混合モード状態における脆性破壊発生 に関する考察 (第 2 報)

正員 金 沢 武* 正員 町 田 進**
正員 酒 井 啓 一*** 正員 阪 野 賢 治***

A Study on Brittle Fracture Initiation under Combined Modes
(2nd Report)

by Takeshi Kanazawa, *Member* Susumu Machida, *Member*
Keiichi Sakai, *Member* Kenji Sakano, *Member*

Summary

Brittle fracture initiation characteristics under combined mode I+II and I+III were examined by shear and bend test of notched specimens. In shear test, by the alternate arrangement of the four support points, there appears a pure shear stress field between of the two inner support points, so that any combination of mode I, II and III is easily realized. Materials used for these tests were PMMA plate and mild steel plate.

It was confirmed that the fracture strength and the direction of the crack extension are rather in good agreement with σ_θ criterion under mode I+II condition and also under mode I+III condition in case where portion of the mode III is not exceeding. When the portion of the mode III becomes surpassing, brittle fracture initiates at one point on the notch tip line and propagates in a plane different from the initial notch plane. This type of fracture has to be evaluated by a new fracture parameter such as normal stress on the fracture plane. It was also confirmed that critical COD δ_c in the shear stress field is larger than one in the bending stress field if δ_c is greater than 0.05 mm or so on the mild steel. Fracture from a crack inclined to a principal stress is not always evaluated to the safety side by using a projected crack size on a plane normal to the principal stress, if the crack exists in a shear stress field and fracture initiates under small scale yielding condition. But if δ_c is larger than 0.05 mm or so as ordinary structural steel, this flaw evaluation method becomes reasonable because δ_c in shear stress field becomes larger than one obtained by bend test.

1 緒 言

実構造物に存在する欠陥は必ずしも主応力に直角な方向にあるとは限らず、作用する荷重も単純な引張力だけでは限らない。したがって実構造物の脆性破壊発生に対する安全性を評価するためには、組合せ応力を受ける欠陥からの破壊特性を明らかにすることが必要となる。

このような観点からこの種の問題に対して多くの研究がなされるようになってきた。しかし、これらの研究においてはモード I に比べてモード II, III の占める割合が大きい状態における実験的検討ならびに塑性変形の影響を考慮に入れた検討は少ないようにみうけられる。

筆者らは、これまでに混合モード状態におけるき裂の弾塑性変位挙動を評価するための Strip Yield 模型ならびにこれに基づいた COD クライテリオンを提案し、その有効性について検討した^{1), 2)}。

本報告においては、純粋なモード II あるいは III の状態およびそれに近い状態を容易に得ることのできる剪断負荷方式による破壊試験を実施し破壊発生特性を調べた。また、比較のために曲げ負荷方式による破壊試験を実施した。これらの試験で得られた結果をもとに、主応力に対して傾いて存在する欠陥の脆性破壊に対する安全性の評価法として ASME B. & P. V. Code Section XI³⁾, WES 2805⁴⁾ 等において採用されている、欠陥を主応力に垂直な面に投影して得られる寸法の欠陥がその主応力を受けるとして安全性を評価する方法の妥当性について検討した。

* 長崎総合科学大学

** 東京大学工学部

*** 石川島播磨重工業(株)技術研究所

2 試 験

2.1 供 試 材

供試材は板厚 25 mm のポリメチルメタクリレート (PMMA) 板および板厚 20 mm の造船用軟鋼 (KAS 鋼) 板である。

PMMA 板の機械的性質を Table 1 に, KAS 鋼板の機械的性質および化学組成を Table 2 に示す。

2.2 試 験 片

破壊試験に用いた試験片の形状, 寸法を Fig. 1 に示す。type A, B, C の試験片はモード I+II の状態における破壊試験に用い, type D, E の試験片はモード I+III の状態における破壊試験に用いた。切欠きは機械加工切欠きであり, その先端は 0.2 mm 幅に仕上げた。

2.3 負 荷 方 式

破壊試験は Fig. 2 に示す剪断負荷方式および曲げ負荷方式で行った。(a) の剪断負荷方式は, 支点を互い違いに配置し試験片の中央部に純粋剪断応力場を得るものであり, (b) の曲げ負荷方式は試験片の中央部に純粋な曲げ応力場を得るものである。

