(昭和 56 年 11 月 日本造船学会秋季講演会において講演)

薄肉構造の離散化極限解析 (その 1)

— 曲面剛体要素モデルの誘導とその応用 —

正員 都 井 裕* 正員 上 田 真 稔**
 山 本 講 治*** 正員 川 井 忠 彦****

Discrete Limit Analysis of Thin-Walled Structures (Part 1)

— Derivation of curved rigid element models and
their applications —

by Yutaka Toi, *Member* Masatoshi Ueda, *Member*
 Kouji Yamamoto Tadahiko Kawai, *Member*

Summary

The Rigid Bodies-Spring Models (as abbreviated RBSP) proposed by Kawai in order to generalize the well-known method of plastic analysis from a viewpoint of the discrete analysis have been applied to various types of nonlinear structural problems and their validities have been sufficiently demonstrated. It is a great contrast to the conventional finite element method that these discrete elements were developed for the main purpose of evaluating the ultimate strength of structures, so that the structural analysis by using the RBSP may be called the Discrete Limit Analysis.

The physical concepts of the RBSP were definitely explained by Kawai in his literatures, but the algorithms for the application of the RBSP to arbitrary thin-walled structures were not necessarily obvious. Recently one of authors Toi has carried out the formulation of a series of rigid element models for shell structures and established the analytical procedure for these structures including arbitrary shells.

In this paper the general formulation of curved rigid element models is carried out for the discrete limit analysis of shell structures whose middle surfaces are defined as the coordinate surfaces of the orthogonal curvilinear coordinate systems, following the physical concepts of the RBSP for the plate bending and plane strain problems. This general formulation is applied to circular cylindrical shells and some numerical results are shown. The present analytical procedure for circular cylindrical shells may be considered as the extension of the generalized yield line method developed by Sawczuk and Janas from the standpoint of the discrete analysis.

1 序

塑性解析法を離散化解析の立場から一般化することを目的として川井により提案された剛体・ばねモデル¹⁾ (Rigid Bodies-Spring Models) は、すでに種々の構造非線形問題の解析に応用され、その有効性が実証されている²⁾。この離散化モデルは構造物の極限強度の推定を主目標としている点が従来の有限要素モデルと異なっ

おり、この点を強調するために、剛体・ばねモデルによる構造解析を離散化極限解析(Discrete Limit Analysis)と呼ぶことにする。

剛体・ばねモデルの物理的概念は文献 1) において明らかにされているが、これを任意の薄肉構造物に適用するためのアルゴリズムは必ずしも自明でない。最近、著者の一人都井はシェル構造を対象として一連の剛体要素モデルの定式化を行い^{3)~7)}、回転対称シェルから任意形状シェルに至るまでの解析手順を確立した。

本報告では、平板曲げ問題および平面問題における剛体・ばねモデルの物理的概念に従い、円筒殻、球殻、トロイダルシェルなど、直交曲線座標系における座標曲面

* 東京大学工学部

** 竹中工務店

*** 東急建設

**** 東京大学生産技術研究所

として定義される薄肉シェル構造の離散化極限解析用曲面剛体要素モデルを一般的に誘導する。さらに、この一般論を円筒殻に適用し、2, 3の標準的問題を解析して得られた結果を示す。円筒殻に関する本手法は、Sawczuk, Janas などによる塑性解析の手法 (generalized yield line method)^{8),9)} を離散化解析の観点から拡張した方法と考えてよいであろう。

2 直交曲線座標系における剛体変位関数

曲面剛体要素モデルの一般論を展開するための準備として、直交曲線座標系における剛体変位関数の一般形を誘導しておく。

直角座標系 (x, y, z) における微小ひずみを零と置くことにより、次式を得る (Fig. 1 を参照)。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u / \partial x = 0 \\ \epsilon_y &= \partial v / \partial y = 0 \\ \epsilon_z &= \partial w / \partial z = 0 \\ \gamma_{xy} &= \partial u / \partial y + \partial v / \partial x = 0 \\ \gamma_{yz} &= \partial v / \partial z + \partial w / \partial y = 0 \\ \gamma_{zx} &= \partial w / \partial x + \partial u / \partial z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

(1) 式を積分することにより、直角座標系 (x, y, z) における剛体変位関数

$$\left. \begin{aligned} u &= a_2 z - a_3 y + a_4 \\ v &= a_3 x - a_1 z + a_5 \\ w &= a_1 y - a_2 x + a_6 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

