塑性節点法の熱弾塑性および動的問題への適用

正員 上 田 幸 雄* 正員 中 長 啓 治*
正員 藤 久 保 昌 彦** 正員 石 川 嘉 一***

Application of Plastic Node Method to Thermal Elastic-plastic
and Dynamic Problems

by Yukio Ueda, *Member* Keiji Nakacho, *Member*
Masahiko Fujikubo, *Member* Yoshikazu Ishikawa, *Member*

Summary

In 1968, the author and his colleagues developed the new mechanism of plastic hinge based on the incremental theory of plasticity and derived the elastic-plastic stiffness matrices for one dimensional members. In 1979, extending the basic idea of the plastic hinge, the authors developed the new method of plastic analysis of plates and solid bodies using the ordinary finite element method and derived the elastic-plastic stiffness matrices. Later, the new method of plastic analysis was named "the plastic node method".

In this paper, the basic theory of the plastic node method was further developed for analyses of thermal elastic-plastic and dynamic behaviors of structures and derived stiffness equations. Using the new theory, several examples were analyzed and the result indicated successful application of the method.

1 緒 言

3次元骨組構造物の弾塑性解析のために、著者は以前に、塑性流れ理論に基づく新しい塑性関節機構を考案し、塑性関節法を1次元部材に一般的に適用する理論を展開して、部材の弾塑性剛性行列を具体的に導出した^{1),2)}。最近にいたって、その塑性関節法を一般化した^{3),4)}。すなわち、通常の有限要素法の有限要素を用い、その各節点における塑性条件をその点の応力で表わすと、結局、塑性条件は節点力の関数となる。これを塑性ポテンシャルとみなし塑性流れ理論を用いて、1次元から3次元までの要素の弾塑性剛性行列を導出し、大たわみ問題を含む一般的な弾塑性解析法を示した。その後、この解析法を塑性節点法⁴⁾と呼ぶことにした。

本論文では、塑性節点法を温度変化を伴う動的弾塑性問題に適用するために、これまでの基礎理論を拡張し定式化する。なお動的弾塑性解析の基礎式の定式化においては、慣性力の取り扱い方が重要な問題の一つであり、いくつかの考え方による基礎式を示すとともに、その解析結果を比較検討する。このほか、温度変化を伴う解析

例として熱弾塑性解析を行う。これらの結果をもとに、塑性節点法の新しい問題に対する適用性を検討する。

2 解 析 理 論

ここでは、既に展開された塑性節点法による弾塑性解析の基礎理論を、温度変化を伴う動的問題に対して拡張する。

物体に広範な温度変化が生じると、一般に物体は熱弾塑性挙動をすると考えられる。この場合、通常の弾塑性解析に比べ、さらに下記の影響を考慮せねばならない。

- (i) 熱ひずみの生成
- (ii) 材料定数(弾性係数, ポアソン比, 瞬間線膨張係数, 降伏応力, 等)の温度依存性

他方、動的挙動の取り扱いにおいては、静的問題では現れない次の影響を理論に取り入れる必要がある。すなわち、

- (iii) 慣性力の作用
- (iv) 減衰力の作用
- (v) 材料定数(特に降伏応力)のひずみ速度依存性

上記の(v)のひずみ速度依存性の取り扱いは、通常の弾塑性解析におけるひずみ硬化則と類似の問題で、現在研究中であるので、ここでは取り扱わない。本論文では、(i)~(iv)の熱的および動的現象を考慮した解析

* 大阪大学溶接工学研究所

** 広島大学工学部

*** 日本鋼管(株)(研究当時大阪大学大学院)

理論を展開する。具体的な理論の展開にあたっては、現象を弾性と弾塑性に大別し、それぞれにおいて温度と動的影響を取り扱う。既に述べたように、本解析法は通常の有限要素法に基礎をおき、要素内の塑性域の広がり要素の節点に縮約する方法であるので、挙動が弾性の場合は、有限要素法そのものである。なお、本論文では微小変形の枠内で式を展開する。

