(昭和 56 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

前進速度を有する任意形状の 3 次元物体 に働く流体力について

正員 小林 正典*

On the Hydrodynamic Forces and Moments Acting on a Three Dimensional
Body with a Constant Forward Speed

by Masanori Kobayashi, Member

Summary

In order to evaluate the response of motion of an arbitrary shaped body with a constant forward speed in waves, the hydrodynamic forces and moments acting on it have to be predicted accurately. The strip method has been usually applied to obtain these hydrodynamic forces acting on a ship shaped body, where the two dimensional hydrodynamical characteristics of each cross section are used. However, the strip method has some deficiencies arising from the fact that the effect of the forward speed can not be considered rationally, and that some three dimensional effects are not taken into consideration.

The author developed the method to calculate the three dimensional hydrodynamic forces and moments acting on an arbitrary shaped body with a constant forward speed, in which the singularities are distributed on its surface, with an intention of investigating the effect of the forward speed as well as some three dimensional effects on the hydrodynamic characteristics.

For a half submerged elliptical model with a constant forward speed, the singularity distributions of diffraction and radiation problems were determined by this calculus. Wave exciting forces, wave pressure distributions on its surface, added mass and damping coefficients were calculated by this method and compared with both the experimental values and ones calculated by the strip method.

1 緒 言

波浪中を一樣前進速度をもって航行する任意の船体(もっと一般的には任意の 3 次元物体)の運動あるいは、その運動を支配する種々の流体力や波力の計算は線形理論の範囲でもまともに取り扱えば著しく複雑である。したがって従来、船体に働く流体力などは、船体の各断面に働く 2 次元流体力を船長方向に積分して求めるストリップ法^{1)~4)}、あるいはストリップ法より、より合理的な取り扱いをした Thin ship theory^{5)~8)}、Slender body theory^{9)~13)}などで計算が行われている。しかし、これらの方法は問題を簡単化して取り扱っているため、船長方向に形状の変化の大きい場合の 3 次元影響や前進速度影響が十分には考慮されていない。船体運動論を取り扱う立場としては、これらの 3 次元影響、前進速度影響が従来の計算法に対してどの程度あるかを知ることは興味のあることである。最近の高速大容量の大型電子計算機の

出現によって、前進速度のある場合の船舶の 3 次元問題に対しても、複雑さを厭わずに数値計算を実行すれば、少なくとも線形理論の範囲でまともに取り扱えるはずであるということも一つの事実である。

そこで、本論では前進速度を有する任意の 3 次元物体について物体表面に特異点を分布する、いわゆる特異点法(最近、著者とは独立に Inglis¹⁴⁾も検討している)を用いて線形理論の範囲で radiation 問題、diffraction 問題をまともに取り扱い 3 次元物体に働く流体力、波力などを求め、半没楕円体に対する実験結果と比較すると同時に、前進速度影響、3 次元影響について検討を行った。

2 理論計算式

2.1 基礎式および境界条件

座標系は Fig.1 に示すように右手系を考える。O₀-XYZ は空間固定座標系であり、O-xyz は原点を静止水面上にもち X の正の方向に一樣速度 V で前進する移

* 三井造船(株)昭島研究所

Fig. 1 Coordinate system

動座標系である。また、 $O'-x'y'z'$ は船体が運動していないとき、原点 O' を O 点に一致させた船体固定座標系である。入射波は X の正の方向から進行してくるものとし、船体表面上に立てた法線方向は流体中に向うものとする。また、その他の基礎仮定は、次のとおりである。流体は非粘性、非圧縮性であり表面張力の影響は無視できるものとし、自由表面を有し、半無限領域に拡がっているものとする。船体運動および入射波の波高は微小であるとし、これに伴う流体運動も微小であるとし、これらの微小量の高次の項は考えないこととする。さらに、問題を簡単化するために、船体は $x'z'$ 平面に対して対称であり、船体運動は surge, heave, pitch について考えることとする。従って、船の運動に伴う流体運動も xz 平面に対して対称となる。

いま、船が O 点を中心に

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= \xi_0 e^{i\omega_e t}; \text{ surge} \\ \zeta(t) &= \zeta_0 e^{i\omega_e t}; \text{ heave} \\ \theta(t) &= \theta_0 e^{i\omega_e t}; \text{ pitch} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ω_e ; 出合円周波数

なる周期運動を行っているものとする。このとき、空間移動座標系 $O-xyz$ と船体固定座標系 $O'-x'y'z'$ との関係は、微小量の高次の項を省略して

$$\left. \begin{aligned} x' &= x - (\xi_0 + z\theta_0) e^{i\omega_e t} \\ y' &= y \\ z' &= z - (\zeta_0 - x\theta_0) e^{i\omega_e t} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

となる。

一方、船体まわりの全速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z; t)$ は

$$\Phi(x, y, z; t) = -V \cdot x + \varphi_s(x, y, z) + \varphi(x, y, z) e^{i\omega_e t} \quad (3)$$

で表わせる。第1項は船の進行に伴う $O-xyz$ に相対的な一様流 V のポテンシャル、第2項は時間に依存しない定常ポテンシャルで、一様速度で静止水面上を前進するときの船体まわりの、流水場を表わす攪乱速度ポテンシャル、第3項は入射波および船体による非定常の攪乱ポテンシャルである。また、非定常の攪乱速度ポテンシャルは、入射波の速度ポテンシャル φ_w と船体の存在のた

め入射波が攪乱される diffraction ポテンシャル φ_d 、および船体運動に伴う radiation ポテンシャル φ_r 、とに分けて考えることができる。すなわち

$$\varphi = \varphi_w + \varphi_d + \varphi_r \quad (4)$$

であり、radiation 問題を取り扱う場合 $\varphi_w = \varphi_d = 0$ 、diffraction 問題を取り扱う場合、 $\varphi_r = 0$ として各々の速度ポテンシャルを求めればよい。これらの非定常の速度ポテンシャルは、ラプラスの方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi(x, y, z) = 0 \quad (5)$$

線形化された自由表面条件

$$K_e \varphi + 2i\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\tau^2}{K^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \text{ at } z=0 \quad (6)$$

ここで、 $K_e = \omega_e^2/g$, $\tau = \omega_e V/g$, g ; 重力の加速度。

水底条件および無限遠で発散波をもつ、いわゆる Radiation condition を満足する必要がある。また、radiation 問題、diffraction 問題の各々に対して、物体表面上の境界条件を満足しなければならない。

いま、船体の形状を表わす方程式

$$F(x, y, z; t) = y' \mp y_0(x', z') = 0, \quad y \geq 0 \quad (7)$$

とすると、radiation 問題に対して、船体表面上で満足される線形化された境界条件は、それぞれの運動に対して、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{r1}}{\partial n} &= i\omega_e \xi_0 n_{x'}; \text{ surge} \\ \frac{\partial \varphi_{r3}}{\partial n} &= i\omega_e \zeta_0 n_{z'}; \text{ heave} \\ \frac{\partial \varphi_{r5}}{\partial n} &= i\omega_e \theta_0 \left(z' n_{x'} - x' n_{z'} - i \frac{V}{\omega_e} n_{z'} \right); \text{ pitch} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

となる。ここで船体表面の法線方向は外向きであり、 $n_{x'}, n_{y'}, n_{z'}$ はそれぞれ次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} n_{x'} &= \mp \frac{\partial y_0 / \partial x'}{F_0}, \quad n_{y'} = \pm \frac{1}{F_0}, \quad n_{z'} = \mp \frac{\partial y_0 / \partial z'}{F_0}, \\ &\text{at } y' \geq 0 \\ F_0 &= \sqrt{(\partial y_0 / \partial x')^2 + 1 + (\partial y_0 / \partial z')^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

また、diffraction 問題に対しての船体表面上での境界条件は、

$$\frac{\partial}{\partial n} (\varphi_w + \varphi_d) = 0, \text{ on } y' = y_0 \quad (10)$$

で示されるが、入射波の速度ポテンシャルは

$$\varphi_w e^{i\omega_e t} = i\eta_A \frac{\omega}{K} e^{Kz} e^{i(Kx + \omega_e t)} \quad (11)$$

ここで、 ω ; 入射波の円周波数、 η_A ; 入射波の振幅

$$K = \omega^2/g$$

であるから、(10) 式の境界条件は

$$\frac{\partial \varphi_d}{\partial n} = -i\omega \eta_A (i n_{x'} + n_{z'}) e^{Kz} e^{iKx}, \text{ on } y' = y_0 \quad (12)$$