を得る。ここに、 a_1, a_2, a_3 は x, y, z 軸まわりの回転変位、 a_4, a_5, a_6 は x, y, z 軸方向の並進変位である。

直角座標系 (x, y, z) と

$$x = x(x', y', z'), \quad y = y(x', y', z'), \quad z = z(x', y', z') \quad (3)$$

なる関係にある任意の直交曲線座標系 (x', y', z') を考える。(2) 式にベクトル成分の変換公式を適用することにより、直交曲線座標系 (x', y', z') における剛体変位関数

$$\left. \begin{aligned} u' &= (1/g_1) \{ (\partial x / \partial x') u + (\partial y / \partial x') v + (\partial z / \partial x') w \} \\ v' &= (1/g_2) \{ (\partial x / \partial y') u + (\partial y / \partial y') v + (\partial z / \partial y') w \} \\ w' &= (1/g_3) \{ (\partial x / \partial z') u + (\partial y / \partial z') v + (\partial z / \partial z') w \} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

を得る。ここに、 g_1, g_2, g_3 は直交曲線座標系 (x', y', z') の第1基本量であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \{ (\partial x / \partial x')^2 + (\partial y / \partial x')^2 + (\partial z / \partial x')^2 \}^{1/2} \\ g_2 &= \{ (\partial x / \partial y')^2 + (\partial y / \partial y')^2 + (\partial z / \partial y')^2 \}^{1/2} \\ g_3 &= \{ (\partial x / \partial z')^2 + (\partial y / \partial z')^2 + (\partial z / \partial z')^2 \}^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

(2) 式を (4) 式に代入することにより

$$\left. \begin{aligned} u'(x', y', z') &= h_{1j}(x', y', z') a_j \\ v'(x', y', z') &= h_{2j}(x', y', z') a_j \\ w'(x', y', z') &= h_{3j}(x', y', z') a_j \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Fig. 1 Coordinate systems and displacement notations

を得る (右辺は総和規約に従い、 $j=1, 2, \dots, 6$ である。以下同様)。ここに、

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= (1/g_1) \{ (\partial z / \partial x') y - (\partial y / \partial x') z \} \\ h_{12} &= (1/g_1) \{ (\partial x / \partial x') z - (\partial z / \partial x') x \} \\ h_{13} &= (1/g_1) \{ (\partial y / \partial x') x - (\partial x / \partial x') y \} \\ h_{14} &= (1/g_1) (\partial x / \partial x') \\ h_{15} &= (1/g_1) (\partial y / \partial x') \\ h_{16} &= (1/g_1) (\partial z / \partial x') \\ h_{21} &= (1/g_2) \{ (\partial z / \partial y') y - (\partial y / \partial y') z \} \\ h_{22} &= (1/g_2) \{ (\partial x / \partial y') z - (\partial z / \partial y') x \} \\ h_{23} &= (1/g_2) \{ (\partial y / \partial y') x - (\partial x / \partial y') y \} \\ h_{24} &= (1/g_2) (\partial x / \partial y') \\ h_{25} &= (1/g_2) (\partial y / \partial y') \\ h_{26} &= (1/g_2) (\partial z / \partial y') \\ h_{31} &= (1/g_3) \{ (\partial z / \partial z') y - (\partial y / \partial z') z \} \\ h_{32} &= (1/g_3) \{ (\partial x / \partial z') z - (\partial z / \partial z') x \} \\ h_{33} &= (1/g_3) \{ (\partial y / \partial z') x - (\partial x / \partial z') y \} \\ h_{34} &= (1/g_3) (\partial x / \partial z') \\ h_{35} &= (1/g_3) (\partial y / \partial z') \\ h_{36} &= (1/g_3) (\partial z / \partial z') \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

である。(6), (7) 式により、未知係数 $a_1, a_2, \dots, a_6$ を用いて表現された、直交曲線座標系 (x', y', z') における剛体変位関数の一般形が与えられた。

次節では、直交曲線座標系 (x', y', z') における一座標曲面

$$z' = \text{const} \quad (8)$$

により中央面が定義される薄肉シェル構造を考えるが、この構造に対する剛体変位関数は、(6) 式より

$$\left. \begin{aligned} u'(x', y') &= h_{1j}(x', y', c) a_j \\ v'(x', y') &= h_{2j}(x', y', c) a_j \\ w'(x', y') &= h_{3j}(x', y', c) a_j \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

