in order to justify the validity of the present method.

1 序

川井により提案された、せん断変形を考慮したはりの曲げ解析のための剛体・ばねモデル¹⁾と、処罰法による有限要素²⁾とが等価であることを説明する。また、回転対称シェルの解析のための円錐台要素における同様の関係について述べる。さらに、これらの離散化モデルを、はり、平面骨組、立体骨組、円板、円筒殻、および球殻の非線形衝撃応答解析に応用し、その有効性を示す。

2 せん断変形を考慮した剛体・ばねモデルと処罰法による有限要素との等価性

2.1 はりの曲げ要素

川井は、文献 14) において、回転ばねにより結合された剛体要素より成る、はりの極限解析用の離散化モデルを提案した (以下、剛体・ばねモデルと称する)。文献 1) に示されているように、この離散化モデルにおいては、せん断変形の影響を考慮することが容易である。すなわち、Fig. 1 の節点 2 における横たわみの連続性を放棄し、横方向の相対変位に抵抗するせん断ばねを、新た

に挿入すればよい。この場合、節点 2 における回転ばね k_b 、せん断ばね k_s に貯えられるひずみエネルギーは、次式により表わされる。

$$V_b = \frac{1}{2} k_b (\theta_2 - \theta_1)^2 = \frac{1}{2} \frac{2EI}{l_1 + l_2} (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (1)$$

$$V_s = \frac{1}{2} k_s \left\{ \left(u_2 - \frac{1}{2} l_2 \theta_2 \right) - \left(u_1 + \frac{1}{2} l_1 \theta_1 \right) \right\}^2 \\ = \frac{1}{2} \frac{2\alpha GA}{l_1 + l_2} \left(u_2 - u_1 - \frac{1}{2} l_1 \theta_1 - \frac{1}{2} l_2 \theta_2 \right)^2 \quad (2)$$

ここに、 V_b は曲げひずみエネルギー、 V_s はせん断ひずみエネルギー、 EI は曲げ剛性、 GA はせん断剛性、 α は有効せん断係数である。(1)、(2) 式におけるばね定数は、節点 2 における曲率およびせん断ひずみを、隣接

Fig. 1 Beam bending element

* 東京大学工学部

する剛体要素の重心間距離を用いて、差分近似することにより、決定されている。

一方, Hughes は, 文献 2) において, 処罰法の定式化による, 以下のような有限要素モデルを示している。まず, せん断変形の影響を含めたはりのひずみエネルギーは, 次式により表わされる。

$$V = V_b + V_s$$

$$= \frac{1}{2} EI \int \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \alpha GA \int \left(\frac{du}{dz} - \theta \right)^2 dz \quad (3)$$

ここで, 長さ $(l_1 + l_2)/2$ (Fig. 1 の剛体・ばねモデルにおける重心間距離に相当) の要素を考え, (3) 式における u, θ をそれぞれ独立に要素内線形と仮定し, V_s の積分を要素中心点において行なえば, V_b, V_s は, 以下のように計算される。

$$V_b = \frac{1}{2} EI \int_0^{l_1+l_2} \left\{ \frac{2}{l_1+l_2} (\theta_2 - \theta_1) \right\}^2 ds$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2EI}{l_1+l_2} (\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (4)$$

$$V_s = \frac{1}{2} \alpha GA \int_0^{l_1+l_2} \left\{ \frac{2}{l_1+l_2} (u_2 - u_1) - \left[\theta_1 + \frac{2s}{l_1+l_2} (\theta_2 - \theta_1) \right] \right\}^2 ds$$

$$= \frac{1}{2} \frac{2\alpha GA}{l_1+l_2} \left\{ u_2 - u_1 - \frac{1}{4} (l_1+l_2) (\theta_2 + \theta_1) \right\}^2 \quad (5)$$

以上の諸式において, (1) 式と (4) 式は等しく, $l_1 = l_2$ (等分割) の場合は, (2) 式と (5) 式も等しい。すなわち, この場合は, せん断変形を考慮した剛体・ばねモデルと処罰法による有限要素の要素剛性マトリックスは, 完全に一致する。また, $l_1 \neq l_2$ の場合でも, (5) 式の積分を $s = l_2/2$ で行なえば, (2) 式と (5) 式は一致する。なお, 剛体・ばねモデルでは, 境界点において長さ零の仮想的な要素を考えることにより, 境界条件の処理を行なう。