切欠きがない部材が剪断負荷を受けた場合の主応力分布図を Fig. 3 に示す。部材中央部に純粋剪断応力場が生じていることがわかる。切欠きの傾き角 β が 0° および

90° の場合に純粋なモード II または III の状態が得られると予想される。KAS 鋼で製作した $\beta=0^\circ$ の type B の試験片に室温において剪断荷重を作用させた場合の変形状態を Photo. 1 に示す。試験片全体としてかなり大きい変形を生じており切欠先端部には約 1 mm 程度の剪断き裂を生じていたが, このような状態においてもモード II の変形状態が維持されていることがわかる。

2.4 試験条件, 計測項目

各試験片についての試験条件を Table 3 に示す。

計測項目は破壊荷重, 破壊方向, 破面の状況等である。なお, KAS 鋼で製作した type B, C の試験片については, 切欠入口部近傍のキリ穴 (Fig. 1 参照) に立て

Table 1 Mechanical properties of PMMA used

Young's modulus (N/mm ²)	Poissons ratio	Fracture strength(N/mm ²)	
		Tension	Compression
2890	0.38	60	143

Table 2 Mechanical properties and chemical compositions of KAS steel used

Mechanical properties				Chemical compositions%					
Y.P. (N/mm ²)	T.S. (N/mm ²)	El. (%)	R.A. (%)	C	Si	Mn	P	S	
270	450	39	69	0.14	0.26	0.86	0.021	0.011

Fig. 1 Specimens

Fig. 2 Loading method

Fig. 3 Principal stress distribution by shear loading on the beam

Photo. 1 Deformation in notch portion of a type B specimen ($\beta=0^\circ$) subjected to the shear loading (mode II)

た2本のピン間の破壊時の変位をクリップゲージで計測した。この場合、ピン配置を調整することにより曲げ負荷方式においては試験片長手方向の変位を、剪断負荷方式においてはこれに直角方向の変位を計測した。

3 理 論

3.1 剪断負荷を受ける場合の K 値

(a) Type A の試験片

剪断応力は梁の高さ方向に放物線分布をするので、

Table 3 Test conditions

Specimen type	Material	Test temperature(°C)	Loading method	Deformation mode
A	PMMA	20	Shear	I + II
B	Steel	-196 ~ -40	Shear	I + II
			Bend	I + II
C	Steel	-196 ~ -100	Shear	II
			Bend	I
D	PMMA	20	Shear	I + III
	Steel	-196	Shear	I + III
E	PMMA	20	Shear	I + III

Fig. 4 (a) に示すような放物線分布応力を受ける無限平板中の中央部に存在する傾いた切欠きとして K 値を算定する。この場合の K 値は次式で与えられることになる (付録参照)。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= K_A \cdot \sin 2\beta \\ K_{II} &= K_A \cdot \cos 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここで、

$$K_A = 1.5 \tau_{av} \sqrt{\pi a} \times \{1 - 2(a \cdot \cos \beta / W)^2\} \quad (2)$$

τ_{av} : 平均剪断応力

a : 切欠長さの半長

W : 試験片幅

(b) Type B の試験片

この場合には Fig. 4 (b) に示すような放物線分布応力を受けると考えることにより、 K_A として次式を用いた (1) 式で K_I, K_{II} が算定されることになる。

$$K_A = 1.5 \tau_{av} \sqrt{\pi a_p / \cos \beta} \{ (8a_p / \pi W) - 2(a_p / W)^2 \} \quad (3)$$

ここで、 a_p : 試験片の長手直角方向への投影切欠長さ
実際の試験片に作用する応力は、試験片の長手方向の中心から離れた位置の上下端近傍において仮定した応力状態 (Fig. 4(b)) とかなり異なったものとなっている。したがって K 値も (1), (3) 式から算定されるものと

Fig. 4 Cracks subjected to parabolical stress

Fig. 5 K value of the type B specimen subjected to shear load

異なっている可能性がある。そこで、解析解と有限要素解の重ね合せ法⁵⁾で K 値を求め、(1), (3)式から算定される値と比較して Fig. 5 に示す。 K_I は(1), (3)式の値にほぼ等しいが、 K_{II} は(1), (3)式の値よりも β が大きき場合において大きくなっている。