と表わされる。この場合、 u', v' が面内変位、 w' が面外変位を意味することになる。

3 曲面剛体要素モデルの一般論

(8) 式により定義されるシェル曲面を、形状近似を含めずに任意の剛体曲面三角形要素メッシュに分割し、隣接する2つの剛体三角形要素はその要素境界において、

Fig. 2 Typical adjacent rigid elements

互いの相対運動に抵抗するばね系により連結されているものとする。代表的な隣接 2 要素を Fig. 2 に示す。

3.1 要素境界の剛性特性

(i) 要素の剛体変位関数

Fig. 2 の 2 要素, A, B の剛体変位関数はいずれも (9) 式により表現される。各変位成分に下添字 A, B を付し, 未知係数をそれぞれ a_j^A, a_j^B として両者を区別する。

(ii) 相対変位

2 要素 A, B 間の相対変位は, 一般には次式の 6 成分により定義される。

$$\left. \begin{aligned} \phi_s &= l_s(a_1^B - a_1^A) + m_s(a_2^B - a_2^A) + n_s(a_3^B - a_3^A) \\ \phi_t &= l_t(a_1^B - a_1^A) + m_t(a_2^B - a_2^A) + n_t(a_3^B - a_3^A) \\ \phi_n &= l_n(a_1^B - a_1^A) + m_n(a_2^B - a_2^A) + n_n(a_3^B - a_3^A) \\ \delta_s &= \{l(u_B')_M + m(v_B')_M\} - \{l(u_A')_M + m(v_A')_M\} \\ &= \{lh_{1j}(x_M', y_M', c) \\ &\quad + mh_{2j}(x_M', y_M', c)\}(a_j^B - a_j^A) \\ \delta_t &= \{-m(u_B')_M + l(v_B')_M\} \\ &\quad - \{-m(u_A')_M + l(v_A')_M\} \\ &= \{-mh_{1j}(x_M', y_M', c) \\ &\quad + lh_{2j}(x_M', y_M', c)\}(a_j^B - a_j^A) \\ \delta_n &= (w_B')_M - (w_A')_M = h_{3j}(x_M', y_M', c)(a_j^B - a_j^A) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} l_s &= \cos(s, x), \quad m_s = \cos(s, y), \quad n_s = \cos(s, z) \\ l_t &= \cos(t, x), \quad m_t = \cos(t, y), \quad n_t = \cos(t, z) \\ l_n &= \cos(n, x), \quad m_n = \cos(n, y), \quad n_n = \cos(n, z) \\ l &= \cos(s, x'), \quad m = \cos(s, y') \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(10) 式における (ϕ_s, ϕ_t, ϕ_n) は (s, t, n) 軸まわりの回転相対変位であり, $(\delta_s, \delta_t, \delta_n)$ は境界辺 13 の中点 M における (s, t, n) 軸方向の並進相対変位である。なお, 直角座標系 (s, t, n) の成分 s, t は点 M におけるシェル曲面の接線座標, n は法線座標であり, s は境界辺 13 方向とする。 (ϕ_s, ϕ_t, ϕ_n) は曲げ挙動に関連しており, それぞれ曲げ変形, ねじり変形, 面外せん断変形を表現している。また, $(\phi_n, \delta_s, \delta_t)$ は面内変形に関連しており, それぞれ面内回転変形, 面内せん断変形, 面内垂直変形を表わす。

相対変位と剛体変位関数の未知係数との関係は, (10) 式より

$$\left. \begin{aligned} \{d\} &= [B]\{a\} \\ \text{ここに} \quad \{d\}^t &= [\phi_s \phi_t \phi_n \delta_s \delta_t \delta_n] \\ \{a\}^t &= [a_1^A a_2^A \dots a_6^A a_1^B a_2^B \dots a_6^B] \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

とマトリックス表示できる。

(iii) 要素自由度

要素自由度の選択は唯一ではない。最も一般的には, (9) 式の剛体変位関数における未知係数 $a_j (j=1, 2, \dots, 6)$ をそのまま要素自由度とすればよい。この場合, 各剛体要素は独立に 6 自由度を有し, (10) 式の要素間相対変位の全 6 成分が許されることになる。

ここでは総自由度数を極力減らすために, 節点 (三角形頂点) に横たわみの自由度 (w_i'), 要素重心点に面内変位の自由度 (u_i', v_i', θ_i') を設定し, これらの要素自由度と未知係数 a_j の関係を定めよう。