2.2 円錐台要素

せん断変形を考慮したはりの剛体・ばねモデルと同様の考え方により, 回転対称シェル解析用の剛体要素モデルの定式化を行なうことができる (これは, 文献 15) において示した円筒殻の軸対称解析用剛体・ばねモデル (L) の一般化である)。軸対称変形の場合を考えると, 剛体要素の接合点である節点 2 における各ひずみ成分は, 以下のように表わされる (Fig. 2 を参照)。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= (u_2 - u_1)/l \\ \epsilon_\theta &= \{ (w_1 + l\theta_1/2 + w_2 - l\theta_2/2) \cos \phi \\ &\quad + (u_1 + u_2) \sin \phi \} / 2r_2 \\ \kappa_s &= (\theta_1 - \theta_2)/l \\ \kappa_\theta &= -(\theta_1 + \theta_2) \sin \phi / 2r_2 \\ \gamma &= \{ (w_2 - l\theta_2/2) - (w_1 + l\theta_1/2) \} / l \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Fig. 2 Conical frustum element

Zienkiewicz は, 文献 3) において, Hughes によるはりの曲げ要素と同様の手順により, 円錐台要素を導入している。すなわち, 円錐シェルにおける, せん断変形の影響を含めたひずみエネルギーは, 次式のように表わされる。

$$V = V_b + V_m + V_s$$

$$= \frac{1}{2} \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \int (\kappa_s^2 + 2\nu\kappa_s\kappa_\theta + \kappa_\theta^2) \cdot 2\pi r ds$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{Et}{1-\nu^2} \int (\epsilon_s^2 + 2\nu\epsilon_s\epsilon_\theta + \epsilon_\theta^2) \cdot 2\pi r ds$$

$$+ \frac{1}{2} \alpha GA \int \gamma^2 \cdot 2\pi r ds \quad (7)$$

ここに, V_b は曲げひずみエネルギー, V_m は面内ひずみエネルギー, V_s はせん断ひずみエネルギーである。各ひずみ成分は, u, w, θ を独立な変数として, 次式により与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_s &= du/ds \\ \epsilon_\theta &= (w \cos \phi + u \sin \phi)/r \\ \kappa_s &= -d\theta/ds \\ \kappa_\theta &= -\theta \sin \phi / r \\ \gamma &= dw/ds - \theta \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Fig. 2 における剛体要素重心間を 1 要素と考え, u, w, θ をそれぞれ要素内線形と仮定し, (7) 式の積分を要素中心点の値を用いて行なえば, Zienkiewicz の要素が得られるが, これは, (6) 式における ϵ_θ を,

$$\epsilon_\theta = \{ (w_1 + w_2) \cos \phi + (u_1 + u_2) \sin \phi \} / 2r_2 \quad (9)$$

として, 通常の変位法の定式化により得られる離散化モデルと等しい。

なお, せん断変形の影響を考慮しない剛体要素モデルの定式化は, 変分差分法に相当し, 回転対称シェルの解析への応用は, Stein¹¹⁾, Bushnell^{12), 13)}らにより, 試みられている。

3 非線形解析への応用

前節で述べた離散化モデルは、簡略であるにもかかわらず、線形解の精度がよく^{3),15)}、また、合応力成分が要素内で一定であり、塑性崩壊メカニズムの表現も可能であるため、極限解析の手法を用いた動的な非線形解析に有効に応用することができる。せん断変形を考慮しない剛体要素モデルの静的・動的な非線形解析への適用例は、すでに、文献15), 16), 17)などに示されているが、複雑な構造物に応用する場合は、自由度 θ を有する、せん断変形を考慮した離散化モデルが扱い易く、また、境界条件の処理は、有限要素法による方が簡便であるため、ここでは、Fig. 1, Fig. 2における剛体要素重心間を1要素と見なした有限要素モデルにより解析を行なう。以下に、平面骨組、立体骨組、回転対称シェル構造の非線形解析法の概要を示す。