2.1 応力と節点力の増分関係

一つの有限要素の応力増分とそれに対応する節点力増分の関係は、仮想仕事の原理により次のようになる。

$$\{dx\} = \int_V [B]^t \{d\sigma\} dV \quad (1)$$

ここで、 $\{dx\}$ ：応力増分による節点力増分

$[B]$ ：変位・ひずみマトリックス

t ：転置マトリックス

$\{d\sigma\}$ ：応力増分

$\int_V dV$ ：要素の体積積分

上記関係は、要素の弾性・塑性、温度変化の有無、静的動的の各状態にかかわらず常に成立する。

2.2 弾性剛性方程式

材料が弾性挙動する場合の有限要素の剛性方程式を示す。

2.2.1 温度変化のない静的弾性剛性方程式

(1) ひずみ、応力とその関係

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} \quad (2)$$

ここで、 $\{d\epsilon\}$ 、 $\{d\epsilon^e\}$ ：全ひずみ増分および弾性ひずみ増分

$$\{d\sigma\} = [D^e] \{d\epsilon^e\} = [D^e] \{d\epsilon\} \quad (3)$$

ここで、 $[D^e]$ ：弾性応力・ひずみマトリックス

(2) 節点変位、ひずみとその関係

$$\{du\} = \{du^e\} \quad (4)$$

$$\{d\epsilon\} = [B] \{du\}, \quad \{d\epsilon^e\} = [B] \{du^e\} \quad (5)$$

ここで、 $\{du\}$ 、 $\{du^e\}$ ：全節点変位増分および弾性節点変位増分

(3) 節点力

$$\{dx_u\} = \{dx\} \quad (6)$$

ここで、 $\{dx_u\}$ ：全節点力増分

(4) 剛性方程式

式(1)～(6)より剛性方程式が次のように求められる。

$$\{dx_u\} = [K^e] \{du\} \quad (7)$$

ここで、 $[K^e] = \int_V [B]^t [D^e] [B] dV$ ：弾性剛性マトリックス

2.2.2 温度変化のある動的弾性剛性方程式

(1) ひずみ、応力とその関係

材料が温度変化を受けると、(i) 熱ひずみが生じ、(ii) 材料定数(弾性係数、ポアソン比、瞬間線膨張係数)が温度依存性を示し変化する。このような場合のひずみおよびその応力との関係は次のように表わされる⁵⁾。

$$\{d\epsilon\} = \{d\epsilon^e\} + \{d\epsilon^T\} \quad (8)$$

ここで、 $\{d\epsilon^T\} = \{\alpha\} dT$ ：熱ひずみ増分

$\{\alpha\}$ ：瞬間線膨張係数

dT ：温度増分

$$\{d\sigma\} = [D_a^e] \{d\epsilon^e\} + \frac{d[D^e]}{dT} dT \{e^e\} \quad (9)$$

ここで、 $\{e^e\}$ ：増分前の弾性ひずみ

$[D_a^e]$ 、 $\frac{d[D^e]}{dT} dT$ ：増分後の温度に対する弾性応力・ひずみマトリックスおよび増分間の変化量

(2) 節点変位、ひずみとその関係

温度変化がある場合は、熱ひずみが生じるので、

$$\{du\} = \{du^e\} + \{du^T\} \quad (10)$$

ここで、 $\{du^T\}$ ：熱節点変位増分

$$\left. \begin{aligned} \{d\epsilon\} &= [B] \{du\}, \quad \{d\epsilon^e\} = [B] \{du^e\}, \\ \{d\epsilon^T\} &= [B] \{du^T\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(3) 節点力

動的現象においては、静的な場合の節点力に、慣性力および減衰力による節点力が付加される。

(i) 慣性力：要素内各点の慣性力は、その点の質量と加速度の積で表わされる。有限要素法では各要素に作用する慣性力を節点に集中させる必要がある。そこで、要素内各点の慣性力の作用の総和と等価な節点慣性力を求める。これに対しては、2つの方法がある。1つはランプト・マス法で、他はコンシステント・マス法である。ランプト・マス法は取り扱いが簡単であるが、コンシステント・マス法の方が一般には精度が高い。

(i-i) ランプト・マス法に基づく慣性力：ランプト・マス法は、要素の質量を節点に集中させる方法である。多くの場合、要素の全質量を節点に等分布させ、また、回転慣性は無視される。この結果、要素に作用する慣性力増分は、節点力増分として、要素に温度変化がある場合は、要素内で熱ひずみが生じることも考慮して、次のように簡単に表わすことができる。

$$\{dx_m\} = [M_i] (\{d\ddot{u}^e\} + \{d\ddot{u}^T\}) = [M_i] \{d\ddot{u}\} \quad (12)$$