となる。

2.2 積分方程式

単位振幅の強さで振動する特異点が、一様速度で前進する場合、自由表面条件(6)および Radiation condition を満足する Green 関数は Haskind⁹⁾、花岡⁹⁾らに示されており、その表示方法には種々のものがある。ここでは Haskind の表示に従って示すと次のようになる。すなわち、任意の点 $Q(x_q, y_q, z_q)$ に特異点があるとき、任意の点 $P(x_p, y_p, z_p)$ における Green 関数は

$$\left. \begin{aligned} G(P, Q) &= \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + G^*(P, Q) \\ G^*(P, Q) &= -\frac{K_e}{\pi} \lim_{\mu' \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \\ &\quad \times \frac{k e^{i k (z_p + z_q)} e^{i k P} d k d \theta}{\tau^2 k^2 \cos^2 \theta - 2 K_e \tau (1 - i \mu') k \cos \theta - K_e^2 (1 - 2 i \mu')} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

ただし

$$\begin{aligned} r_1^2 &= (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p - z_q)^2, \\ r_2^2 &= (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2 + (z_p + z_q)^2, \\ p &= (x_p - x_q) \cos \theta + (y_p - y_q) \sin \theta, \\ K_e &= \omega_e^2 / g \end{aligned}$$

で表わせる。この Green 関数を用いて物体表面に $\sigma(Q)$ の吹き出しが分布しているとき、船体まわりの P 点における非定常の単位速度の速度ポテンシャル $\phi(P)$ は Brard¹⁵⁾ の一般的表示に従えば

$$\begin{aligned} \phi(P) &= -\frac{1}{4\pi} \iint_s \sigma(Q) G(P, Q) ds(Q) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{V^2}{g} \oint_L \sigma(Q) n_x G(P, Q) dy' \end{aligned} \quad (14)$$

s ; 水面下の物体表面, L ; 自由表面と船体表面との交線

と表わされる。(14) 式の第 2 項の線積分の項は、船のような形を取り扱う場合、第 1 項に比べて小さいと思われるので、本計算では第 2 項を省略して考えることとする。したがって、(14) 式を船体表面上で法線方向に微分すると

$$\frac{\partial \phi(P)}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi} \left[2\pi \sigma(P) + \iint_s \sigma(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} ds(Q) \right] \quad (15)$$

となる。一方, radiation potential, diffraction potential φ_r, φ_d は各々の単位速度ポテンシャルを用いると

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{r1}(x, y, z) &= i\omega_e \xi_0 \phi_{r1}(x, y, z); \text{ surge} \\ \varphi_{r3}(x, y, z) &= i\omega_e \xi_0 \phi_{r3}(x, y, z); \text{ heave} \\ \varphi_{r5}(x, y, z) &= i\omega_e \theta_0 \phi_{r5}(x, y, z); \text{ pitch} \\ \varphi_d(x, y, z) &= i\omega \eta_A \phi_d(x, y, z); \text{ diffraction} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

で表わせ、さらに

$$n_{x'} \equiv V_1, \quad n_{z'} \equiv V_2, \quad z' n_{x'} - \left(x' + i \frac{V}{\omega_e} \right) \equiv V_5 \quad (17)$$

とおくと、(8)、(11) 式の境界条件は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_{rt}}{\partial n} &= V_i, \quad (i=1, 3, 5) \\ \frac{\partial \phi_d}{\partial n} &= -(iV_1 + V_3) e^{K_z} e^{iKx}, \quad \text{on } y'=y_0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となり、さらに (15) 式を適用すると (18) 式は

$$\begin{aligned} V_i &= -\frac{1}{2} \sigma_i(x', y', z') \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_s \sigma_i(x'_0, y'_0, z'_0) \frac{\partial G(x', y', z'; x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial n} \\ &\quad \times ds(x'_0, y'_0, z'_0) \quad (i=1, 3, 5) \\ (iV_1 + V_3) e^{K_z} e^{iKx} &= \frac{1}{2} \sigma_d(x', y', z') \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \iint_s \sigma_d(x'_0, y'_0, z'_0) \frac{\partial G(x', y', z'; x'_0, y'_0, z'_0)}{\partial n} \\ &\quad \times ds(x'_0, y'_0, z'_0) \end{aligned} \quad (19)$$

となる。(19) 式の第 1 式、第 2 式はそれぞれ

$$\sigma_i(x'_0, y'_0, z'_0), \quad \sigma_d(x'_0, y'_0, z'_0)$$

に関する第 2 種 Fredholm 型の積分方程式となるから、これにより、吹き出し密度分布 σ_i, σ_d を決定することができれば、船体まわりの流場、船体に働く流体力等が計算でき、radiation 問題、diffraction 問題は解けたこととなる。ここで (x'_0, y'_0, z'_0) は吹き出しの分布されている船体座標である。いま、 G, σ_i, V_i を実数部と虚数部とに分けて

$$G = G_c + iG_s, \quad \sigma_i = \sigma_{ic} + i\sigma_{is}, \quad V_i = V_{ic} + iV_{is} \quad (20)$$

とおくと (19) 式の radiation 問題に対する積分方程式は

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{ic}(x', y', z') &+ n_{x'} \left\{ \iint_s \sigma_{ic}(x'_0, y'_0, z'_0) \frac{\partial}{\partial x'} \right. \\ &\quad \times G_c(x', y', z'; x'_0, y'_0, z'_0) ds(x'_0, y'_0, z'_0) \\ &\quad \left. - \iint_s \sigma_{is}(x'_0, y'_0, z'_0) \frac{\partial}{\partial x'} \right. \\ &\quad \times G_s(x', y', z'; x'_0, y'_0, z'_0) ds(x'_0, y'_0, z'_0) \Big\} \\ &+ n_{y'} \left\{ \iint_s \sigma_{ic} \frac{\partial}{\partial y'} G_c ds - \iint_s \sigma_{is} \frac{\partial}{\partial y'} G_s ds \right\} \\ &+ n_{z'} \left\{ \iint_s \sigma_{ic} \frac{\partial}{\partial z'} G_c ds - \iint_s \sigma_{is} \frac{\partial}{\partial z'} G_s ds \right\} \\ &= -4\pi V_{ic} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} 2\pi \sigma_{is} + n_{x'} \left\{ \iint_s \sigma_{is} \frac{\partial}{\partial x'} G_c ds + \iint_s \sigma_{ic} \frac{\partial}{\partial x'} G_s ds \right\} \\ + n_{y'} \left\{ \iint_s \sigma_{is} \frac{\partial}{\partial y'} G_c ds + \iint_s \sigma_{ic} \frac{\partial}{\partial y'} G_s ds \right\} \\ + n_{z'} \left\{ \iint_s \sigma_{is} \frac{\partial}{\partial z'} G_c ds + \iint_s \sigma_{ic} \frac{\partial}{\partial z'} G_s ds \right\} \\ = -4\pi V_{is} \quad \text{on } s \end{aligned}$$

$$(i=1, 3, 5)$$

となり、 σ_{ic}, σ_{is} に関する連立積分方程式となる。dif-

fraction 問題に関する積分方程式も (21) 式と同じような形で表わすことができ、(21) 式の左辺は σ_{ic}, σ_{is} が σ_{dc}, σ_{ds} に変わり、また右辺の V_{ic}, V_{is} がそれぞれ次のように変わるだけである。

$$\left. \begin{aligned} V_{ic} &\rightarrow e^{Kz} \cdot \{(V_{1s} - V_{3c}) \cos Kx + (V_{1c} + V_{3s}) \sin Kx\} \\ V_{is} &\rightarrow e^{Kz} \cdot \{(V_{1s} - V_{3c}) \sin Kx - (V_{1c} + V_{3s}) \cos Kx\} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

2.3 カおよびモーメント

船体表面の任意の点での変動圧力を $p e^{i\omega t}$ とし、微小量の2次以上の項を省略し、静圧による項を除くと

$$p = -i\rho\omega\varphi + \rho V \frac{\partial\varphi}{\partial x'} \quad (23)$$

ρ : 流体の密度

で表わされる。 i 方向の運動によって物体に働く j 方向の力およびモーメント $F_{ij} e^{i\omega t}$ は radiation potential を用いて (37) 式によって得られた圧力を船体表面上で積分し、さらに単位速度の速度ポテンシャル ϕ_{rt} を導入すると

$$F_{ij} = -\rho \iint_s \left(\omega_e^2 X_i \phi_{rt} + i\omega_e V X_i \frac{\partial\phi_{rt}}{\partial x'} \right) \frac{\partial X_j}{\partial n} ds \quad (i, j=1, 3, 5) \quad (24)$$