3.1 平面骨組構造の解析

平面骨組構造の面内変形解析に対し、有限変形の影響を考慮した、以下の増分形仮想仕事式を用いる。

$$\begin{aligned} \delta V + \delta W^{(0)} - \delta W \\ = \int ((\Delta M \delta \Delta \kappa + \Delta N \delta \Delta \varepsilon + \Delta V \delta \Delta \gamma) dz \\ + \int N^{(0)} \Delta u, \quad z \delta \Delta u, \quad z dz \\ - \int (\Delta q \delta \Delta u + \Delta p \delta \Delta w) dz = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここに、 $\delta V, \delta W^{(0)}, \delta W$ は、それぞれ、応力増分、初期応力、外力増分のなす仮想仕事であり、 q, p は分布横荷重、分布軸力である（以下、外力項は並進変位成分に対する分布荷重で代表させる）。ひずみ増分と節点変位増分の関係式を以下に示す（Fig. 1を参照）。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \kappa &= -d\Delta\theta/dz = (\Delta\theta_1 - \Delta\theta_2)/l \\ \Delta \varepsilon &= d\Delta w/dz + du^{(0)}/dz \cdot d\Delta u/dz \\ &= (\Delta w_2 - \Delta w_1)/l \\ &\quad + (u_2^{(0)} - u_1^{(0)}) (\Delta u_2 - \Delta u_1)/l^2 \\ \Delta \gamma &= d\Delta u/dz - \Delta\theta \\ &= (\Delta u_2 - l\Delta\theta_2/2 - \Delta u_1 - l\Delta\theta_1/2)/l \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

弾性変形の場合、応力増分とひずみ増分の関係式は、

$$\Delta M = EI \Delta \kappa, \quad \Delta N = EA \Delta \varepsilon, \quad \Delta V = \alpha GA \Delta \gamma \quad (12)$$

であり、塑性変形に対しては、次式の降伏関数より、塑性流れ則を用いて定まる応力・ひずみ関係を用いる。

$$f(M, N) = (N/N_0)^2 + M/M_0 - 1 = 0 \quad (13)$$

ここに、

$$M_0 = \sigma_0 Z, \quad N_0 = \sigma_0 A \quad (14)$$

であり、 σ_0 は単軸状態における降伏応力、 Z は塑性断面係数、 A は部材断面積である。今回の解析では、せん断応力の塑性変形に対する影響は考慮しない。

3.2 立体骨組構造の解析

立体骨組に対しては、微小変形の仮定のもとで、次の増分形仮想仕事式を用いて、弾塑性応答解析を行なう。

$$\begin{aligned} \delta V - \delta W \\ = \int (\Delta M_x \delta \Delta \kappa_x + \Delta M_y \delta \Delta \kappa_y + \Delta N \delta \Delta \varepsilon_z \\ + \Delta M_z \delta \Delta \theta_{z,z} + \Delta V_x \delta \Delta \gamma_{xz} + \Delta V_y \delta \Delta \gamma_{yz}) dz \\ - \int (\Delta q_x \delta \Delta u + \Delta q_y \delta \Delta v + \Delta p \delta \Delta w) dz = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

ひずみ増分と節点変位増分の関係式を、以下に示す（Fig. 3を参照）。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \kappa_x &= -d\Delta\theta_x/dz = (\Delta\theta_{x1} - \Delta\theta_{x2})/l \\ \Delta \kappa_y &= d\Delta\theta_y/dz = (\Delta\theta_{y2} - \Delta\theta_{y1})/l \\ \Delta \varepsilon_z &= d\Delta w/dz = (\Delta w_2 - \Delta w_1)/l \\ \Delta \theta_{z,z} &= d\Delta\theta_z/dz = (\Delta\theta_{z2} - \Delta\theta_{z1})/l \\ \Delta \gamma_{xz} &= d\Delta u/dz - \Delta\theta_y \\ &= (\Delta u_2 - l\Delta\theta_{y2}/2 - \Delta u_1 - l\Delta\theta_{y1}/2)/l \\ \Delta \gamma_{yz} &= d\Delta v/dz + \Delta\theta_x \\ &= (\Delta v_2 + l\Delta\theta_{x2}/2 - \Delta v_1 + l\Delta\theta_{x1}/2)/l \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

弾性変形における応力・ひずみ関係は、

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_x &= EI_x \Delta \kappa_x, \quad \Delta M_y = EI_y \Delta \kappa_y, \\ \Delta M_z &= GK \Delta \theta_{z,z}, \quad \Delta N = EA \Delta \varepsilon_z, \\ \Delta V_x &= \alpha_x GA \Delta \gamma_{xz}, \quad \Delta V_y = \alpha_y GA \Delta \gamma_{yz} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

であり、降伏関数としては、次式を用いる。

$$\begin{aligned} f(M_x, M_y, M_z, N) &= (M_x/M_{x0})^2 + (M_y/M_{y0})^2 \\ &\quad + (N/N_0)^2 + (M_z/M_{z0})^2 - 1 = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