(c) Type C の試験片

この場合の K 値は $\beta=0^\circ$ のtype Bの試験片についての値を、断面積の差を考慮して、5倍して求めた。

(d) Type D の試験片

切欠先端における K 値の平均値を次式により算定した。

$$\left. \begin{aligned} K_I &= K_A \cdot \sin 2\beta \\ K_{III} &= K_A \cdot \cos 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここで、

$$K_A = \tau_{av} \sqrt{\pi a} \sqrt{(2t/\pi a) \cdot \tan(\pi a/2t)} \quad (5)$$

(e) Type E の試験片

試験片中央部の K 値を次式により算定した。

$$K_{III} = 1.5 \tau_{av} \sqrt{\pi a} \sqrt{(t/\pi a) \cdot \tan(\pi a/t)} \quad (6)$$

3.2 切欠先端の変位 δ

KAS 鋼製の type B, C の試験片の破壊試験においては、切欠入口部近くにおいて変位 V_g を計測した。 V_g から δ への換算は以下の方法で行った。

(a) 剪断負荷

切欠きの傾き角 β は $0^\circ \sim 45^\circ$ と変化するが、すべての場合に $\beta=0^\circ$ の場合の換算比を用いた。

$\beta=0^\circ$ の場合の換算比は、ネット断面が全面降伏するまでは作用応力が放物線分布をする場合のDugdale模型⁹⁾から導かれる値を、全面降伏後は切欠面の変位計測により得られた値(0.72)を用いた。

Fig. 4(b) に示すような放物線分布応力が作用する場

合のDugdale模型から導かれる換算比はつぎのようになる(付録参照)。

$$\frac{\delta}{V_g} = \frac{\left[\begin{aligned} & \{-9k\bar{\sigma} + 1.5\bar{\sigma}(\pi k^2 - k - \pi)\} \sqrt{k^2 - 1} \\ & + 9\bar{\sigma} \cdot \cosh^{-1}(k) + 6 \ln(k) \end{aligned} \right]}{1.5\pi k^3 \bar{\sigma} - 9k^2 \bar{\sigma} + 6 \cosh^{-1}(k)} \quad (7)$$

$$\text{ここで、} \bar{\sigma} = \tau_{av} / \tau_Y \quad (8)$$

$$\cos^{-1}(1/k) = 3k\bar{\sigma}(1 - \pi k/8) \quad (9)$$

τ_Y : 剪断降伏応力

(b) 曲げ負荷

曲げ負荷の場合にもすべての β に対して $\beta=0^\circ$ の場合の換算式を用いた。換算式としては以下に示すWellsの式⁷⁾を採用した。

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \frac{0.45(W-a)}{0.45W+0.55a+z} (V_g - V_1) : V_g \geq 2V_1 \\ \delta &= \frac{0.45(W-a)}{0.45W+0.55a+z} \cdot \frac{V_g^2}{4V_1} : V_g < 2V_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここで、 $V_1 = r\sigma_Y W(1-\nu^2)/E$

r : 無次元化限界弾性クリップゲージ変位

z : 変位測定位置と試験片上端面との距離

(ここでは -1mm)

σ_Y : 引張降伏応力

3.3 破壊理論

混合モード状態における脆性破壊発生説としては、接線方向応力 σ_θ 最大説⁸⁾、ひずみエネルギー密度係数 S 最小説⁹⁾、枝分れき裂発生時のあるいは枝分れき裂進展時のエネルギー解放率最大説¹⁰⁾等が代表的なものであろう。これらはいずれも Fig. 6(a) に示すように先在き裂先端の全線から破面が拡大していく破壊様式(以下、拡大形破壊と呼ぶことにする)を考えている。

しかし、モードIIIの占める割合が多い場合には、Fig. 6(b) に示すようにき裂先端の1点において発生した破壊が先在のき裂面とはまったく異なる面を拡大していく破壊様式(以下、発生形破壊と呼ぶことにする)が見られることがある^{1), 10)}。このような破壊の発生強度を σ_θ 説の考え方を拡張して適用することにより求めることにする。すなわち、ある点における最大主応力(の強さ)がある限界値に達すれば破壊を発生するとして強度を評価する。