ここで、 $\{dx_m\}$ ：節点慣性力増分

$\{d\ddot{u}^e\}$ 、 $\{d\ddot{u}^T\}$ 、 $\{d\ddot{u}\}$ ：弾性、熱および全節点変位加速度増分

$[M_i]$ ：ランプト・マス・マトリックス(対角マトリックスとなる)

(i-ii) コンシステント・マス法に基づく慣性力：コンシステント・マス法では、質量が要素内で分布している状態での要素に作用する慣性力と等価な節点慣性力を

求める。仮想仕事の原理により等価節点慣性力増分が次のように求められる。

$$\{dx_m\} = [M_c](\{d\ddot{u}^e\} + \{d\ddot{u}^T\}) = [M_c]\{d\ddot{u}\} \quad (13)$$

ここで、 $\{dx_m\}$ ：等価節点慣性力増分

$$[M_c] = \int_V \rho [A]^t [A] dV : \text{コンシステント・マス・マトリックス}$$

$$[A] : \text{変位関数, } \{du_{ei}\} = [A]\{du\}$$

$$\{du_{ei}\} : \text{要素内変位増分, } \rho : \text{密度}$$

(ii) 減衰力：減衰力は、通常、速度に正比例すると考えられており、要素に作用する減衰力増分は、等価節点減衰力増分として次式で与えられるとする。

$$\{dx_h\} = [H](\{d\dot{u}^e\} + \{d\dot{u}^T\}) = [H]\{d\dot{u}\} \quad (14)$$

ここで、 $\{dx_h\}$ ：等価節点減衰力増分

$$\{d\dot{u}^e\}, \{d\dot{u}^T\}, \{d\dot{u}\} : \text{弾性, 熱および全節点変位速度増分}$$

$$[H] : \text{減衰マトリックス}$$

上記の減衰マトリックス $[H]$ は、現在のところ直接理論的に求めることは不可能であり、何らかの仮説をたて、その係数を実験的に求める方法がとられている。よく用いられている仮説の一つに次のものがある⁶⁾。

$$[H] = a[M] + b[K_s] \quad (15)$$

ここで、 $[M]$ ：マス・マトリックス

$$[K_s] : \text{静的な状態での剛性マトリックス}$$

a, b ：減衰力を節点の速度に関係づける比例定数で、実験的に求める。

上記の場合、減衰マトリックス $[H]$ は、マス・マトリックス $[M]$ および静的な状態での剛性マトリックス $[K_s]$ で表わされ、 $[M]$ あるいは $[K_s]$ が変化すると、係数 a, b とともに、その影響を受ける。減衰マトリックス $[H]$ に対しては、他にもいくつかの仮説があるが、いずれにせよ、 $[H]$ は最終的には実験により求められる。そこで、本論文では、減衰マトリックス $[H]$ の詳細にはふれず、減衰力増分が式 (14) で表わされるものとして、以後、式の展開を行っていくことにする。

(iii) 全節点力増分：応力増分による節点力増分 $\{dx\}$ に、上記の慣性力増分 $\{dx_m\}$ および減衰力増分 $\{dx_h\}$ を加えたものが、動的な場合の全節点力増分となる。すなわち、

$$\{dx_u\} = \{dx\} + \{dx_m\} + \{dx_h\} \quad (16)$$

(4) 剛性方程式

(1) および (3) において知られるように、温度変化の影響は式 (1) の $\{d\sigma\}$ に現われ、式 (9) で表わされる。他方、動的影響は式 (1) の $\{dx\}$ に現われ、このとき、温度変化も影響を及ぼし式 (16) を用いて表わされる。式 (1) および (8)~(16) より、要素の弾性剛性方程式は次のように示される。

(i) 温度変化および動的影響を考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^e]\{du\} + [H]\{d\dot{u}\} + [M]\{d\ddot{u}\} - [K_d^e]\{du^T\} + [dK^e]\{u^e\} \quad (17-a)$$

ここで、 $[K_d^e] = \int_V [B]^t [D_d^e] [B] dV$ ：増分後の温度に対する弾性剛性マトリックス

$$[dK^e] = \int_V [B]^t [dD^e] [B] dV : \text{弾性剛性マトリックス増分}$$

$$\{u^e\} : \text{増分前の弾性節点変位}$$

(ii) 温度変化の影響のみ考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^e]\{du\} - [K_d^e]\{du^T\} + [dK^e]\{u^e\} \quad (17-b)$$