ここで、添字0は、それらの応力成分が単独で部材断面に作用した場合の全断面塑性値を意味する。

3.3 回転対称シェル構造の解析

回転対称シェル構造に対しては、有限変形の影響を考慮した以下の増分形仮想仕事式を用いる。

$$\begin{aligned} \delta V + \delta W^{(0)} - \delta W \\ = \int (\Delta M_s \delta \Delta \kappa_s + \Delta M_\theta \delta \Delta \kappa_\theta + \Delta N_s \delta \Delta \varepsilon_s \\ + \Delta N_\theta \delta \Delta \varepsilon_\theta + \Delta V \delta \Delta \gamma) ds + \int N_s^{(0)} \Delta w, \quad s \delta \Delta w, \quad s ds \\ - \int (\Delta q \delta \Delta w + \Delta p \delta \Delta u) ds = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

ひずみと節点変位の関係式としては、(6)式を用いる

Fig. 3 Coordinate system

が、 ε_s のみ、有限変形の影響を考慮して、次のように修正される。

$$\begin{aligned}\Delta \varepsilon_s &= d\Delta u/ds + dw^{(0)}/ds \cdot d\Delta w/ds \\ &= (\Delta u_2 - \Delta u_1)/l + (w_2^{(0)} - w_1^{(0)}) (\Delta w_2 - \Delta w_1)/l^2\end{aligned}\quad (20)$$

弾性変形における応力・ひずみ関係は、

$$\left. \begin{aligned}\Delta M_s &= Et^3 (\Delta \kappa_s + \nu \Delta \kappa_\theta) / 12(1 - \nu^2) \\ \Delta M_\theta &= Et^3 (\nu \Delta \kappa_s + \Delta \kappa_\theta) / 12(1 - \nu^2) \\ \Delta N_s &= Et (\Delta \varepsilon_s + \nu \Delta \varepsilon_\theta) / (1 - \nu^2) \\ \Delta N_\theta &= Et (\nu \Delta \varepsilon_s + \Delta \varepsilon_\theta) / (1 - \nu^2) \\ \Delta V &= \alpha G t \Delta r\end{aligned} \right\} \quad (21)$$

であり、降伏関数としては、次式を用いる。

$$\begin{aligned}f(M_s, M_\theta, N_s, N_\theta) &= (M_s^2 - M_s M_\theta + M_\theta^2) / M_0^2 \\ &+ (N_s^2 - N_s N_\theta + N_\theta^2) / N_0^2 - 1 = 0\end{aligned}\quad (22)$$

ここに、

$$M_0 = \sigma_0 t^2 / 4, \quad N_0 = \sigma_0 t \quad (23)$$

であり、 t はシェルの板厚である。

4 衝撃応答解析例

前節に示した増分形仮想仕事式を基礎とし、骨組および回転対称シェル構造の非線形衝撃応答解析を行なう。骨組、回転対称シェル構造とも、質量は節点に集中化し、各要素の運動方程式に必要な座標変換を施し、全体系の運動方程式を導く。時間積分は、Newmark の β 法 ($\beta=1/6$ または $1/4$) による。なお、使用計算機は HITAC 8800/8700 である。

4.1 は り

分布横衝撃荷重 (一様な初期速度 V_0) を受ける両端完全固定はりの崩壊挙動の解析結果を、Fig. 4 と Fig. 5 に示す。Fig. 4 は変位応答曲線であり、Fig. 5 には、無次元化された初期の運動エネルギー $\lambda = \rho V_0^2 L^2 / M_0$ に対するスパン中央の永久変形量を、微小変形解析結果¹⁷⁾、Jones による実験結果⁴⁾ とともに示している。有限変形の影響を考慮することにより、実験結果と良好な一致を見ていることがわかる。時間増分は $1 \mu\text{sec}$ であり、1 ケースに対する計算時間は、約 23 秒であった。

Fig. 4 Elasto-plastic, geometrically nonlinear response of a fully clamped beam

Fig. 5 Maximum permanent transverse deflections for a fully clamped beam loaded impulsively