き裂先端ごく近傍においては破壊はき裂先端の1点を中心とするらせん面に生じるとみなし、この面に作用する垂直応力(この応力を σ_N と表わすことにする)が破壊発生に関係すると考えることにする。破壊は z 軸からの距離 r が一定内のあるらせん面に作用する σ_N の全周にわたっての平均値 $\bar{\sigma}_N$ がある限界値に達すれば生じると仮定すれば、この破壊発生条件はつぎのように表わすことができる。

$$m\bar{K}_N = K_{IC} \quad (11)$$

Fig. 6 Fracture types under combined mode with mode III

Fig. 7 A spiral face of its center is on the crack tip

ここで,

$$\bar{K}_N = \sqrt{2\pi r} \bar{\sigma}_N$$

$$\bar{\sigma}_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_N d\theta$$

m : 破壊様式の相違に関連した修正係数

修正係数 m はつぎのように定めた。円形き裂の K 値は長さが直径に等しい直線貫通き裂の K 値の $(2/\pi)$ 倍である。そこで、き裂先端の1点から円形に発生形の破壊をする場合の $\bar{K}_N$ の限界値は K_{IC} の $(\pi/2)$ 倍であると考えことにする。さらに、 r が一定内のらせん面の面積は円の面積よりも大きいので、らせん面で破壊する場合には両者の面積比に応じて大きい応力が必要であると考えることにする。以上の2つの因子を考慮すれば m はつぎのように表わされることになる。

$$m = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} 1/\cos \xi_z d\theta \right\} \quad (12)$$

ここで、 ξ_z : らせん面に対する法線と z 軸とのなす角度 (Fig. 7 参照)。

4 試験結果

4.1 モード I+II の状態における破壊特性

(a) 破壊強度

PMMA 製の type A の試験片の剪断破壊試験で得られた切欠角度 β と破壊強度の関係を Fig. 8 に示す。図中には σ_θ 説および S 説による破壊強度の推定値も示した。これらは、き裂先端部の応力を級数表示した場合の第1

Fig. 8 Fracture strength in relation to the notch angle in the shear test of the type A specimen of PMMA (mode I+II)

項、すなわち K 値で表わされる応力を用いて求めた。

β と破壊強度の関係は σ_θ 説あるいは S 説による推定値に近い結果となっている。

(b) 限界切欠先端変位

KAS 鋼の type B, C の試験片について求めた破壊発生時の切欠先端変位 δ_c を試験温度との関係で、Fig. 9, 10 に示す。Fig. 9 は剪断荷方式による結果であり、Fig. 10 は曲げ荷方式による結果である。

δ_c は荷方式が同じであれば切欠角度 β が変化してもほぼ同程度の値となっているとみなすことができる。しかし、荷方式により δ_c の温度依存性に差がみられる。すなわち、剪断荷による結果においては $-150 \sim -160^\circ\text{C}$ において明瞭な δ_c の遷移現象がみられ、この温度以上の範囲においては剪断荷による δ_c が曲げ荷による δ_c よりもかなり大きくなる。なお、剪断荷を受けて遷移温度域より高温側で破壊する場合のネット断面における平均剪断応力は剪断降伏応力を上回っており、切欠先端部には剪断き裂が生じていた。荷方式により δ_c に差が生じるのは主として切欠部に作用する応力状態が異なることと関係しているであろう。

つぎに試験片 type による δ_c の差についてみると、曲げ荷の場合の δ_c は type C の方が type B より低くなる傾向が認められる。これは、type C の試験片においては切欠先端部のほとんどが弾生域であり塑性拘束の効果がより強く生じたためと考えられる。

一方、剪断荷の場合の δ_c は、遷移温度以下においては type C の方が大きく、遷移温度以上においては試験片 type による差はみられない。これは、遷移温度以下においては局部的な降伏により破壊するが一般的な板厚であれば破壊を生じたであろう方向の板厚が大きいため破壊が困難となり δ_c が大きくなったものと考えられる。

Fig. 9 Temperature dependence of the critical notch tip displacement δ_c in the shear test of the type B and C specimens of KAS steel (mode I+II)

Fig. 10 Temperature dependence of the critical notch tip displacement δ_c in the bend test of the type B and C of KAS steel (mode I+II)

遷移温度以上においてはネット断面が全面降伏し切欠先端部に剪断き裂を生じた後に破断するが、剪断変形には塑性拘束の影響がないために δ_c が試験片 type に関係しない結果となったものと考えられる。