Fig. 2 の要素 A における要素自由度と未知係数 a_j^A の関係は次式により表わされる。

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= h_{3j}(x_1', y_1', c) a_j^A \\ w_2' &= h_{3j}(x_2', y_2', c) a_j^A \\ w_3' &= h_{3j}(x_3', y_3', c) a_j^A \\ u_5' &= h_{1j}(x_5', y_5', c) a_j^A \\ v_5' &= h_{2j}(x_5', y_5', c) a_j^A \\ \theta_5' &= (1/2 g_1 g_2) \{ \partial(g_2 v') / \partial x' - \partial(g_1 u') / \partial y' \} |_{(x_5', y_5', c)} \\ &= (1/2 g_1 g_2) \{ \partial(g_2 h_{2j}) / \partial x' \\ &\quad - \partial(g_1 h_{1j}) / \partial y' \} |_{(x_5', y_5', c)} \cdot a_j^A \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

同様に, 要素 B における要素自由度と未知係数 a_j^B の関係が

$$\left. \begin{aligned} w_3' &= h_{3j}(x_3', y_3', c) a_j^B \\ w_4' &= h_{3j}(x_4', y_4', c) a_j^B \\ w_1' &= h_{3j}(x_1', y_1', c) a_j^B \\ u_6' &= h_{1j}(x_6', y_6', c) a_j^B \\ v_6' &= h_{2j}(x_6', y_6', c) a_j^B \\ \theta_6' &= (1/2 g_1 g_2) \{ \partial(g_2 h_{2j}) / \partial x' \\ &\quad - \partial(g_1 h_{1j}) / \partial y' \} |_{(x_6', y_6', c)} \cdot a_j^B \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

と定まる。(13), (14) 式を a_j^A, a_j^B について解くことにより, 剛体変位関数の未知係数と要素自由度の関係としてマトリックス表示による次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{a\} &= [A]\{u\} \\ \text{ここに} \quad \{u\}^t &= [w_1' w_2' w_3' w_4' u_5' v_5' \theta_5' u_6' v_6' \theta_6'] \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

要素自由度を上述のように設定した場合, 要素間相対変位として必要な成分は, (10) 式における $\phi_s, \phi_n, \delta_s, \delta_t$ のみであることは明らかであろう。すなわち, 節点に横たわみの自由度を設けているため, 横たわみは節点において連続となり, ねじり変形と面外せん断変形は無視される。厚肉シェル構造に対しては, 要素自由度として a_j

を用いる必要がある。

(iv) 合 応 力

剛体要素 A, B は, (10) 式の相対変位成分 ($\phi_s, \phi_t, \phi_n, \delta_s, \delta_t, \delta_n$) に抵抗するばね系 ($k_{rs}, k_{rt}, k_{rn}, k_{ps}, k_{pt}, k_{pn}$) により結合されているものとする。変形後にそれぞれのばねに生ずる力は, マトリックス形で

$$\left. \begin{aligned} \{s\} &= [D]\{d\} \\ \{s\}^t &= [M_s M_t M_n N_s N_t N_n] \\ [D] &= [k_{rs} k_{rt} k_{rn} k_{ps} k_{pt} k_{pn}] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

と表現される ($[\dots]$ は対角マトリックスを意味する)。(ii) で述べた相対変位成分の物理的意味との対応より, (M_s, M_t, N_n) は曲げモーメント, ねじりモーメント, 面外せん断力であり, (M_n, N_s, N_t) は面内モーメント, 面内せん断力, 面内垂直力である。通常用いられる単位長さ当たりの断面力は, (16) 式の各成分を要素境界 13 の長さで除したものである。これを

$$\{\bar{s}\}^t = [\bar{M}_s \bar{M}_t \bar{M}_n \bar{N}_s \bar{N}_t \bar{N}_n] \quad (17)$$

と記す。なお, 要素自由度を (13), (14) 式のように設定した場合は, M_s, M_n, N_s, N_t のみが必要となる。

(v) 剛性マトリックス

剛体要素間を結合するばね系に貯えられるひずみエネルギーは, (12), (15), (16) 式を用いると

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \{d\}^t \{s\} \\ &= \frac{1}{2} \{d\}^t [D] \{d\} \\ &= \frac{1}{2} \{a\}^t [B]^t [D] [B] \{a\} \end{aligned} \quad (18a)$$

$$= \frac{1}{2} \{u\}^t [A]^t [B]^t [D] [B] [A] \{u\} \quad (18b)$$

と表わされる。(18) 式に Castigliano の定理を適用することにより, 次の剛性関係が定まる。まず, 1 剛体要素に独立に 6 自由度を設定する場合は, (18a) 式より

$$\left. \begin{aligned} \{R\} &= \{\partial V / \partial a\} = [k] \{a\} \\ \{R\}^t &= [L_s M_s N_s X_s Y_s Z_s L_t M_t N_t X_t Y_t Z_t] \\ [k] &= [B]^t [D] [B] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