ここで

$$\frac{\partial X_1}{\partial n} \equiv \frac{\partial x'}{\partial n}, \quad \frac{\partial X_3}{\partial n} \equiv \frac{\partial z'}{\partial n}, \quad \frac{\partial X_5}{\partial n} \equiv z' \frac{\partial x'}{\partial n} - x' \frac{\partial z'}{\partial n},$$

$$X_1 \equiv \xi_0, \quad X_2 \equiv \zeta_0, \quad X_3 \equiv \theta_0$$

となる。 F_{ij} を $\rho\omega_e^2 X_i$ で除したものを f_{ij} とし、

$$\phi_{rt} = \phi_{rtc} + i\phi_{rts}, \quad (i=1, 3, 5) \quad (25)$$

の関係をを用いると

$$\begin{aligned} f_{ij} = & -\iint_s (\phi_{rtc} + i\phi_{rts}) \frac{\partial X_j}{\partial n} ds \\ & -i \frac{V}{\omega_e} \iint_s \frac{\partial}{\partial x'} (\phi_{rtc} + i\phi_{rts}) \frac{\partial X_j}{\partial n} ds \end{aligned} \quad (i, j=1, 3, 5)$$

となる。また、 $f_{ij} = f_{ijc} - i f_{ijs}$ とし、 $\partial X_i / \partial n$ は実数部のみであることを考慮すると

$$\left. \begin{aligned} f_{ijc} &= -\iint_s \left(\phi_{rtc} - \frac{V}{\omega_e} \frac{\partial}{\partial x'} \phi_{rts} \right) \frac{\partial X_j}{\partial n} ds \\ f_{ijs} &= \iint_s \left(\phi_{rts} + \frac{V}{\omega_e} \frac{\partial}{\partial x'} \phi_{rtc} \right) \frac{\partial X_j}{\partial n} ds \end{aligned} \right\} \quad (i, j=1, 3, 5) \quad (26)$$

と表わすことができる。(26) 式の f_{ijc}, f_{ijs} は、 $i=j$ のとき、それぞれ付加質量および造波運動による減衰力を示している。また力と運動との位相差 ϵ_{ij} は

$$\epsilon_{ij} = \tan^{-1} \left(\frac{-f_{ijs}}{f_{ijc}} \right) \quad (27)$$

で示される。

また、波によって物体に働く変動圧力 $p e^{i\omega t}$ および i 方向に働く波浪強制力 $E_i e^{i\omega t}$ は radiation 問題と同様に、

$$\left. \begin{aligned} p_e &= -i\rho\omega_e(\varphi_w + \varphi_d) + \rho V \frac{\partial}{\partial x'} (\varphi_w + \varphi_d) \\ E_i &= -\rho\eta_A \iint_s \left(\omega_e^2 \phi_w + i\omega_e V \frac{\partial\phi_w}{\partial x'} \right) \frac{\partial X_i}{\partial n} ds \\ &\quad - \eta_A \iint_s \left(\omega_e^2 \phi_d + i\omega_e V \frac{\partial\phi_d}{\partial x'} \right) \frac{\partial X_i}{\partial n} ds \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 3, 5) \quad (28)$$

と表わすことができる。 E_i の第1項は入射波による圧力を船体表面に積分して求められるもので、いわゆる Froude Kriloff force である。第2項は diffraction potential に基づく diffraction force である。

3 数値計算の方法

3.1 積分方程式の解法

いま、船体は $x'z'$ 平面に対して対称なものを考えており、流体運動も左右対称なものである。吹き出し分布も左右対称であり、船体表面上の境界条件は $y' \geq 0$ の面で合わせればよい。いま、船体表面の水面下の $y' \geq 0$ の面を s_+ 、 $y' < 0$ の面を s_- とし、 s_+ 面での吹き出し密度を σ_+ 、 s_- 面での吹き出し密度を σ_- とすると $\sigma_+ = \sigma_- \equiv \sigma$ であることを考慮し、(21) 式の積分方程式を $y' \geq 0$ の面で書き直すと

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_0}{\partial x'} \left\{ \iint_{s_+} \left(\sigma_{ic} \frac{\partial G_c}{\partial x'} - \sigma_{is} \frac{\partial G_s}{\partial x'} \right) ds_+ \right. \\ \left. + \iint_{s_-} \left(\sigma_{ic} \frac{\partial G_c}{\partial x'} - \sigma_{is} \frac{\partial G_s}{\partial x'} \right) ds_- \right\} \\ - \left\{ \iint_{s_+} \left(\sigma_{ic} \frac{\partial G_c}{\partial y'} - \sigma_{is} \frac{\partial G_s}{\partial y'} \right) ds_+ \right. \\ \left. + \iint_{s_-} \left(\sigma_{ic} \frac{\partial G_c}{\partial y'} - \sigma_{is} \frac{\partial G_s}{\partial y'} \right) ds_- \right. \\ \left. + \frac{\partial y_0}{\partial z'} \left\{ \iint_{s_+} \left(\sigma_{ic} \frac{\partial G_c}{\partial z'} - \sigma_{is} \frac{\partial G_s}{\partial z'} \right) ds_+ \right\} \right. \\ \left. + \iint_{s_-} \left(\sigma_{ic} \frac{\partial G_c}{\partial z'} - \sigma_{is} \frac{\partial G_s}{\partial z'} \right) ds_- \right\} \\ - 2\pi\sigma_{ic} \cdot F_0 \\ = 4\pi F_0 \cdot V_{ic}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_0}{\partial x'} \left\{ \iint_{s_+} \left(\sigma_{is} \frac{\partial G_c}{\partial x'} + \sigma_{ic} \frac{\partial G_s}{\partial x'} \right) ds_+ \right. \\ \left. + \iint_{s_-} \left(\sigma_{is} \frac{\partial G_c}{\partial x'} + \sigma_{ic} \frac{\partial G_s}{\partial x'} \right) ds_- \right\} \\ - \left\{ \iint_{s_+} \left(\sigma_{is} \frac{\partial G_c}{\partial y'} + \sigma_{ic} \frac{\partial G_s}{\partial y'} \right) ds_+ \right. \\ \left. + \iint_{s_-} \left(\sigma_{is} \frac{\partial G_c}{\partial y'} + \sigma_{ic} \frac{\partial G_s}{\partial y'} \right) ds_- \right\} \\ + \frac{\partial y_0}{\partial z'} \left\{ \iint_{s_+} \left(\sigma_{is} \frac{\partial G_c}{\partial z'} + \sigma_{ic} \frac{\partial G_s}{\partial z'} \right) ds_+ \right. \\ \left. + \iint_{s_-} \left(\sigma_{is} \frac{\partial G_c}{\partial z'} + \sigma_{ic} \frac{\partial G_s}{\partial z'} \right) ds_- \right\} \\ - 2\pi\sigma_{is} \cdot F_0 \\ = 4\pi F_0 \cdot V_{is}, \quad \text{on } s_+ \end{aligned}$$

($i=1, 3, 5$)

となる。diffraction 問題についても、(28) 式で右辺が異なるだけであるので、以下 radiation 問題について述べ、diffraction 問題については式の異なるところだけ述べる。なお、(13) 式で示される Green 関数の具体的計算法は Appendix に述べることにする。

(28) 式のままで、 σ_{ic}, σ_{is} に関する連立積分方程式を解き、吹き出し密度分布 $\sigma_{ic}(x', y', z')$, $\sigma_{is}(x', y', z')$ を一般的に決定することは非常にむずかしいので、次のような仮定をする。すなわち、船体表面を長さ方向に M 分割し、さらに各々の分割された strip を周方向に $2N$ 分割する。そのとき、4つの頂点に囲まれたそれぞれの微小面内では、吹き出しの強さは一定であるとし、積分方程式の核関数は微小面を囲む4つの頂点での値を平均化して求めるものとする。

いま、微小面を囲む頂点を

$$\begin{aligned} P_{mn}(x'_m, y'_{mn}, z'_{mn}), (m=1 \sim M+1, n=1 \sim N+1) \\ y'_{mn}=y_0(x'_m, z'_{mn}) \end{aligned} \quad (29)$$