(c) 破壊方向

PMMA 製の type A の試験片の剪断破壊試験で得られた切欠角度 β と破壊方向の関係を Fig. 11 に、KAS 鋼製の type B の試験片の剪断破壊試験および曲げ破壊試験で得られた同様の関係を Fig. 12 に示す。図中には σ_θ 説および S 説による破壊方向の推定値を示した。また、KAS 鋼の剪断破壊試験については (1), (3) 式による

Fig. 11 Fracture angle in relation to the notch angle in the shear test of the type A specimen of PMMA (mode I+II)

Fig. 12 Fracture angle in relation to the notch angle in the shear test and in the bend test of the type B specimen of KAS steel (mode I+II)

K 値を用いた推定値と FEM 解析で求めた K 値を用いた推定値を示した。

K_{II} の占める割合が大きい図の左側における実験値を平均的にみれば σ_θ 説による破壊方向に近いとみなすことができる。KAS 鋼についての実験値は K_I の占める割合の大きい図の右側において理論値との差が大きい。KAS 鋼に関するこのような傾向は、破壊がある程度の塑性変形を示した後に生じること、材料自体に異方性があること等と関係していると考えられる。なお、剪断負荷と曲げ負荷の結果を比べると、前者の結果のばらつきが大きい。このような傾向は、Fig. 9, 10 の δ_c につい

ての結果においてもみられる。

4.2 モード I+III の状態における破壊特性

PMMA 製の type D, E の試験片についての切欠角度と破壊強度の関係を Fig. 13 に, KAS 鋼製の type D の試験片についての同様の関係を Fig. 14 に示す。

PMMA についての結果では, $\beta \leq 25^\circ$ の範囲で発生形の破壊を生じ, $\beta \geq 35^\circ$ の範囲で拡大形の破壊を生じた。破壊強度はそれぞれの破壊様式に対応した推定破壊強度に近い値を示した。しかし, 理論によれば $\beta = 15^\circ$ 付近で破壊様式の遷移が起こることになるのに対し実験結果

Fig. 13 Fracture strength in relation to the notch angle in the shear test of the type D and E specimens of PMMA (mode I+III)

Fig. 14 Fracture strength in relation to the notch angle in the shear test of the type D specimens of KAS steel (mode I+III)

においては $\beta = 30^\circ$ 付近で破壊様式の遷移がみられた。この差に関しては今後さらに検討する必要がある。

Fig. 14 の KAS 鋼についての結果では, 破壊様式の遷移が生じる切欠角度は理論値とはほぼ一致した。しかし, この場合には弾性論に基づいた発生形破壊に対する破壊荷重よりもネット断面における全面降伏荷重が低いため, 発生形の破壊強度は理論値よりも低い値を示した。

5 簡易評価法の妥当性に関する検討

脆性破壊に対する安全性の評価基準においては, 実際面への適用の便宜を考え, 主応力に対してき裂面が傾いているため混合モード荷重を受けるような場合には簡易な評価法が採用されている。すなわち, 欠陥を主応力に垂直な平面に投影して得られる欠陥がこの主応力を受けるとして安全性を評価する方法である。ここでは, この方法 (以下, 投影法と呼ぶことにする) の妥当性について検討する。

小規模降伏状態において破壊する場合の破壊強度は, モード III の力が作用し発生形の破壊をする場合を除けば, σ_θ 説による推定値と大きく異ならないことが従来の研究で確認されている。剪断成分の占める割合が大きい状態で実施した本研究における試験でも同様の結果が得られた。そこで, 主として投影法により推定される破壊強度と σ_θ 説により推定される破壊強度の比較を行う。

一定の応力状態において欠陥面がモード III の力を受ける方向に変化しても主応力に垂直な面に投影された欠陥長さは一定であるので, 投影法による破壊強度は変化しないことになる。一方, σ_θ 説による破壊強度は欠陥面が主応力に垂直な方向から傾くにしたがい上昇する。また, 発生形の破壊強度は, 欠陥が主応力に垂直に存在する場合の破壊強度よりも十分高い。したがって, モード III の力を受けるように欠陥が傾いた場合の破壊強度は, 簡易評価法により安全側に評価されることになる。