であり, 剛性マトリックス $[k]$ の大きさは (12×12) である。また (13), (14) 式のように要素自由度を設定した場合は, (18b) 式より

$$\left. \begin{aligned} \{R\} &= \{\partial V / \partial u\} = [k] \{u\} \\ \{R\}^t &= [F_1' F_2' F_3' F_4' X_5' Y_5' M_5' X_6' Y_6' M_6'] \\ [k] &= [A]^t [B]^t [D] [B] [A] \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

となり, この場合の $[k]$ は (10×10) である。面内回転の自由度 θ_s', θ_t' を零とすれば, さらに (8×8) と減少する。

3.2 境界要素

任意の境界条件を容易に導入するためには, 構造の境界上に剛体線要素を設けると都合がよい。この境界剛体線要素と内部剛体三角形要素間の剛性特性は, 1 剛体要素に独立に 6 自由度を設ける場合は, Fig. 2 における節点 2 あるいは 4 が点 M に一致しているものと考えれば, 前項の定式化を何ら修正することなく得られる。しかし, (13), (14) 式のように要素自由度を設定したい場合は, 若干の修正が必要となる。すなわち, Fig. 2 の要素 A を線要素とする場合は, 要素自由度として w_2' の代わりに点 M における s 軸まわりの回転変位 θ_2' を採用し, (13) 式の第 2 式を

$$\theta_2' = l_s a_1^A + m_s a_2^A + n_s a_3^A \quad (21)$$

としなければならない。ここに, (l_s, m_s, n_s) は (11) 式に与えられている。また, 要素 B を線要素とする場合は, 要素自由度 w_4' の代わりに点 M における s 軸まわりの回転変位 θ_4' を採用し, (14) 式の第 2 式を

$$\theta_4' = l_s a_1^B + m_s a_2^B + n_s a_3^B \quad (22)$$

とすればよい。

3.3 要素分割線

要素分割線 (要素境界線) は, シェル曲面を定義する直交曲線座標系の種類によらず同一の数学的意味を有する測地線により定義するのが合理的であるが, 簡単には直角座標平面に写像された (x', y') 平面における直線, すなわち, Fig. 2 における境界線 13 を例にとれば

$$\left. \begin{aligned} x'(\xi) &= (1-\xi)x_1' + \xi x_3' \\ y'(\xi) &= (1-\xi)y_1' + \xi y_3' \\ 0 &\leq \xi \leq 1 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

を採用してもよいであろう。円筒シェル曲面のような可展面においては両者は一致する。いずれにせよ要素境界線が数式表示されて初めて, 点 M の座標値, 接線 (s, t) 法線 n などが決定される。中点 M, 要素重心点 5, 6 は必ずしも厳密なものである必要はない。

3.4 ばね定数

弾性変形時のばね定数は, すでに平板曲げ要素と平面要素¹⁾において用いられるのと同様の方法で, すなわち, 要素境界線における曲率とひずみを (10) 式の相対変位成分を用いて差分表示し, 通常の応力・ひずみ関係式に代入することにより, 次式のように決定される。

$$\left. \begin{aligned} k_{rs} &= 2DI_{13}/(l_1 + l_2) \\ k_{rt} &= 2D(1-\nu)I_{13}/(l_1 + l_2) \\ k_{rn} &= k_{pt}I_{13}^2/12 \\ k_{ps} &= EI_{13}h/(1+\nu)(d_1 + d_2) \\ k_{pt} &= EI_{13}h/(1-\nu^2)(d_1 + d_2) \\ k_{pn} &= \alpha EI_{13}h/(1+\nu)(l_1 + l_2) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここに, l_{13} は Fig. 2 における境界線 13 の長さ, l_1, l_2, d_1, d_2 はそれぞれ点 2, 4, 5, 6 から境界線 13 に降ろし

た垂線の長さ、 D は板の曲げ剛性、 h は肉厚、 α は有効せん断係数である。

塑性変形時の $[D]$ マトリックスは、適当に仮定された降伏関数

$$f(\bar{M}_s/\bar{M}_{s0}, \bar{M}_t/\bar{M}_{t0}, \bar{M}_n/\bar{M}_{n0}, \bar{N}_s/\bar{N}_{s0}, \bar{N}_t/\bar{N}_{t0}, \bar{N}_n/\bar{N}_{n0})=0 \quad (25)$$