とし、4つの点で囲まれる微小面の代表点を

$$Q_{mn}(x'_{0m}, y'_{0mn}, z'_{0mn}), (m=1 \sim M, n=1 \sim N) \quad (30)$$

$$x'_{0m} = \frac{1}{2}(x'_m + x'_{m+1}),$$

$$z'_{0mn} = \frac{1}{4}(z'_{mn} + z'_{m+1n} + z'_{m+1n+1} + z'_{m+1n+1}),$$

$$y'_{0mn} = y_0(x'_{0m}; z'_{0mn})$$

とする。また、微小面内での吹き出し密度を $\sigma_{icmn}, \sigma_{ismn}$ とし微小分割面の面積を $ds_{mn} = ds_{mn+} = ds_{mn-}$ とおいて、微小面内の代表点で境界条件を満足させるものとする (28) 式は次のように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [\sigma_{icmn} \cdot A(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) - \sigma_{ismn} \cdot B(Q_{m_0n_0}; Q_{mn})] ds_{mn} - 2\pi \sigma_{icm_0n_0} \cdot F_0(Q_{m_0n_0}) \\ = 4\pi \cdot F_0(Q_{m_0n_0}) \cdot V_{ic}(Q_{m_0n_0}) \\ \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [\sigma_{icmn} \cdot B(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) + \sigma_{ismn} \cdot A(Q_{m_0n_0}; Q_{mn})] ds_{mn} - 2\pi \sigma_{ism_0n_0} \cdot F_0(Q_{m_0n_0}) \\ = 4\pi \cdot F_0(Q_{m_0n_0}) \cdot V_{is}(Q_{m_0n_0}) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$(m_0=1 \sim M, n_0=1 \sim N)$$

ただし

$$\begin{aligned} A(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) &\equiv \frac{\partial y_0(Q_{m_0n_0})}{\partial x'} \\ &\times \left\{ \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} + \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) }{\partial x'} \right\} \\ &- \left\{ \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial y'} + \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) }{\partial y'} \right\} \\ &+ \frac{\partial y_0(Q_{m_0n_0})}{\partial z'} \left\{ \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial z'} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) }{\partial z'} \Big\} \\ B(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) &\equiv \frac{\partial y_0(Q_{m_0n_0})}{\partial x'} \\ &\times \left\{ \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} + \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) }{\partial x'} \right\} \\ &- \left\{ \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial y'} + \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) }{\partial y'} \right\} \\ &+ \frac{\partial y_0(Q_{m_0n_0})}{\partial z'} \left\{ \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial z'} \right. \\ &\left. + \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) }{\partial z'} \right\} \end{aligned}$$

であり、 $\partial y_0(Q_{m_0n_0})/\partial x'$, $\partial y_0(Q_{m_0n_0})/\partial z'$, $F_0(Q_{m_0n_0})$, $V_{ic}(Q_{m_0n_0})$, $V_{is}(Q_{m_0n_0})$ は点 $Q_{m_0n_0}$ でのそれぞれ $\partial y_0/\partial x'$, $\partial y_0/\partial z'$, F_0 , V_{ic} , V_{is} の値である。(31) 式は船体表面上の点 $Q_{m_0n_0}$ [$m_0=1 \sim M$, $n_0=1 \sim N$] において満足される条件であるから σ_{icmn} , σ_{ismn} に関する $2M \times N$ 元の連立一次方程式となり、 σ_{icmn} , σ_{ismn} の係数が計算されれば σ_{icmn} , σ_{ismn} は数値的に求めることができる。ここで Q_{mn}^+ , Q_{mn}^- はそれぞれ $y' \geq 0$, $y' < 0$ の船体表面の特異点が分布されている微小面の代表点を表わしており、また、 $\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+)/\partial x'$, $\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+)/\partial y'$, $\dots$ は、 Q_{mn}^+ あるいは Q_{mn}^- を含む面に分布された特異点による $Q_{m_0n_0}$ に対する寄与を表わしており、 $Q_{m_0n_0}$ を囲む4つの頂点での値を平均化を行なったものである。すなわち、 $Q_{m_0n_0}$ を囲む4つの頂点を $P_{m_0n_0}$, $P_{m_0n_0+1}$, $P_{m_0+1n_0}$, $P_{m_0+1n_0+1}$ とすると $\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+)/\partial x'$, $\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+)/\partial x'$, $\dots$ は次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial G_c(P_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} + \frac{\partial G_c(P_{m_0n_0+1}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_c(P_{m_0+1n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} + \frac{\partial G_c(P_{m_0+1n_0+1}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} \right\} \\ \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial G_s(P_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} + \frac{\partial G_s(P_{m_0n_0+1}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial G_s(P_{m_0+1n_0}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} + \frac{\partial G_s(P_{m_0+1n_0+1}; Q_{mn}^+) }{\partial x'} \right\} \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

なお、diffraction 問題については (31) 式の V_{ic} , V_{is} の代りに (22) 式で表わされる値を用いればよい。

3.2 力およびモーメントの計算法

Q 点に特異点が分布するとき任意の P 点における攪乱速度ポテンシャルは、線積分の項を省略すると (14) 式から

$$\phi_c(P) = \frac{-1}{4\pi} \iint_S \{ \sigma_c(Q) G_c(P; Q) \}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\sigma_s(Q)G_s(P; Q)ds(Q) \\ \phi_s(P) = & \frac{-1}{4\pi} \iint_s \{ \sigma_s(Q)G_c(P; Q) \\ & + \sigma_c(Q)G_s(P; Q) \} ds(Q) \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

で表わされるから、 σ_{icmn} , σ_{ismn} を用いて $Q_{m_0n_0}$ での radiation potential を求めると、次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_{ic}(Q_{m_0n_0}) = & -\frac{1}{4\pi} \sum_m \sum_n^N [\sigma_{icmn} \{ G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) \\ & + G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) \} \\ & - \sigma_{ismn} \{ G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) \\ & + G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) \}] ds_{mn} \\ \phi_{is}(Q_{m_0n_0}) = & -\frac{1}{4\pi} \sum_m \sum_n^N [\sigma_{ismn} \{ G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) \\ & + G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) \} \\ & + \sigma_{icmn} \{ G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) \\ & + G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) \}] ds_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 3, 5) \quad (34)$$

したがって、船体に働く力およびモーメントは

$$\left. \begin{aligned} f_{ijc} = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{m_0}^M \sum_{n_0}^N \left[\sum_m \sum_n^N \{ \sigma_{icmn} \cdot C(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) \right. \\ & \left. - \sigma_{ismn} \cdot D(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) \} ds_{mn} \right] \\ & \times \frac{\partial X_j(Q_{m_0n_0})}{\partial n} ds_{m_0n_0} \\ f_{ijs} = & -\frac{1}{4\pi} \sum_{m_0}^M \sum_{n_0}^N \left[\sum_m \sum_n^N \{ \sigma_{icmn} \cdot D(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) \} \right. \\ & \left. + \sigma_{ismn} \cdot C(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) \} ds_{mn} \right] \\ & \times \frac{\partial X_j(Q_{m_0n_0})}{\partial n} ds_{m_0n_0} \end{aligned} \right\} \quad (i, j=1, 3, 5) \quad (35)$$

ただし、

$$\begin{aligned} C(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) & \equiv \left[G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) \right. \\ & + G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) - \frac{V}{\omega_e} \left\{ \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+)}{\partial x'} \right. \\ & \left. + \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-)}{\partial x'} \right\} \Big] \\ D(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}) & \equiv \left[G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+) \right. \\ & + G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-) + \frac{V}{\omega_e} \left\{ \frac{\partial G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+)}{\partial x'} \right. \\ & \left. + \frac{\partial G_s(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^-)}{\partial x'} \right\} \Big] \end{aligned}$$

で計算することができる。 $\partial X_j(Q_{m_0n_0})/\partial n$ は点 $Q_{m_0n_0}$ での $\partial X_j/\partial n$ の値であり、 $G_c(Q_{m_0n_0}; Q_{mn}^+)$, ……は (32) 式と同様な方法で4点を平均した値である。波浪強制力は (35) 式の σ_{icmn} , σ_{ismn} の代りに diffraction 問題で求められた特異点分布を用い、diffraction force を計算し、入射波による Froude Kriloff force を加えれば求

めることができる。なお、radiation および diffraction 問題における船体表面の圧力は、各々の流体力を計算する途中で求めることができる。

4 本計算法による数値計算の検討

本計算法の妥当性を検討するために Green 関数の各成分、point source による波紋の計算を実行し、その特性を調べた。さらに $V=0$ の場合の spheroid に対する radiation 問題を解き、流体力を計算し、W. D. Kim¹⁶⁾ の計算結果との比較を行い、radiation 問題解法の妥当性を検討した。

4.1 Green 関数および point source による波紋

Fig. 2-a, b, Fig. 3-a, b は point source を $(0, 0, -f)$ に置いたときの $-10f < x_p < 10f$, $y_p=0$, $z_p=0$ における Green 関数の G_c , G_s の計算例を示すものである。Fig. 2-a, b が $\tau=0.2236$, Fig. 3-a, b が $\tau=0.2739$ の場合の結果であり、図中に (K_1+K_2) , R_1 , R_2 , G_2^* とあるのは Appendix の Green 関数の計算法で示す各成分を表わし、total とあるのはそれらの各成分の和を表わしている。また、 $F_n=V/\sqrt{gf}$, $\xi_f=\omega_e^2 \cdot f/g$ であり、これらの計算結果には $z_p=0$ のため、 $1/r_1$, $1/r_2$ による成分は含まれていない。これらの図から次のことがわかる。