つぎに, モード I+II の状態における破壊強度について考える。投影法による破壊強度に対する σ_θ 説による破壊強度の比と切欠きの傾き角度 β との関係を 4 種の主応力比 ($\sigma_2/\sigma_1 = 1, 0.5, 0, -1$) について求め Fig. 15 に示す。 $\sigma_2/\sigma_1 = -1$ の剪断応力場にき裂が存在する場合には投影法による評価がかなり非安全側の評価となることがあるが, その他の場合には大きく非安全側になることはないことがわかる。

ところで, 鋼構造部材の破壊はたとえ脆性破壊であってもある程度の塑性変形を生じた後に発生するのが一般であり, このような破壊は弾塑性破壊力学により評価する必要がある。

弾塑性破壊力学に基づいた破壊条件の 1 つである COD 説においては, き裂先端の変位 δ がある限界値 δ_c

Fig. 15 The ratio of the fracture strength by the σ_θ criterion and by the simplified evaluation method using projected crack size in relation to the crack angle (mode I+II)

に達すれば破壊すると考える。 δ_c としては、一般に、曲げ、引張等のモードⅠの破壊試験で得られた値が用いられる。しかし、本研究における破壊試験により、曲げ試験で得られる δ_c が0.05 mm程度以上となる場合には、剪断応力場において得られる δ_c は曲げ試験で得られる δ_c の数倍の値をとることが確認された。したがって、かなりの塑性変形を示した後に破壊する場合の強度を曲げ試験で得られた δ_c をもとにして評価するかぎりにおいては、剪断応力場に存在する欠陥も安全側に評価されることになる。

鋼構造部材に対して要求される δ_c は0.05 mm以上であるのが一般であるから、投影法による安全性の評価はすべての応力状態に対して妥当な方法であると言える。

6 結 論

本論文においては、主として剪断力成分の占める割合が大きい混合モード状態における脆性破壊特性について検討した。得られた知見を以下に示す。

- 1) 剪断負荷方式によれば純粋なモードⅡあるいはモードⅢの状態およびそれに近い変形状態を容易に得ることができる。
- 2) モードⅢの成分の占める割合が大きいときには、切欠先端の1点で発生した破壊が初期の切欠面と全く異なる面に伝播していく破壊様式がみられる。このような破壊発生の条件を破壊面に作用する垂直応力に着目して

評価した。

3) 上のような破壊様式を除けば、小規模降伏状態における破壊強度は σ_θ 最大説により大略評価できる。

4) 軟鋼において曲げ試験で得られる δ_c が0.05 mm程度以下の場合には、剪断応力場において得られる δ_c も同程度の値を示す。しかし、曲げ試験で得られる δ_c が0.05 mm程度以上となると、剪断試験で得られる δ_c が数倍大きい値を示す。

5) 欠陥を主応力に垂直な面へ投影して得られる寸法の欠陥が、その主応力を受けるとして破壊強度を評価する方法は、純粋な剪断応力場において小規模降伏状態で破壊する場合には非安全側の結果を与えることがある。しかし鋼構造部材に普通に要求されるように曲げ試験で得られる δ_c が0.05 mm程度以上であれば4)の δ_c の増大の効果により妥当な評価法となる。

なお本研究については日本造船学会溶接研究委員会第1分科会の委員各位から有益なご教示、ご討論をいただいた。ここに深く謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 酒井, 阪野: 混合モード状態における脆性破壊発生に関する考察, 日本造船学会論文集, 第139号(1976).
- 2) 酒井, 阪野: 傾いたき裂からの脆性破壊発生に関する考察, 圧力技術, 第15巻, 第4号(1977).
- 3) ASME Boiler and Pressure Vessel Code Section XI: Rules for Inservice Inspection of Nuclear Power Plant Components Division 1, (1980).
- 4) WES: 溶接継手のぜい性破壊発生に対する欠陥の評価方法, WES 2805-1980.
- 5) 徳田: 2次元クラックのK-値解析プログラム, 石川島播磨技報, 第17巻, 第6号(1977).
- 6) D. S. Dugdale: Yielding of Steel Sheets Containing Slits, J. Mech. Phys. Solids, Vol. 8 (1960).
- 7) BSI: Methods for crack opening displacement (COD) testing, BS. 5762 (1979).
- 8) F. Erdogan and G. C. Sih: On the Crack Extension in Plates under Plane loading and Transverse Shear, Trans. ASME, J. Basic Eng., 85 D (1963).
- 9) G. C. Sih: Some Basic Problems in Fracture Mechanics and New Concepts, J. Eng. Frac. Mech., Vol. 4 (1973).
- 10) 上田, 池田, 矢尾, 青木, 柴崎: 混合モード下での脆性破壊発生特性, 日本造船学会論文集, 第144号(1978).
- 11) 例えば寺田: き裂先端塑性域に線形な応力分布のある弾塑性モデルの解析, 航空宇宙技術研究所報告, TR-293 (1972).