を塑性ポテンシャルとして塑性流れ則により定められる。ここに、下添字 0 は各応力成分の全断面塑性値を意味する。塑性状態における $[D]$ マトリックスは一般に非対角項を含むことに注意されたい。

4 円筒殻への応用

前節の一般論を円筒殻に適用する場合は、直交曲線座標系 (x', y', z') として円筒座標系を用いればよい。すなわち、(3) 式は、Fig. 3 を参照して

$$x = z' \cos y', \quad y = z' \sin y', \quad z = x' \quad (26)$$

となる。(26) 式を (5) 式に代入すると第 1 基本量として

$$g_1=1, \quad g_2=z', \quad g_3=1 \quad (27)$$

を得る。さらに、(26)、(27) 式を (7) 式に代入すると、以下の諸式を得る。

Fig. 3 Circular cylindrical coordinate system

Fig. 4 Circular cylindrical shell roof fixed on four edges and subjected to external radial pressure

Table 1 $[B_2]$ matrix in Eq. (30)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
ϕ_s	ℓ_s	m_s	n_s	0	0	0
δ_s	$\ell R s_M - m x_M c_M$	$-\ell R c_M - m x_M c_M$	$m R$	$-m s_M$	$m c_M$	ℓ
δ_t	$-m R s_M - \ell x_M c_M$	$m R c_M - \ell x_M c_M$	ℓR	$-\ell s_M$	ℓc_M	$-m$

Where

$$s_M = \sin \theta_M$$

$$c_M = \cos \theta_M$$

Table 2 $[A_1]$ matrix in Eq. (31)

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8
A_{a1}	$-s_s s_{23}$	$-s_s s_{31}$	$-s_s s_{12}$	0	0	0	0	0
A_{a2}	$c_s s_{23}$	$c_s s_{31}$	$c_s s_{12}$	0	0	0	0	0
A_{a3}	$\mathcal{Q}_1/R$	$\mathcal{Q}_2/R$	$\mathcal{Q}_3/R$	0	0	$\mathcal{A}/R$	0	0
A_{a4}	$\mathcal{A}_2 s_3 - \mathcal{A}_3 s_2$	$\mathcal{A}_3 s_1 - \mathcal{A}_1 s_3$	$\mathcal{A}_1 s_2 - \mathcal{A}_2 s_1$	0	0	0	0	0
A_{a5}	$-(\mathcal{A}_2 c_3 - \mathcal{A}_3 c_2)$	$-(\mathcal{A}_3 c_1 - \mathcal{A}_1 c_3)$	$-(\mathcal{A}_1 c_2 - \mathcal{A}_2 c_1)$	0	0	0	0	0
A_{a6}	$R s_{23}$	$R s_{31}$	$R s_{12}$	0	$\mathcal{A}$	0	0	0

Where

$$\begin{aligned} s_i &= \sin \theta_i & \mathcal{A}_1 &= x_1 c_{15} & \mathcal{Q}_1 &= c_s (\mathcal{A}_2 c_3 - \mathcal{A}_3 c_2) \\ c_i &= \cos \theta_i & \mathcal{A}_2 &= x_2 c_{25} & & + s_s (\mathcal{A}_2 s_3 - \mathcal{A}_3 s_2) \\ s_{ij} &= \sin(\theta_i - \theta_j) & \mathcal{A}_3 &= x_3 c_{35} & \mathcal{Q}_2 &= c_s (\mathcal{A}_3 c_1 - \mathcal{A}_1 c_3) \\ c_{ij} &= \cos(\theta_i - \theta_j) & & & & + s_s (\mathcal{A}_3 s_1 - \mathcal{A}_1 s_3) \\ & & & & \mathcal{Q}_3 &= c_s (\mathcal{A}_1 c_2 - \mathcal{A}_2 c_1) \\ & & & & & + s_s (\mathcal{A}_1 s_2 - \mathcal{A}_2 s_1) \end{aligned} \quad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_3 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 \end{vmatrix}$$

Fig. 5 Elastic analysis of a circular cylindrical shell roof fixed on four edges and subjected to external radial pressure

$$\left. \begin{aligned} h_{11} &= z' \sin y' & h_{12} &= -z' \cos y' \\ h_{13} &= 0 & h_{14} &= 0 \\ h_{15} &= 0 & h_{16} &= 1 \\ h_{21} &= -x' \cos y' & h_{22} &= -x' \sin y' \\ h_{23} &= z' & h_{24} &= -\sin y' \\ h_{25} &= \cos y' & h_{26} &= 0 \\ h_{31} &= -x' \sin y' & h_{32} &= x' \cos y' \\ h_{33} &= 0 & h_{34} &= \cos y' \\ h_{35} &= \sin y' & h_{36} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