(iii) 動的影響のみ考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K^e]\{du\} + [H]\{d\dot{u}\} + [M]\{d\ddot{u}\} \quad (17-c)$$

式 (17-a) および (17-c) は、節点変位増分 $\{du\}$ 、その速度増分 $\{d\dot{u}\}$ および加速度増分 $\{d\ddot{u}\}$ で表わした動的剛性方程式である。これを解くために、本論文では Newmark の β 法を適用して逐次積分を行う。この手順は次節で示す。

2.3 弾塑性剛性方程式

有限要素に塑性領域が生じる状態に対し、塑性節点法を導入して、要素の剛性方程式を導出する。

2.3.1 温度変化のない静的弾塑性剛性方程式^{3), 4)}

(1) 要素内のひずみ、応力とその関係

要素内には塑性ひずみが生じないので、ひずみ増分、応力増分とその関係は、式 (2) および (3) 式である。

(2) 節点変位、ひずみとその関係

塑性変形は節点に縮約されており、節点変位は弾性変位と塑性変位からなる。

$$\{du\} = \{du^e\} + \{du^p\} \quad (18)$$

ここで、 $\{du^p\}$ ：塑性節点変位増分

弾性変位は弾性ひずみと、弾性状態の時と同様式 (5) の関係をもつが、塑性変位は節点においてのみ生じるものと考えたと類似の関係をもたない。塑性節点変位増分については (3) で示す。

(3) 塑性条件、塑性節点変位増分

要素の節点 i における塑性条件は、節点 i の応力 σ_{xi} , σ_{yi} , $\dots$, τ_{xzi} と降伏応力 σ_Y によって、次のように表わされる。

$$f_i(\sigma_{xi}, \sigma_{yi}, \dots, \tau_{xzi}, \sigma_Y) = 0 \quad (19)$$

有限要素の各節点の応力は、一般には、その要素の j 個 ($j \leq n$, n ：要素の全節点数) の節点の節点力の関数となるので、塑性条件を節点力で表わすと、次のようになる。

$$F_i(\{x\}_1, \{x\}_2, \dots, \{x\}_j, \sigma_Y) = 0 \quad (20)$$

n 個の節点をもつ要素において、 $i=1$ から k までの k 個の節点が次のように塑性条件を満足し、塑性節点にな

っているとする。

$$F_i(\{x\}, \sigma_Y) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (21)$$

ここで、塑性節点において負荷が続く場合、加工硬化がないと仮定すると次の条件が満足されなければならない。

$$0 = dF_i = \{\phi_i\}^t \{dx\} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで, } \{\phi_i\} &= \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}_1}, \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}_2}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}_j} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}_1}, \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}_2}, \dots, \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}_n} \right\} \\ &= \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}} \right\}, \frac{\partial F_i}{\partial \{x\}_i} = \{0\} \quad (j < l \leq n) \end{aligned}$$

また、要素の塑性節点変位増分は、塑性流れ理論を適用し、式(20)で表わされる降伏関数を塑性ポテンシャルとみなすと、次のように表わされる。

$$\{du^p\} = \sum_{i=1}^k d\lambda_i \{\phi_i\} = [\Phi] \{d\lambda\} \quad (23)$$

ここで、 $\{d\lambda\} = \{d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_k\}$

$$[\Phi] = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k]$$

(4) 節点力

弾性挙動をする静的な場合と同じである。

$$\{dx_u\} = \{dx\} \quad (24)$$

(5) 剛性方程式

以上の基礎式を用いて弾塑性剛性方程式を導く。まず式(23)の $\{d\lambda\}$ を求める。式(1)に式(3), (5), (18)および(23)を順次代入していくと次式が得られる。

$$\begin{aligned} \{dx\} &= \int_V [B]^t \{d\sigma\} dV = \int_V [B]^t [D^e] \{d\epsilon^e\} dV \\ &= \int_V [B]^t [D^e] [B] \{du^e\} dV \\ &= \int_V [B]^t [D^e] [B] dV \cdot \{du^e\} \\ &= [K^e] (\{du\} - \{du^p\}) = [K^e] (\{du\} - [\Phi] \{d\lambda\}) \end{aligned} \quad (25)$$

更に、上式を式(22)に代入すると

$$\{\phi_i\}^t [K^e] (\{du\} - [\Phi] \{d\lambda\}) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (26)$$