付録 2 次式で表わされる応力を受ける き裂の Dugdale 模型

A.1 基礎式

き裂を有する平板の応力，変位および応力拡大係数は複素応力ポテンシャル $\{\Phi(z), \bar{\Omega}(z)\}$ を用いてつぎのように表わされる¹¹⁾。

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\{\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z})\} \quad (\text{A } 1)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{(\bar{z} - z)\Phi'(z) - \Phi(z) + \bar{\Omega}(z)\} \quad (\text{A } 2)$$

$$2G(u - iv) = \kappa \int \bar{\Phi}(\bar{z}) d\bar{z} - \int \bar{\Omega}(z) dz + (z - \bar{z})\Phi(z) \quad (\text{A } 3)$$

$$K_I - iK_{II} = 2\sqrt{2\pi} \cdot \lim_{z \rightarrow a} \sqrt{z - a} \Phi(z) \quad (\text{A } 4)$$

ここで， G ：剛性率， $\kappa = \begin{cases} (3-\nu)/(1+\nu) & \text{：平面応力} \\ 3-4\nu & \text{：平面ひずみ} \end{cases}$

無限板中に存在する長さ $2a$ のき裂面上の対称な4点 $x = \pm \xi (\xi \leq a)$ に圧縮力 P が作用する場合の応力関数 $\Phi(z) (= \Omega(z))$ は次式で与えられる。

$$\Phi(z) = \frac{Pz\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\pi(z^2 - \xi^2)\sqrt{z^2 - a^2}} \quad (\text{A } 5)$$

密度 $p(\xi)$ なる分布圧力 $\eta \leq \xi \leq a$ に作用する場合には (A 5) 式はつぎのように表わされる。

$$\Phi(z) = \frac{z}{\pi\sqrt{z^2 - a^2}} \int_{\eta}^a \frac{p(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{z^2 - \xi^2} d\xi \quad (\text{A } 6)$$

$p(\xi)$ が

$$p(\xi) = c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 \quad (\text{A } 7)$$

なる場合は (A 6) 式はつぎようになる。

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{c_0}{\pi} \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\eta}{a} \right) - i \cdot \ln a \right. \\ & + \frac{i}{2} \cdot \ln \frac{(\eta z - a^2 + i\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{a^2 - \eta^2})}{(z - \eta)} \\ & + \frac{i}{2} \cdot \ln \frac{(\eta z + a^2 + i\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{a^2 - \eta^2})}{(z + \eta)} \left. \right] \\ & + \frac{c_1}{\pi} \left[\frac{z\sqrt{a^2 - \eta^2}}{\sqrt{z^2 - a^2}} \right. \\ & + \frac{iz}{2} \cdot \ln \frac{(z + \eta)(\eta z - a^2 + i\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{a^2 - \eta^2})}{(z - \eta)(\eta z + a^2 + i\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{a^2 - \eta^2})} \left. \right] \\ & + \frac{c_2}{\pi} \left[\frac{z(z^2 - a^2/2)}{\sqrt{z^2 - a^2}} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\eta}{a} \right) \right. \\ & + \frac{\eta z\sqrt{a^2 - \eta^2}}{2\sqrt{z^2 - a^2}} - iz^2 \cdot \ln a \\ & + \frac{iz^2}{2} \cdot \ln \frac{(\eta z - a^2 + i\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{a^2 - \eta^2})}{(z - \eta)} \\ & \quad \times \frac{(\eta z + a^2 + i\sqrt{z^2 - a^2}\sqrt{a^2 - \eta^2})}{\times (z + \eta)} \left. \right] \quad (\text{A } 8) \end{aligned}$$