また、シェル中央面は

$$z' = \text{const} \equiv R \quad (29)$$

により定義されるものとする。

(27), (28), (29) 式を (10) 式以下の諸式に代入することにより、解析に必要な関係式をすべて得ることができ。以下では、 (x', y', z') の代わりに、円筒座標において通常用いられる記号 (x, θ, r) を用い、節点に横たわみの自由度 (w_i) 、要素重心点に面内変位の自由度 (u_i, v_i, θ_i) を設定した場合について、諸マトリックスの具体形を示しておく（以下、ダッシュは省略する）。

まず、要素間相対変位と未知係数 a_j^A, a_j^B との関係を表わす (12) 式を

$$\left. \begin{aligned} \{d\} &= [B] \{a\} = [-B_2; B_2] \left\{ \begin{aligned} a^A \\ a^B \end{aligned} \right\} \\ \text{ここに} \quad \{d\}^t &= [\phi_s \ \delta_s \ \delta_t] \\ \{a^A\}^t &= [a_1^A \ a_2^A \ a_3^A \ a_4^A \ a_5^A \ a_6^A] \\ \{a^B\}^t &= [a_1^B \ a_2^B \ a_3^B \ a_4^B \ a_5^B \ a_6^B] \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

と表示し、 $[B_2]$ マトリックスの具体形を Table 1 に示

す。

また、要素自由度と未知係数 a_j^A, a_j^B の関係を表わす (15) 式を

$$\left. \begin{aligned} \{a\} &= \left\{ \begin{aligned} a^A \\ a^B \end{aligned} \right\} = [A] \{u\} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \{u\} \\ \text{ここに} \quad \{u\}^t &= [w_1 w_2 w_3 w_4 u_5 u_6 v_6] \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

と表示し、 $[A_1]$ マトリックスの具体形を Table 2 に示す。 $[A_2]$ マトリックスは $[A_1]$ マトリックスの添字を cyclic に変換することにより得られるので省略する。なお、 $[A]$ マトリックスを導く際、面内回転 θ_i は零と仮定し、総自由度数を最少限に押えている。

5 数値解析例

3 節で誘導した要素境界の剛性特性を通常の直接剛性法の手順に従い、全要素境界について加え合わせるこ

Fig. 6 Axisymmetrically loaded circular cylindrical shell

(a) load-deflection curve

(b) development of yield lines

(c) collapse load

Fig. 7 Collapse load analysis of a clamped circular cylindrical shell under uniform internal pressure

により、全体構造系の剛性方程式が構成され、有限要素法における荷重増分法の手順により離散化極限解析が可能となる。本節では、3節、4節の定式化に従って行った円筒殻に対する解析結果を示す。ただし、境界条件の導入に関しては3.2の考え方によらず、境界線に関し対称的な仮想要素を想定し、仮想要素の自由度に適当な拘束条件を課す方法により処理している。数学的には、3.2の方法と全く等価である。

(a) load-deflection curve

(b) development of yield lines

(c) collapse load

Fig. 8 Collapse load analysis of a simply supported circular cylindrical shell loaded by a ring of pressure

5.1 円筒殻の弾性解析

Fig. 4 に示す、一様分布外圧を受ける周辺固定円筒シェル屋根の弾性解析を行った。得られた結果を SAP による有限要素解（4 節点 iso-parametric 要素を使用）と比較して、Fig. 5 に示す。本解析結果は比較的良好であるが、本離散化モデルにおいては要素境界辺方向のひずみが無視されているため、一般には線形解の収束性は

Fig. 9 Circular cylindrical shell roof simply supported on four edges and subjected to external radial pressure

保証されない。

5.2 円筒殻の塑性解析

次式の降伏関数を仮定して、円筒殻の塑性解析を行った。

$$\left. \begin{aligned} \bar{M}_s / \bar{M}_{s0} + (\bar{N}_s / \bar{N}_{s0})^2 + (\bar{N}_t / \bar{N}_{t0})^2 - 1 &= 0 \\ \text{ここに} \quad \bar{M}_{s0} &= \sigma_0 h^2 / 4, \quad \bar{N}_{s0} = \sigma_0 h / \sqrt{3}, \quad \bar{N}_{t0} = \sigma_0 h \\ &(\sigma_0 \text{ は単軸状態における降伏応力}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