式(26)は、 $\{d\lambda\}$ に関する1次連立方程式となっており、次のように書き改めることができる。

$$[\Phi]^t [K^e] (\{du\} - [\Phi] \{d\lambda\}) = \{0\} \quad (27)$$

式(27)を解くと、 $\{d\lambda\}$ は $\{du\}$ により次のように表わされる。

$$\{d\lambda\} = ([\Phi]^t [K^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^t [K^e] \{du\} \quad (28)$$

式(28)を式(25)に代入すると要素の弾塑性剛性方程式が求まる。

$$\{dx_u\} = [K^p] \{du\} \quad (29)$$

ここで、 $[K^p] = [K^e] - [K^e] [\Phi] ([\Phi]^t [K^e] [\Phi])^{-1}$

$\times [\Phi]^t [K^e]$: 弾塑性剛性マトリックス

2.3.2 温度変化のある動的弾塑性剛性方程式

(1) 要素内のひずみ、応力とその関係

要素内には塑性ひずみが生じないので、ひずみ増分、応力増分とその関係は、式(8)および(9)である。

(2) 節点変位、ひずみとその関係

節点変位は、弾性変位、塑性変位および熱変位からなる。

$$\{du\} = \{du^e\} + \{du^p\} + \{du^T\} \quad (30)$$

弾性変位と弾性ひずみ、熱変位と熱ひずみの関係は、式(11)で表わされる。

(3) 塑性条件、塑性節点変位増分

要素の温度が変化し、降伏応力が温度依存性を示す場合を考えると、各節点の降伏応力は節点温度の関数となり、節点力で表わした塑性条件、式(21)は次のようになる。

$$F_i(\{x\}, \sigma_{Yi}(T_i)) = 0 \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (31)$$

また、塑性節点において負荷が続くための条件は、式(22)に代わり、

$$0 = dF_i = \{\phi_i\}^t \{dx\} + \frac{\partial F_i}{\partial \sigma_{Yi}} d\sigma_{Yi} \quad (i=1, 2, \dots, k) \quad (32)$$

一方、塑性節点変位増分は、式(23)と同様である。

(4) 節点力

動的挙動を示す場合には慣性力および減衰力の効果が節点力に付加される。

(i) 慣性力: 要素の節点が塑性化し、要素が弾塑性状態にある場合の慣性力について考える。弾性的場合と同様ランプト・マス法とコンシステント・マス法を採用する。コンシステント・マス法を適用する場合、2つの考え方のもとに慣性力増分を求める。

(i-i) ランプト・マス法に基づく慣性力: 節点変位に塑性節点変位が加わるので、弾性的場合の式(12)は次のようになる。

$$\begin{aligned} \{dx_m\} &= [M_i] (\{d\ddot{u}^e\} + \{d\ddot{u}^T\} + \{d\ddot{u}^p\}) \\ &= [M_i] \{d\ddot{u}\} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで、 $\{d\ddot{u}^p\}$: 塑性節点変位加速度増分

(i-ii) コンシステント・マス法-I (塑性変形が節点に縮約されていると考える場合) に基づく慣性力: ここでは、塑性節点法の次の特性を考慮して、等価節点慣性力増分を求める。すなわち、塑性節点法では、塑性変形は節点に生じるが、その塑性領域の広がりは無いと考える。したがって、

(a) 塑性領域は質量を有さず、慣性力は塑性節点を除く弾性領域においてのみ生じる。

(b) 塑性節点の外側に作用する力、すなわち、節点力と要素の弾性領域側 (塑性節点の内側) の力は等しい。

まず(a)の仮定に基づき、弾性領域において生じる

Fig. 1 Element with plastic nodes and inertia forces

慣性力増分を弾性領域の端部で塑性関節に接する位置に設けた仮節点 (Fig. 1 参照) に対する等価節点慣性力増分に置き換える。仮想仕事の原理を用いると次式を得る。

$$\begin{aligned}\{du'\}^{*t}\{dx_m'\} &= \int_V \{du_{ei}\}^{*t} \rho \{d\ddot{u}_{ei}\} dV_{\text{elastic}} \\ &= \int_V \{du'\}^{*t} [A]^t \rho [A] \{d\ddot{u}'\} dV_{\text{elastic}} \\ &= \{du'\}^{*t} \int_V [A]^t \rho [A] dV_{\text{elastic}} \cdot \{d\ddot{u}'\} \quad (34)\end{aligned}$$