(A 8) 式を (A 4) 式に代入することにより次式が得られる。

$$K_I = 2\sqrt{\frac{a}{\pi}} \left[c_0 \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\eta}{a} \right) + c_1 \sqrt{a^2 - \eta^2} \right. \\ \left. + c_2 \left\{ \left(\frac{a^2}{2} \right) \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\eta}{a} \right) + \frac{\eta}{2} \sqrt{a^2 - \eta^2} \right\} \right] \quad (\text{A } 9)$$

A.2 Dugdale 模型

x 軸上の作用応力 $\sigma_a(x)$ および降伏応力 $\sigma_Y(x)$ の分布が

$$\sigma_a(x) = c_{a0} + c_{a1}x + c_{a2}x^2 \quad (\text{A } 10)$$

$$\sigma_Y(x) = c_{Y0} + c_{Y1}x + c_{Y2}x^2 \quad (\text{A } 11)$$

で与えられるとすると，塑性域先端に相当する仮想き裂の先端における特異性が0の条件から作用応力と塑性域の大きさを与える次式が得られる。

$$\frac{\pi}{2} c_{a0} + a c_{a1} + \frac{\pi a^2}{4} c_{a2} = \cos^{-1} \left(\frac{c}{a} \right) c_{Y0} + \sqrt{a^2 - c^2} c_{Y1} \\ + \left\{ \left(\frac{a^2}{2} \right) \cdot \cos^{-1} \left(\frac{c}{a} \right) + \frac{c}{2} \sqrt{a^2 - c^2} \right\} c_{Y2} \quad (\text{A } 12)$$

ここで， c ：実き裂の半長

また，(A 10) 式の応力による変位と (A 11) 式の応力による変位から位置 x におけるき裂上面の変位を与える次式が得られる。

$$u - iv = \sum_{j=0}^2 [c_{a1} \{U_j(x, 0) - iV_j(x, 0)\} \\ - c_{Y1} \{U_j(x, c) - iV_j(x, c)\}] \quad (\text{A } 13)$$

ここで，

$$U_0(x, \eta) = -\frac{(\kappa - 1)}{4G} \begin{cases} 0 & : x \leq \eta \\ x - \eta & : x > \eta \end{cases} \quad (\text{A } 14)$$

$$U_1(x, \eta) = -\frac{(\kappa - 1)}{8G} \begin{cases} 0 & : x \leq \eta \\ (x^2 - \eta^2) & : x > \eta \end{cases} \quad (\text{A } 15)$$

$$U_2(x, \eta) = -\frac{(\kappa - 1)}{12G} \begin{cases} 0 & : x \leq \eta \\ (x^3 - \eta^3) & : x > \eta \end{cases} \quad (\text{A } 16)$$

$$V_0(x, \eta) = \frac{(\kappa + 1)}{4\pi G} \left[2\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\eta}{a} \right) - 2x \cdot \ln a \right. \\ \left. + (x - \eta) \cdot \ln \left| \frac{\eta x - a^2 - \sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2}}{x - \eta} \right| \right. \\ \left. + (x + \eta) \cdot \ln \left| \frac{\eta x + a^2 - \sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2}}{x + \eta} \right| \right] \quad (\text{A } 17)$$

$$V_1(x, \eta) = \frac{(\kappa + 1)}{8\pi G} \left[2\sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2} + (x^2 - \eta^2) \right. \\ \left. \cdot \ln \left| \frac{(x + \eta)(\eta x - a^2 - \sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2})}{(x + \eta)(\eta x + a^2 - \sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2})} \right| \right] \quad (\text{A } 18)$$

$$V_2(x, \eta) = \frac{(\kappa + 1)}{12\pi G} \left[(2x^2 + a^2)\sqrt{a^2 - x^2} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{\eta}{a} \right) \right. \\ \left. + \eta\sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2} - 2x^3 \ln a \right. \\ \left. + (x^3 - \eta^3) \cdot \ln \left| \frac{\eta x - a^2 - \sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2}}{x - \eta} \right| \right. \\ \left. + (x^3 + \eta^3) \cdot \ln \left| \frac{\eta x + a^2 - \sqrt{a^2 - \eta^2}\sqrt{a^2 - x^2}}{x + \eta} \right| \right] \quad (\text{A } 19)$$