4.2 平面骨組

Fig. 7 に示す、ステップ荷重を受ける簡単な平面骨組⁵⁾の衝撃応答解析を行なった。質量は、Fig. 7 に示した部材断面の 625 倍の値を用いている。Fig. 6 は、線形応答解析結果であり、文献 5) における解と比較している。Fig. 7 は、微小変形弾塑性応答解析結果であり、降伏の判定は曲げモーメントのみで行ない、弾性勾配の $1/10$ のひずみ硬化を仮定している ($\sigma_0=33,000 \text{ psi}$)。

Fig. 6 Elastic response of a plane frame loaded impulsively

Fig. 7 Elasto-plastic response of a plane frame loaded impulsively

Fig. 8 Elasto-plastic, geometrically nonlinear response of a plane frame loaded impulsively

Fig. 8 は、有限変形弾塑性応答解析結果であり、ひずみ硬化は零である。時間増分は 5m sec を用い、Fig. 7, Fig. 8 の解析例で要した計算時間は、それぞれ、約 39 秒、約 44 秒であった。

4.3 立体骨組

Fig. 9 に示す立体骨組構造⁶⁾の衝撃崩壊挙動を解析した。解析結果は、Fig. 10, Fig. 11 に示す。Fig. 10 は、変位応答曲線であり、Fig. 11 には、塑性ヒンジの形成される位置と時間を示した。解析は、一部材 4 等分割 (総自由度数 144) で行ない、時間増分 4msec を用いて、要した計算時間は約 136 秒であった。

4.4 球殻

Fig. 12 に示す、一様な外圧をステップ荷重として受ける部分球殻の非線形応答解析を行なった。Fig. 12 に

P_s = STATIC LOAD

P_d = DYNAMIC LOAD

$P_s(1,3) = P_s(2,3) = P_s(3,3) = -30 \text{ kip}$

$P_s(2,2) = -1 \text{ kip}$ $P_s(2,6) = 6 \text{ in-kip}$

$P_d(2,2) = -20 \text{ kip}$ $P_d(2,6) = 120 \text{ in-kip}$

Fig. 9 Space frame with triangular plane form

Fig. 10 Elasto-plastic response of a triangular frame

Fig. 11 Position of plastic hinges

は、有限変形弾性解析結果を、Fig. 13 には、微小変形弾塑性解析結果を、それぞれ、Nagarajan による有限要素解⁷⁾とともに示している。Fig. 13 における両者の解の相違は、Nagarajan の解析では、板厚方向の塑性域の進展過程を考慮し、また、弾性勾配の 1/50 のひずみ硬化が含まれていることによる。板厚方向の塑性域の進展過程を考慮するか否かによる解の相違は、板厚程度以上の永久変形量を予測する際には、あまり問題にならないように推察される。用いた時間増分、および要した計算時間は、Fig. 12 の解析例では、それぞれ 10 μ sec および 10 秒であり、Fig. 13 の解析例では、1 μ sec および 44 秒である。

4.5 円筒殻

衝撃荷重 (一様な内圧) を受ける円筒殻の永久変形量

Fig. 12 Geometrically nonlinear response of a spherical cap under 600 psi uniform external step pressure

Fig. 13 Elasto-plastic response of a spherical cap under 600 psi uniform external step pressure

を評価するための静的弾塑性解析を行なった。すなわち、一様な内圧を負荷して静的弾塑性解析を行ない、初期の無次元運動エネルギー $\lambda = \rho V_0^2 L^2 / 4 M_0 H$ (ここに、 V_0 は一様な初期速度、 L は円筒殻の長さの $1/2$ 、 H は板厚) が、内部塑性仕事として吸収されるのに必要な変位量 (スパン中央における横たわみ) を計算し、これを初期速度 V_0 を受けたときの永久変形量とする。Fig. 14 および Fig. 15 に、両端固定および両端支持の場合の解析

Fig. 14 Maximum permanent transverse deflections for a fully clamped circular cylindrical shell loaded impulsively

Fig. 15 Maximum permanent transverse deflections for a simply supported circular cylindrical shell loaded impulsively

結果を、Jonesによる剛塑性解析解^{8),9)}とともに示す。本解析法は、このような目的のためにも有効である。解析は、 $1/2$ 解析 (15 要素等分割) であり、要した計算時間は、Fig. 14 の有限変形解析で約 30 秒、Fig. 15 の有限変形解析で約 48 秒であった。