ここで, $\{dx_m'\}$: 仮節点に対する等価節点慣性力増分

$\{du'\}^*$: 仮節点に対する仮想変位

$\{du_{ei}\}^*$: 弾性領域での仮想変位

$\{du_{ei}\}^* = [A] \{du'\}^*$

$\{d\ddot{u}_{ei}\}$: 弾性領域での変位加速度増分

$\{d\ddot{u}_{ei}\} = [A] \{d\ddot{u}'\}$

上式により, 仮節点に対する等価節点慣性力増分 $\{dx_m'\}$ が求まる。この場合, 仮節点変位は, 要素の全節点変位から塑性変位を差し引いたもの, すなわち, 弾性節点変位と熱節点変位の和であるので, $\{dx_m'\}$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned}\{dx_m'\} &= [M_c] \{d\ddot{u}'\} = [M_c] (\{d\ddot{u}^e\} + \{d\ddot{u}^T\}) \\ &= [M_c] (\{d\ddot{u}\} - \{d\ddot{u}^p\}) \quad (35)\end{aligned}$$

ここで, $[M_c] = \int_V \rho [A]^t [A] dV_{\text{elastic}}$

: コンシステント・マス・マトリックス
(弾性状態と同じ)

ところで, 仮節点は塑性関節の内側に設定した節点であるので, 仮定 (b) により, 仮節点に作用する $\{dx_m'\}$ はそのまま要素の節点に作用する力と考えられる。したがって,

$$\begin{aligned}\{dx_m\} &= \{dx_m'\} = [M_c] (\{d\ddot{u}^e\} + \{d\ddot{u}^T\}) \\ &= [M_c] (\{d\ddot{u}\} - \{d\ddot{u}^p\}) \quad (36)\end{aligned}$$

(i-iii) コンシステント・マス法-II (塑性変形が要素内に分布していると考えられる場合) に基づく慣性力: ここで, 塑性変形が要素内で分布しているとして式 (25) に相当する関係式を導く。

$$\begin{aligned}\{dx\} &= \int_V [B]^t \{d\sigma\} dV = \int_V [B]^t [D^e] \{d\epsilon^e\} dV \\ &= \int_V [B]^t [D^e] (\{d\epsilon\} - \{d\epsilon^p\}) dV\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \int_V [B]^t [D^e] [B] \{du\} dV \\ &\quad - \int_V [B]^t [D^e] [B] \{du^p\} dV \\ &= [K^e] \{du\} - [K^e] \{du^p\} = [K^e] \{du^e\} \quad (37)\end{aligned}$$

上式の展開の過程より明らかのように, 要素内で $\{d\epsilon^p\}$ が $\{d\epsilon^e\}$ と同じ分布状態であると仮定すると, $\{d\epsilon^e\} = [B] \{du^e\}$, $\{d\epsilon^p\} = [B] \{du^p\}$ と表わされるので, これを用いると塑性変形が節点に縮約されているとした場合 (塑性節点法) と同じ剛性方程式になることがわかる。したがって, 前記のような仮定も一つの解釈の方法である。このような解釈のもとでは, 節点に囲まれている要素の変形は全節点変位と仮定した変位関数で表わされていることになり, 特に塑性変形が節点に縮約されていると考えなくてもよいことになる。コンシステント・マス法は, 剛性マトリックスとマス・マトリックスの定式化に同一の変位関数を用いることを基本的条件としている⁷⁾。したがって, 要素の変形は仮定した変位関数で連続的に表わされていると考え, その変位関数を用いて, マス・マトリックスを求めることもできる。このような考え方のもとに, (i-ii) と同様, 仮想仕事の原理を適用すると, 慣性力増分は次のように求められる。

$$\{dx_m\} = [M_c] (\{d\ddot{u}^e\} + \{d\ddot{u}^p\} + \{d\ddot{u}^T\}) = [M_c] \{d\ddot{u}\} \quad (38)$$

ただし, ここでは, 温度変化のある場合を考えているが, 式 (11) のように熱変位も弾性変位と同じ変位関数のもとに要素内で変化していると仮定している。

(ii) 減衰力: 要素に作用する減衰力増分は, 2.2.2 (3)(ii) で述べたように, 等価節点減衰力増分として, 式 (14) で与えられるものとする。ただし, 弾塑性状態では, 式 (14) での全節点変位速度増分 $\{d\dot{u}\}$ の中には, 塑性節点変位速度増分 $\{d\dot{u}^p\}$ も含まれる。