Fig. 2-a Components of Green's function G_c
($F_n=0.5$, $\xi_f=0.2$, $\tau=0.2236$)

Fig. 2-b Components of Green's function G_s
($F_n=0.5$, $\xi_f=0.2$, $\tau=0.2236$)

Fig. 3-a Components of Green's function G_c
($F_n=0.5$, $\xi_f=0.3$, $\tau=0.2739$)

Fig. 3-b Components of Green's function G_s
($F_n=0.5$, $\xi_f=0.3$, $\tau=0.2739$)

まず、 (K_1+K_2) の成分は G_c に対しては x_p に関して偶関数であるが、 G_s に対しては $x_p=0$ で不連続となる奇関数である。そして、 G_c, G_s のいずれに対しても $x_p=0$ の場合が一番大きな値となり、 $|x_p|$ が大きくなるに従って急激に減少する成分である。 R_1 の成分は point source の後方 ($x_p < 0$) のみに存在し、 x_p に対して周期的に変動する成分であり、その周波数は point source の基本変動周波数 ($\omega_e/2\pi$) より高い周波数である。この成分は $V=0$ の場合に存在しない成分である。 R_2 の成分は基本変動周波数で point source からまわりに進行していく波の成分であるが、前進速度のある場合は、 $\tau < 1/4$ のとき point source の前方 ($x_p > 0$) では波長が縮まり、後方では波長が伸びた形となる。 $\tau > 1/4$ の場合も point source の前方にも存在しているが、これは Green 関数の θ の積分範囲を $|\theta| < \theta_0$ と $\theta_0 < |\theta| < \pi$ とに分けたためであり、 G_2^* の成分を計算すると前方の R_2 と G_2^* は丁度キャンセルされ、結局 $\tau > 1/4$ の場合には、前方の進行波成分は存在しなくなる。 G_2^* の成分は $\tau > 1/4$ で存在する成分で局部的成分と進行波的成分の両方が存在しており、前進のとうり point source の前方では進行波成分は R_2 とキャンセルされる。また、 G_2^* の成分は (K_1+K_2) の成分と同様、 G_c に対しては

Fig. 4-a Wave height contour generated by a pulsating point source ($F_n=0.2$, $\xi_f=1.0$, $\tau=0.2$)

Fig. 4-b Wave height contour generated by a pulsating point source ($F_n=0.2$, $\xi_f=2.0$, $\tau=0.2828$)

Fig. 4-c Wave height contour generated by a pulsating point source ($F_n=0.2$, $\xi_f=3.0$, $\tau=0.3464$)

x_p に関して偶関数であり、 G_s に対しては奇関数となる。すべてを加えた total で見ると $x_p=0$ で不連続な成分があったにもかかわらず、 $x_p=0$ で連続な関数となっている。また、 $\tau < 1/4$ では point source の前方に進行波成分が存在しているが、 $\tau > 1/4$ では存在しなくなる。

次に point source による波紋の計算について述べる。いま、点 $P(0, 0, f)$ に 4π なる強さをもつ周期的な point source があるとき、自由表面の変位 ζ は

$$\zeta(x, y, 0; t) = R_e \left[\frac{1}{g} \left\{ V \frac{\partial G(x, y, z; 0, 0, -f)}{\partial x} - i\omega_e G(x, y, z; 0, 0, -f) \right\} e^{i\omega_e t} \right]_{z=0} \quad (36)$$

Fig. 5-a Wave height contour generated by a pulsating point source ($F_n=0.5$, $\xi_f=0.05$, $\tau=0.1118$)

Fig. 5-b Wave height contour generated by a pulsating point source ($F_n=0.5$, $\xi_f=0.2$, $\tau=0.2236$)

Fig. 5-c Wave height contour generated by a pulsating point source ($F_n=0.5$, $\xi_f=0.3$, $\tau=0.2739$)

と表わされ、 $t=0$ のときの波紋は

$$\zeta(x, y, 0; 0) = \frac{1}{g} \left(V \frac{\partial G_e}{\partial x} + \omega_s G_s \right) \quad (37)$$

で計算することができる。

Fig. 4-a, b, c, Fig. 5-a, b, c に point source のまわりの波紋の計算例を示す。Fig. 4 は $F_n = V/\sqrt{gf} = 0.2$, Fig. 5 は $F_n = 0.5$ とし、 $\xi_f = \omega_e^2 \cdot f/g$ を変化させたものである。Fig. 4 は R_2 の成分が大きく表わされている例であり、 $\tau = 0.2$ では point source の前方の波長は縮まり、後方の波長は長くなっている。同じ前進速度で ξ_f を 2.0 に変えると $\tau = 0.2828$ となり τ が $1/4$ を超える。 τ が $1/4$ を超えると Green 関数の計算例のところで説明したように point source の前方には進行波が

存在しなくなり、さらに τ が大きくなると R_2 による成分が point source の後方のせまい範囲にだけ残って行く。Fig. 4 では R_2 以外の成分がほとんど現われない例であり、一方、Fig. 5 の計算例は R_1 の成分が大きく現われている例である。Fig. 5 の $\tau = 0.1118$ では、基本円周波数が小さいため R_2 による成分はほとんどなく、point source の後方に現われる R_1 の成分がほとんどである。 $\tau = 0.2236$ となると R_1 の成分による進行波が後方で左右に拡がり、さらに $\tau = 0.2739$ と大きくなると R_1 の成分は斜め後方に拡がり point source のすぐ後方には進行波がほとんどなくなる。これらは波紋の計算例の一部であるが花岡⁹⁾、山本¹⁷⁾、Eggers¹⁸⁾らの述べている波紋の性質と似ている。

以上の Green 関数、波紋の計算例の検討の結果、これらの計算結果は、前進速度のある場合の point source に対する特性を表わしているようであるので、point source による Green 関数の数値計算結果は、ほぼ妥当な結果であると思われる。

4.2 $V=0$ の場合の spheroid に対する流体力の計算

本計算法による境界値問題の解法、流体力計算法の妥当性を確認するために、 $V=0$ の場合の spheroid に対

Fig. 6-a Added mass of surging oscillation for spheroids

Fig. 6-b Damping coefficients of surging oscillation for spheroids

して計算を実行し、W. D. Kim¹⁶⁾の流体力計算結果と比較した。Fig. 6-a, b は surge 方向の流体力係数の W. D. Kim¹⁶⁾の計算結果と本計算法による計算結果との比較を示す。これらの図から、高周波数域で若干の差はあるが本計算法による計算結果は W. D. Kim¹⁶⁾の計算結果と一致し、本計算法による境界値問題の解法、流体力の計算法が妥当であることが確認された。なお、本計算法での物体表面での分割数は $10 \times 4 = 40$ 分割であり、 $\xi_a \left(= -\frac{\omega_e^2}{g} a \right) = 2.0$ では $F_n = 0.001$ として (13) 式の Green 関数を用いているが、それ以外の周波数では計算時間の関係から $V=0$ の場合の Green 関数を用いて計算した。

5 計算結果および実験結果との比較

本論の計算方法を検証し、3次元物体に対する前進速度影響を検討するために、半没水楕円型船型に対する模型実験と理論計算を実行し、比較検討を行った。

5.1 模型実験

供試模型は Fig. 7 に示すような水面下が半没楕円形状を有している前後対称の数学船型であり、主要目は次に示すとおりである。

$$L=2.5 \text{ m}, B=0.625 \text{ m}, D=0.45 \text{ m}$$

$$d=0.25 \text{ m}, \nabla=0.2045 \text{ m}^3$$

また、水面下の船型を表わす方程式は

$$\left(\frac{x}{L/2} \right)^2 + \left(\frac{y}{B/2} \right)^2 + \left(\frac{z}{d} \right)^2 = 1 \quad (38)$$

で表わされるものである。

実験は向い波中の波力実験と、強制動揺実験の2種類について実施した。

波力実験では検力計で surge 方向, heave 方向, pitch 方向の波浪強制力およびモーメントを計測するとともに船首部, 船尾部で各4点, 船体中央部で2点計10点について圧力計で変動圧力を計測した。実験状態は前進速度を3点 ($F_n=0.0, 0.1, 0.3$) とし, 入射波の波高は $2\eta_A \div 5 \text{ cm}$ とした。なお, 実験の解析には模型をはずした状態で計測した波高を用いた。