(i) 軸対称問題

一様な内圧を受ける両端固定円筒殻とスパン中央部に線荷重を受ける両端支持円筒殻の塑性解析を行い、結果を円錐台要素による解析結果¹⁰⁾および理論解¹¹⁾と比較した。要素分割例を Fig. 6, 解析結果を Fig. 7, Fig. 8 に示す。これらの3種類の解析においては、仮定されている降伏曲面に若干の相違があるため、最高荷重値は必ずしも一致していないが、本解析結果の妥当性は十分に確認される。

(ii) 非軸対称問題

一様分布外圧を受ける周辺支持円筒シェル屋根の塑性解析を行った。寸法、材料定数、要素分割を Fig. 9, 解析結果を Fig. 10 に示す。本解析は鋼製シェルを想定して行ったが、Fig. 10 (b) に示されている主に曲げモーメントによる降伏線は、文献 8), 12) などにおいて仮定されているコンクリート製シェルの崩壊パターンに酷似しており、本解析結果の妥当性が示唆される。

6 結 語

本研究では、任意の直交曲線座標系により定義される薄肉シェル構造の離散化極限解析に用いる曲面剛体要素モデルの一般的な誘導を行った。代表的な適用対象は円筒殻、球殻、トロイダルシェルなどである。本報告ではこの一般論を円筒殻に適用し、2, 3 の数値解析例を示した。

本解析法は、従来の塑性解析法と比較した場合は汎用

(a) load-deflection curve

(b) development of yield lines

Fig. 10 Collapse load analysis of a circular cylindrical shell roof simply supported on four edges and subjected to external radial pressure

性の点で、通常の有限要素法と比較した場合は計算時間の点で有利である。特にシェル構造の塑性解析は一般に極めて複雑であり、本解析法のようなコンピュータの利用を指向した組織的かつ簡便な方法の果たす役割は大きいと思われる。本解析法に従い、より信頼度の高い極限解析解を得るためには、モデル実験結果あるいは下界近似解を参照した要素分割パターンの修正過程を含む対話型の解析¹³⁾が有効であろう。

なお、円筒殻のみを対象とした定式化は文献 14) を、他の数値解析例は文献 15) を参照されたい。

参 考 文 献

- 1) 川井：New Element Models in Discrete Structural Analysis, 日本造船学会論文集, 第141号 (1977), 174.
- 2) 川井編：生研セミナーテキスト (コース 57：物理モデルによる連続体力学諸問題の解析), (1980).
- 3) 都井：東大学位論文 (簡易化された要素モデルによる板殻構造解析に関する研究), (1978).
- 4) 都井：骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析, 日本造船学会論文集, 第147号 (1980), 329.
- 5) 都井, 石鍋, 川井：回転対称シェルの弾塑性飛移

- り挙動の一離散化解析, 生産研究, 第33巻4号 (1981), 14.
- 6) 都井: シェル構造の離散化極限解析 (その1) — 曲面剛体要素モデルの誘導 —, 生産研究, 第33巻5号 (1981), 16.
- 7) 都井: シェル構造の離散化極限解析 (その2) — 平板剛体要素モデルの誘導 —, 生産研究, 第33巻7号 (1981), 1.
- 8) W. Olszak and A. Sawczuk: Inelastic Behavior in Shells, Noordhoff (1967).
- 9) M. Janas: Limit Analysis of Non-Symmetric Plastic Shells by a Generalized Yield Line Method, Non-Classical Shell Problem (ed. by W. Olszak and A. Sawczuk), North-Holland, (1964).
- 10) 都井, 川井: 円筒殻の解析における新しい離散化モデル, 日本造船学会論文集, 第144号 (1978), 280.
- 11) P. G. Hodge Jr.: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill (1959).
- 12) M. A. Save and C. E. Massonet: Plastic Analysis and Design of Plates, Shells, and Disks, North-Holland (1972).
- 13) 川井: 不連続体力学のすすめ (その3), 生産研究, 第33巻4号 (1981), 5.
- 14) 都井 他: 曲面剛体要素モデルによる円筒殻の離散化極限解析, 日本鋼構造協会第7回マトリックス解析法に関するシンポジウム (1981), 95.
- 15) 上田 他: 曲面剛体要素モデルによる円筒殻の離散化極限解析 (その1) ~ (その2), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), (1981), 1141.
-