4.6 円 板

分布衝撃荷重 (一様な初期速度 V_0) を受けるアルミニウム (6061-T6) 製円板の崩壊挙動を解析した。境界条件は周辺完全固定であり、初期速度の異なる 7 ケースの解析を行なった。Fig. 16 には変位応答曲線、Fig. 17 には、初期の無次元運動エネルギー $\lambda = \rho V_0^2 R^2 / M_0$ に対する永久変形量を、Florence による実験結果¹⁰⁾ とともに示している。板厚の 2~5 倍程度の永久変形量に対し、ほぼ良好な解が得られている。時間増分は $0.5 \mu \text{sec}$ であり、1 ケースの計算時間は、約 58 秒であった。

Fig. 16 Elasto-plastic, geometrically nonlinear response of a fully clamped circular plate loaded impulsively

Fig. 17 Maximum permanent transverse deflections for a fully clamped circular plate loaded impulsively

5 結 論

本研究内容を要約して以下に示す。

(1) はりの曲げ要素, 円錐台要素に対し, 処罰法による有限要素と, 極限解析への応用を目的に開発されたせん断変形を考慮した剛体要素モデルとが, 等価であることを説明した。

(2) 上述の知見をもとに, これらの離散化モデルを骨組構造および回転対称シェル構造の衝撃崩壊挙動を中心とする動的非線形問題の解析に応用し, 他の数値解, 実験結果, 理論解との比較により, 妥当な解が得られることを確認した。また, 計算時間も比較的短い。

謝 辞

本研究内容に関連し, 大学院課程において御指導を頂いた東大生研川井教授に謝意を表します。

参 考 文 献

1) T. Kawai and C. N. Chen : A Discrete Analysis

of Beam Bending Problems Including the Effects of Shear Deformation, Seisan Kenkyu, Vol.30, No. 5 (1978), 7~10.

- 2) T. J. R. Hughes et al : A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol.11 (1977), 1529~1543.
- 3) O. C. Zienkiewicz et al : A Simple and Efficient Finite Element for Axisymmetric Shells, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol.11 (1977), 1545~1558.
- 4) N. Jones and T. Wierzbicki : A Study of Higher Modal Dynamic Plastic Response of Beams, Int. J. Mech. Sci., Vol.18 (1976), 533~542.
- 5) T. G. Toridis and K. Khozeimeh : Inelastic Response of Frames to Dynamic Loads, Proc. of the ASCE, Vol.97, EM 3 (1971), 847~863.
- 6) R. K. Wen and F. Farhoomand : Dynamic Analysis of Inelastic Space Frames, Proc. of the ASCE, Vol.96, EM 5 (1970), 667~686.
- 7) S. Nagarajan and P. Popov : Non-Linear Dynamic Analysis of Axisymmetric Shells, Int. J. for Num. Meth. in Eng., Vol.9 (1975), 535~550.
- 8) N. Jones : The Influence of Large Deflections on the Behavior of Rigid Plastic Cylindrical Shells Loaded Impulsively, J. of Appl. Mech., Vol.72 (1970), 411~425.
- 9) R. M. Walters and N. Jones : An Approximate Theoretical Study of the Dynamic Plastic Behavior of Shells, Int. J. Non-Linear Mech., Vol.7 (1972), 255~273.
- 10) T. Wierzbicki and A. L. Florence : A Theoretical and Experimental Investigation of Impulsively Loaded Clamped Circular Visco-plastic Plates, Int. J. Solids Structures, Vol. 6 (1970), 553~568.
- 11) M. Stein : The Effect on the Buckling of Perfect Cylinders of Pre-Buckling Deformations and Stresses Induced by Edge Support, NASA TN D-1510 (1962), 271.
- 12) D. Bushnell et al : Finite-Difference Energy Method for Nonlinear Shell Analysis, Computers and Structures, Vol.1 (1971), 361~387.
- 13) D. Bushnell : Finite Difference Energy Models versus Finite Element Models—Two Variational Approaches in One Computer Program, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics, Academic Press (1973), 291~336.
- 14) T. Kawai : New Element Models in Discrete Structural Analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.141 (1977), 174~180.
- 15) 都井, 川井 : 円筒殻の解析における新しい離散化

- モデル, 日本造船学会論文集, 第 144 号 (1978), 280~287.
- 16) Y. Toi and T. Kawai : A New Discrete Analysis on Dynamic Collapse of Structures, J. of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.143 (1978), 257~263.
- 17) Y. Toi and T. Kawai : A New Discrete Analysis on Dynamic Collapse of Structures (Further report), J. of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.145 (1979), 112~119.
-