強制動揺実験は surge 方向, heave 方向, pitch 方向について行い, それぞれの強制モードに対して, 船体に

Fig. 7 Half submersible elliptical model

働く surge 方向, heave 方向, pitch 方向の力およびモーメントを検力計にて計測を行い, 計測データをフーリエ解析し付加質量, 造波減衰力の radiation force および moment を求めた。強制動揺実験における前進速度は波力実験と同様3点 ($F_n=0.0, 0.1, 0.3$) とし, 各方向の動揺振幅は surge 方向 $\xi_0 \div 2.5 \text{ cm}$, heave 方向 $\zeta_0 = 2.5 \text{ cm}$, pitch 方向 $\theta_0 \div 1.0 \text{ deg}$ とした。

なお, これらの実験は三井造船(株)昭島研究所小水槽 (長さ $100 \text{ m} \times$ 幅 $5.0 \text{ m} \times$ 水深 2.15 m) で実施された。

5.2 結果の考察

数値計算は船体表面を船長方向に10分割し, 吃水方向に4分割, 計40分割して行った。以下, 波浪強制力, 変動圧力, 付加質量係数, 減衰係数についての数値計算結果と実験結果の比較について述べる。なお, strip 法による計算は N. S. M¹⁹⁾に従って行った。

(1) 波浪強制力

Fig. 8 に前後揺方向の波浪強制力の振幅の実験値と計算値との比較を示す。この図に示されているストリップ法とは元良の方法²⁰⁾であり, Froude Kriloff force しか

Fig. 8 Wave excited surging force in head waves

Fig. 9 Wave excited heaving force in head waves

Fig. 10 Wave excited pitching moment in head waves

考慮していないため、計算結果は実験値よりかなり小さくなっており、前進速度の影響もない。本計算法による計算結果は実験値とかなり良い一致を示しているが、 $\lambda/L > 3.0$ で、実験値は F_n が大きくなるに従って振幅が大きくなっているのに対して、計算値では $F_n = 0.3$ における値が $F_n = 0.0$ と $F_n = 0.1$ の間になっており実験値と傾向が異なっている。実験では波長が長くなると吃水が周期的に変動して船が前進していることになり定常抵抗も吃水に応じて変動する。前進速度が速くなるとこの定常抵抗の成分も大きくなるため、見かけ上の吃水の変動による定常抵抗の変化も大きくなる。計算結果にはこのような考慮をしていないため $F_n = 0.3$ の波長の長いところで実験値との差が現われたのも一つの原因と思われる。Fig. 9 は上下方向の波浪強制力の振幅の結果を示しているが、計算結果と実験結果は良い一致を示し、前進速度の影響も顕著に現われていない。 $F_n = 0.0$ の実験値が $\lambda/L = 2.0$ 付近でばらついているのは、この付近が波長が丁度水槽幅の 5 m 付近であることから水槽の側壁影響であることがわかる。 $F_n = 0.1$ では、この側壁影響は前進速度があるため、波長の長い方にずれて $\lambda/L = 3.0$ 付近となっている。Fig. 10 は縦揺方向の強制モーメントの振幅であり、計算結果と実験結果は良い一致を示す。前進速度の影響はあまり顕著ではないが、 $F_n = 0.3$ で波長の長いところで、前後方向の強制力で述べたのと同じような傾向が実験値と計算値に現われている。ストリップ法との比較では、ストリップ法による振幅の計算値は $\lambda/L = 2.0$ で実験値よりかなり大き目になり、 $F_n = 0.3$ と高速になる程波長の長いところで大きくなり、実験値と離れる傾向にある。

(2) diffraction 問題における変動圧力

Fig. 11 に船体を拘束しながら走航中に入射波から受

Fig. 11 Pressure distribution on ship surface for diffraction problem

ける船体表面の変動圧力の実験値と計算値の比較例を示す。この図は $\lambda/L = 1.0$ の場合の例であり、ストリップ法で求められた計算値も同時に比較して示す。 $F_n = 0.0, 0.1$ の場合、船首部では本計算法による値もストリップ法による値も大きな差はなく実験値と良い一致を示している。船体中央部、船尾部では、本計算法による結果は良い一致を示しているが、ストリップ法による計算値は船体中央部から船尾部になるに従って実験値と離れる傾向にある。これは、ストリップ法はあくまで2次元的に取り扱っているため、波の減衰を考慮していないが、本計算法では、問題を3次元的に取り扱っているため、波の減衰が正しく考慮されているためである。 $F_n = 0.3$ の場合は $F_n = 0.0, 0.1$ の場合とは逆に船体中央部、船尾部において本計算法による計算結果とストリップ法による計算結果とはほとんど差がなく実験値とも良い一致を示す。一方、船首部では本計算法による計算値は実験値と良い一致を示すがストリップ法による計算結果は実験結果と離れる傾向にある。この原因として考えられるのは、高速になると船首部でも3次元影響が大きくなっているためと思われるが、ストリップ法での計算値が船尾部で実験値と一致する理由は明らかでない。

(3) 付加質量係数および減衰係数

Fig. 12, 13 に半没楕円体に対する前後揺方向の付加質量係数および減衰係数の計算値と実験値との比較を示

Fig. 12 Added mass coefficients of surging oscillation

Fig. 14 Added mass coefficients of heaving oscillation

Fig. 13 Damping coefficients of surging oscillation

Fig. 15 Damping coefficients of heaving oscillation

す。付加質量については $F_n=0.0, 0.1$ において側壁影響のためのばらつきが実験値にも現われているが、計算結果は実験結果をよく説明しているものと思われる。とくに、 $F_n=0.3$ においては計測値が小さいにもかかわらず計算値と実験値は良い一致を示している。一般にストリップ法を用いるときには、この流体力は計算出来ないため、経験的な値として $f_{11c}/\nabla=0.1$ が用いられており、今回の結果もほぼ同程度のオーダーとなっているが、 $F_n=0.3$ の低周波数領域で $f_{11c}/\nabla \approx 0.03$ とかなり小さくなり、前進速度によって大きく変化することが明らかになった。減衰係数については、実験値が付加質量係数の場合と同様 $F_n=0.0, 0.1$ でばらついているが、計算値は傾向的に実験値をよく説明しているといえる。 $F_n=0.1, 0.3$ で実験値が計算値よりかなり大きな値となっているが、もともと減衰力が小さいため、走行中の電車の減衰力の影響が大きく現われたのも一つの原因と思われる。

る。

Fig. 14, 15 は上下方向の付加質量係数と減衰係数の計算値と実験値である。付加質量係数については計算値も実験値もほぼ同じような傾向であり、また側壁影響が現われているところ以外では計算値と実験値は一致しているといえる。前進速度による影響はあまり顕著でないが、 $F_n=0.3$ の場合、低周波数領域で $F_n=0.0, 0.1$ に比べて計算値、実験値とも若干小さ目となっている。ストリップ法による計算結果は本計算法による結果と顕著な差が見られず傾向的にもほぼ同じであるが、どちらかというと $F_n=0.3$ の本計算法による結果に近い値となっている。減衰係数について、 $F_n=0.1$ の計算値は若干の変動が見られるが、 $F_n=0.0$ の計算結果とはほぼ定性的にも定量的にも同程度といえる。 $F_n=0.3$ の計算結果は $F_n=0.0, 0.1$ の傾向とはかなり異なり、特に低周波数領域で $F_n=0.0, 0.1$ の結果の倍程度の値となっており、

Fig. 16 Added moment of inertia coefficients of pitching oscillation

Fig. 17 Damping coefficients of pitching oscillation

むしろストリップ法による計算結果に近づいている。ストリップ法の計算結果は前進速度には無関係であるが、本計算法による結果は前進速度の影響を良く現わしており、実験結果との比較においても $F_n=0.0, 0.1$ で実験結果にばらつきが見られるが、ほぼ良く一致しているものと思われる。

Fig. 16, 17 に示したのが縦揺方向の付加慣性モーメント係数および減衰係数の実験値と計算値との比較である。付加慣性モーメント係数の計算結果は低周波数領域を除いて実験値とはほぼ合っているといえる。前進速度の影響は $F_n=0.3$ で上下揺の付加質量係数の場合と同様に $F_n=0.0, 0.1$ とかなり傾向が異なっていることがわかる。ストリップ法との比較では、 $F_n=0.3$ の場合ストリップ法との傾向は近いが、 $F_n=0.0, 0.1$ の場合は低周波数領域でかなり傾向が異なっている。全般的にみると、本計算法による結果とストリップ法による計算結果とは傾向的に異なっていることもあるが、実験結果との

比較で見限りでは、どちらの計算法が適当であるか明らかでない。減衰係数については、計算値、実験値とも $F_n=0.3$ において $F_n=0.0, 0.1$ の場合と傾向が異なることが明らかに現われており、すべての F_n において計算値と実験値は良い一致を示す。ストリップ法による計算結果と比較すると傾向的にも異なっており、ストリップ法による計算結果の方がかなり大き目となっている。特に $F_n=0.0, 0.1$ の場合の低周波数領域においては、本計算法による計算値および実験値よりも、1 ケタオーダーが大きいところもある。

6 結 言

以上、前進速度を有する任意形状の物体が平水中で前後揺、上下揺および縦揺する場合の radiation 問題と向い波中の diffraction 問題について、物体表面に特異点を分布する特異点による解法を示し、半没楕円体に対して具体的な計算を実行し、実験結果およびストリップ法との比較検討を行ったが、得られた主な結論は次のとおりである。

(1) 本計算法による波浪強制力の計算結果は実験結果を良く説明する。ストリップ法との比較では前後揺方向の波浪強制力以外は結果に大きな差がないが、縦揺モーメントは前進速度が大きくなると波長の長いところでストリップ法による計算値は実験値と離れる傾向にあるので、本計算法による計算を実行した方が望ましい。

(2) diffraction 問題における変動圧力の本計算法による計算結果は波の減衰が考慮されているため、船尾部においても実験結果と良い一致を示すが、ストリップ法による計算結果は $F_n=0.0, 0.1$ において船体中央部、船尾部になるに従って実験結果と離れる傾向にある。

(3) ストリップ法で計算できなかった前後揺方向の付加質量係数、減衰係数が合理的に計算でき、計算結果は実験結果をよく説明する。前進速度による影響は $F_n=0.3$ の場合、計算値も実験値も低周波数領域で $F_n=0.0, 0.1$ の場合の結果に比べかなり傾向が異なる。このことは上下減衰係数、縦揺の付加慣性モーメント、減衰モーメント係数についてもいえる。

(4) 上下揺、縦揺の付加質量係数、減衰係数の計算結果は実験値と良い一致を示す。ストリップ法との比較では縦揺の減衰係数でストリップ法による計算結果は実験値とかなり異なっており、運動などを計算するためには本計算法による結果を用いた方が望ましい。

以上の結果から、本計算法による計算結果は実験結果を良く説明し、ストリップ法より合理的な計算法であるといえる。実用的な船型に応用する場合もストリップ法より精度を上げることができると思われるが、現在のところ計算時間がかかるという問題があるので、そのこと

を加味して使い方を考慮するか、あるいは、Green 関数などの性質をふまえた上で、簡便な計算法について検討する必要があると思われる。

最後にご指導ご鞭撻をいただいた東京大学工学部船舶工学科 元良誠三教授に厚くお礼申し上げるとともに、貴重な討論をいただいた九州大学応用力学研究所 田才福造教授、大楠丹教授、東京大学工学部 藤野正隆助教授に深く感謝致します。また、実験ならびに計算にご協力いただいた三井造船(株)昭島研究所 島田潔氏に謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 高木又男, 田才福造: 規則波中の応答理論および計算法, 耐航性に関するシンポジウム, 1969.
- 2) 田才福造: Short Crested Wave 中における Sway, yaw および roll の運動について, 西部第 42 号, 1971.
- 3) Salvesen, N., E. O. Tuck and O. Faltinsen: Ship motions and sea load, T. S. N. A. M. E., Vol. 78, 1970.
- 4) Takagi, M.: An Examination of the Ship Motion Theory as Compared with Experiments, Proceeding of International Symposium on Dynamic of Marine Vehicles and Structure in Waves, London, 1974.
- 5) Haskind, M. D.: Two papers on the hydrodynamical theory of heaving and pitching of a ship, S. N. A. M. E., Technical and Research Bulletin No. 1—12, 1953.
- 6) Hanaoka, T.: On the Velocity potential in Michell's system and the configuration of the wave-ridges due to a moving ship (non-uniform theory of wave resistance-4), 造船協会論文集, 第 93 号, 1953.
- 7) Hanaoka, T.: Non-uniform wave resistance (non-uniform theory of wave resistance-5), 造船協会論文集, 第 94 号, 1954.
- 8) 花岡達郎: 波浪中の船の運動の計算について, 造船協会論文集, 第 100 号, 1957.
- 9) Newman, J. N.: Application of slender body theory in ship hydrodynamics, Annual Review of F. M., 1970.
- 10) Ogilvie, T. F.: Workshop on slender body theory Part I, free surface effect, Dept. Nav. Arch. and M. E. Univ. Michigan, No. 163, 1974.
- 11) Ogilvie, T. F.: Fundamental assumption in ship motion theory, The Dynamic of Marine Vehicles and Structures in Wave, London, 1974.
- 12) 丸尾 孟, 佐々木敬之: 向い波の中の細長い物体に働く波圧について, 日本造船学会論文集, No. 136, 1974.
- 13) Faltinsen, O. M.: A numerical investigation of the Ogilvie-Tuck formulas for added mass and damping coefficients, J. S. R. Vol. 18, No.

2, 1974.

- 14) Inglis, R. B.: A Three Dimensional Ship Motion Theory—Comparison between Theoretical Predictions and Experimental Data of the Hydrodynamic Coefficients with Forward Speed, RINA, 1981.
- 15) Bard, R.: The representation of a given ship form by singularity distribution when the boundary condition of the free surface is linearized, J. S. R., Vol. 16, No. 1.
- 16) Kim, W. D.: On the harmonic oscillation of a ridged body on a free surface, J. F. M., Vol. 21, Part 3, 1965.
- 17) 山本義之: 周期運動を行う没水物体について, 造船協会論文集, 第 77 号, 1957.
- 18) Eggers, K.: Über das Wellenbild einen pulsieren den Störung in Translation, Schiff & Haften H. 11, 1957.
- 19) 小林正典, ほか: 船舶の耐航性に関する理論計算プログラム (その 1—理論計算式), 三井技報, 第 82 号, 1973.
- 20) 元良誠三: Gravity Dynamometer による波浪中抵抗試験および Surging について, 造船協会論文集, 第 120 号, 1954.

Appendix

Green 関数の計算方法

(13) 式で与えられる Green 関数の第 3 項 G^* はこのままの形で直接計算ができないので、数値計算が実行できる形に変形する。(13) 式の G^* は

$$G^* = -\frac{K_e}{\pi} \lim_{\mu' \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{ke^{k(z+z')}e^{ikp}dkd\theta}{\tau^2 \cos^2 \theta (k-k_1)(k-k_2)} \quad (A1)$$

と書き直すことができる。ここで k_1, k_2 は μ' の 2 乗以上のオーダーを省略し, $\mu=2\omega_e\mu'$ (μ : Rayleigh の摩擦修正係数) とすると

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} k_1 \\ k_2 \end{aligned} \right\} &= K_e \frac{1+2\tau \cos \theta \pm \sqrt{1+4\tau \cos \theta}}{2\tau^2 \cos^2 \theta} \\ &\quad - i \frac{\mu(\sqrt{1+4\tau \cos \theta} \pm 1)}{2V \cos \theta \sqrt{1+4\tau \cos \theta}} \end{aligned} \quad (A2)$$

である。(A1) 式の積分は

$$1+4\tau \cos \theta \geq 0 \quad (A3)$$

の範囲で k の積分に特異性があるので, θ と τ の範囲によって積分の方法を考えなければならない。すなわち

$$\begin{aligned} 0 < \tau < 1/4 \quad &\text{のとき} \quad -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 1/4 \leq \tau \quad &\text{のとき} \quad -\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 \end{aligned} \quad (A4)$$

$$\text{ここで} \quad \theta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{-1}{4\tau} \right)$$

の範囲で k の積分に特異性がある。したがって (A1) 式の積分は

i) $0 < \tau < 1/4$ のとき

$$G^* = -\frac{K_e}{\pi} \lim_{\mu' \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sec^2 \theta}{\tau^2 (k_1 - k_2)} (I_1 - I_2) d\theta \quad (A5)$$

ii) $1/4 \leq \tau$ のとき

$$\begin{aligned} G^* &= -\frac{K_e}{\pi} \lim_{\mu' \rightarrow 0} \int_{|\theta| < \theta_0} \frac{\sec^2 \theta}{\tau^2 (k_1 - k_2)} (I_1 - I_2) d\theta \\ &\quad - \frac{K_e}{\pi} \int_{\theta_0 < |\theta| < \pi} \int_0^{\infty} \frac{ke^{k(z+z')}e^{ikp}dkd\theta}{\tau^2 \cos^2 \theta (k-k_1')(k-k_2')} \\ &\equiv G_1^* + G_2^* \end{aligned} \quad (A6)$$

と書くことができる。ここで

$$I_i = \int_0^\infty \frac{ke^{k(z+z')}e^{ikp}}{k-k_i} dk, \quad (i=1, 2) \quad (A7)$$

$$\left. \begin{matrix} k_1' \\ k_2' \end{matrix} \right\} = K_e \frac{1+2\tau \cos \theta \pm i\sqrt{-(1+4\tau \cos \theta)}}{2\tau^2 \cos^2 \theta} \quad (A8)$$

(I) $0 < \tau < 1/4$ の場合 ($-\pi < \theta < \pi$)

(1) $y-y' > 0, x-x' > 0$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\alpha} D_{4s} d\theta \right]$$

(2) $y-y' > 0, x-x' < 0$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi}^{-3/2\pi+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} D_{3s} d\theta + \int_{-3/2\pi+\alpha}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right]$$

(3) $y-y' < 0, x-x' > 0$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi/2+\alpha}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi}^{-\pi/2+\alpha} D_{4s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} D_{4s} d\theta \right]$$

(4) $y-y' < 0, x-x' < 0$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi} D_{2s} d\theta + \int_{3/2\pi+\alpha}^{\pi} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi+\alpha} D_{4s} d\theta \right]$$

(II) $1/4 \leq \tau$ の場合 ($-\theta_0 < \theta < \theta_0$)

(1) $y-y' > 0, x-x' > 0, \theta_0 < \pi/2 + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right]$$

(2) $y-y' > 0, x-x' > 0, \theta_0 > \pi/2 + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\theta_0} D_{4s} d\theta \right]$$

(3) $y-y' > 0, x-x' < 0, -\theta_0 < -\frac{3}{2}\pi + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\pi}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-3/2\pi+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{-3/2\pi+\alpha}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right]$$

(4) $y-y' > 0, x-x' < 0, -\theta_0 > -\frac{3}{2}\pi + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right]$$

(5) $y-y' < 0, x-x' > 0, -\theta_0 < -\pi/2 + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi/2+\alpha}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{4s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2+\alpha} D_{4s} d\theta \right]$$

(6) $y-y' < 0, x-x' > 0, -\theta_0 > -\pi/2 + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi/2+\alpha}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{4s} d\theta \right]$$

(7) $y-y' < 0, x-x' < 0, \theta_0 < \frac{3}{2}\pi + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{4s} d\theta \right]$$

(8) $y-y' < 0, x-x' < 0, \theta_0 > \frac{3}{2}\pi + \alpha$ のとき

$$G_{1s}^* = -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{3/2\pi+\alpha}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi+\alpha} D_{4s} d\theta \right]$$

ここで $\alpha = \tan^{-1}(y-y'/x-x')$

であり、

$$\left. \begin{aligned} D_{1s} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} (K_{1s} - K_{2s}) \\ D_{2s} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} (K_{1s} \mp R_{1s} - K_{2s} \pm R_{2s}) \\ D_{3s} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} (K_{1s} + R_{1s} - K_{2s}) \\ D_{4s} &= \frac{1}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} (K_{1s} - K_{2s} \pm R_{2s}) \end{aligned} \right\} \quad (A11)$$

ここで

であり、 I_i の積分が $k=k_i$ において特異性をもつので、まず I_i の積分を (A3) 式の範囲で複素積分を行ない、さらに $G^* = G_c^* + iG_s^*$, $G_i^* = G_{ic}^* + G_{is}^*$ ($i=1, 2$) と書き、 θ, τ の条件に対して積分範囲を考慮すると G_c^* , G_s^* , G_{ic}^* , G_{is}^* は次に示す式によって計算できる。

$$\left. \begin{aligned} G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\alpha} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi}^{-3/2\pi+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} D_{3s} d\theta + \int_{-3/2\pi+\alpha}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi/2+\alpha}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi}^{-\pi/2+\alpha} D_{4s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi} D_{2s} d\theta + \int_{3/2\pi+\alpha}^{\pi} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi+\alpha} D_{4s} d\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (A9)$$

$$\left. \begin{aligned} G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\theta_0} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\pi}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-3/2\pi+\alpha} D_{3s} d\theta + \int_{-3/2\pi+\alpha}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{1s} d\theta + \int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{2s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi/2+\alpha}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{4s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2+\alpha} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{-\pi/2+\alpha}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{\theta_0} D_{4s} d\theta \right] \\ G_{1s}^* &= -\frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2+\alpha} D_{1s} d\theta + \int_{\pi/2+\alpha}^{\pi/2} D_{2s} d\theta + \int_{3/2\pi+\alpha}^{\theta_0} D_{3s} d\theta + \int_{-\theta_0}^{-\pi/2} D_{3s} d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi+\alpha} D_{4s} d\theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (A10)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{1s} &= \int_0^\infty \frac{A_{1s} \cos \{n(z+z')\} \mp \sin \{n(z+z')\}}{n^2 + A_{1s}^2} ne^{-n|p|} dn \\ R_{1s} &= \mp 2\pi A_{1s} e^{A_{1s}(z+z')} \frac{\sin(A_{1s}p)}{\cos(A_{1s}p)} \quad (i=1, 2) \\ A_{21} &= K_e \frac{1+2\tau \cos \pm \sqrt{1+4\tau \cos \theta}}{2\tau^2 \cos^2 \theta} \end{aligned} \right\} \quad (A12)$$

で表わされる。

次に $\pi > 1/4$ の場合の G_2^* について考える。 G_2^* は 2つの積分範囲をまとめて整理すると

$$G_2^* = -\frac{2K_e}{\pi} \int_{\theta_0}^\pi \int_0^\infty \frac{ke^{k(z+z')}e^{ik(x-x')\cos \theta}}{\tau^2 \cos^2 \theta (k-k_1')(k-k_2')} \times \cos \{k(y-y')\sin \theta\} dk d\theta \quad (A13)$$

と表わされる。(A13) 式は, $\theta=\theta_0$ で k_1', k_2' は実数となり特異点を有するので, 積分範囲を θ_0 の近傍の積分とそれ以外の積分とに分けて考えることとする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} G_2^* &= -\frac{2K_e}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\varepsilon} \int_0^\infty F(k, \theta) d\theta \\ &\quad - \frac{2K_e}{\pi} \int_{\theta_0+\varepsilon}^\pi \int_0^\infty F(k, \theta) dk d\theta \\ &\equiv G_{21}^* + G_{22}^* \\ F(k, \theta) &\equiv \frac{ke^{k(z+z')} e^{ik(x-x') \cos \theta}}{(k-k')} \cos \{k(y-y') \sin \theta\} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A14})$$

と書ける。(A14) 式の第2項は積分可能であるので, 第1項の G_{21}^* についての近似計算法を考える。 G_{21}^* は書き直すと

$$\left. \begin{aligned} G_{21}^* &= -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} \int_0^\infty g(k, \theta) \\ &\quad \times \left(\frac{1}{k-k_1'} - \frac{1}{k-k_2'} \right) dk \end{aligned} \right\}$$

$$g(k, \theta) = ke^{k(z+z')} e^{ik(x-x') \cos \theta} \cdot \cos \{k(y-y') \sin \theta\} \quad (\text{A15})$$

となる。 $g(k, \theta)$ は θ_0 の近傍で激しく変化しないので

$$g(k, \theta) \doteq g(k, \theta_0) \quad (\text{A16})$$

とすると (A15) 式は

$$G_{21}^* = -\frac{2}{\pi} \int_{\theta_0}^{\theta_0+\varepsilon} \frac{d\theta}{\sqrt{1+4\tau \cos \theta}} \times \left(\int_{\underset{k_1}{\curvearrowright}} \frac{g(k, \theta_0)}{k-k_1} dk - \int_{\underset{k_2}{\curvearrowright}} \frac{g(k, \theta_0)}{k-k_2} dk \right) \quad (\text{A17})$$

となり, $\theta=\theta_0$ の近傍で

$$k_0 \equiv k_1)_{\theta=\theta_0} = k_2)_{\theta=\theta_0} = Ke^{\frac{1+2\tau \cos \theta_0}{2\tau^2 \cos^2 \theta_0}} \quad (\text{A18})$$

となるから, (A17) の主値積分の項は消えて, k_0 における留数のみ残るので

$$G_{21}^* = -4 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\tau \sin \theta_0}} g(k_0, \theta_0) \quad (\text{A19})$$

で計算できる。