(iii) 全節点力増分: 応力増分による節点力増分 $\{dx\}$, 慣性力増分 $\{dx_m\}$ および減衰力増分 $\{dx_h\}$ の和が動的な場合の全節点力増分となる。

$$\{dx_u\} = \{dx\} + \{dx_m\} + \{dx_h\} \quad (39)$$

(5) 剛性方程式

前項までに新たに示した基礎式を用いて, 温度変化のある動的弾塑性剛性方程式を導く。 $\{d\lambda\}$ を求めるまでの過程は, 2.3.1(5) と同じである。すなわち, 式 (3), (18), (22) に代わり, 式 (9), (30), (32) を用いる。その結果, 式 (25), (27), (28) に対応して, 下式 (40), (41), (42) が得られる。

$$\{dx\} = [K_d^e] (\{du\} - [\Phi] \{d\lambda\} - \{du^T\}) + [dK^e] \{u^e\} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}[\Phi]^T \{[K_d^e] (\{du\} - [\Phi] \{d\lambda\} - \{du^T\}) \\ + [dK^e] \{u^e\} + [\Psi] \{d\sigma_Y\} = \{0\}\end{aligned} \quad (41)$$

ここで, $[\Psi] : \frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{Y1}}, \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{Y2}}, \dots, \frac{\partial F_k}{\partial \sigma_{Yk}}$ を対角成分とし
てもつ対角マトリックス

$$\{d\sigma_Y\} = \{d\sigma_{Y1}, d\sigma_{Y2}, \dots, d\sigma_{Yk}\}^T$$

$$d\sigma_{Yi} = \frac{d\sigma_{Yi}}{dT_i} dT_i : dT_i \text{ は各増分で既知量である}$$

ので, $d\sigma_{Yi}$ も各増分で既知量

$$\{d\lambda\} = ([\Phi]^t [K_d^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^t [K_d^e] \{d\ddot{u}\} \\ + ([\Phi]^t [K_d^e] [\Phi])^{-1} (-[\Phi]^t [K_d^e] \{d\dot{u}^T\} \\ + [\Phi]^t [dK^e] \{u^e\} + [\Psi] \{d\sigma_Y\}) \quad (42)$$

ところで, 全節点力増分 $\{dx_u\}$ には, 弾性の場合と同様, 動的挙動では, 慣性力増分および減衰力増分が加わる。慣性力増分としては, 前項で3つのタイプを考えたが, 式の展開上は, 2つのタイプ, すなわち, $[M]\{d\ddot{u}\}$ ((i-i) および (i-iii)) と $[M]\{d\ddot{u}\} - [d\ddot{u}^p]\}$ ((i-ii)) に分けられよい。以下では, それぞれに対して剛性方程式を求める。

(i) 慣性力増分として $[M]\{d\ddot{u}\} - [d\ddot{u}^p]\}$ タイプを用いる場合: 式 (40) に, 式 (36), (14) を代入すると,

$$\{dx_u\} - [M]\{d\ddot{u}\} - [d\ddot{u}^p]\} - [H]\{d\dot{u}\} \\ = [K_d^e]\{d\dot{u}\} - [\Phi]\{d\lambda\} - [d\dot{u}^T]\} + [dK^e]\{u^e\} \quad (43)$$

上式に含まれている $\{d\ddot{u}^p\}$ は式 (23) および (42) より次のように表わされる。

$$\{d\ddot{u}^p\} = [\Phi]\{d\ddot{\lambda}\} \\ = [\Phi]\{([\Phi]^t [K_d^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^t [K_d^e] \{d\ddot{u}\} \\ + ([\Phi]^t [K_d^e] [\Phi])^{-1} (-[\Phi]^t [K_d^e] \{d\dot{u}^T\} \\ + [\Phi]^t [dK^e] \{u^e\} + [\Psi] \{d\sigma_Y\})\} \quad (44)$$

式 (43) に, 式 (42), (44) を代入すると, 要素の弾塑性剛性方程式が求まる。

(a) 温度変化及び動的影響を考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^p]\{d\dot{u}\} + [H]\{d\dot{u}\} + [M][G_{I1}]\{d\ddot{u}\} \\ - [K_d^p]\{d\dot{u}^T\} + [G_{I2}][dK^e]\{u^e\} \\ - [K_d^e][Q]\{d\sigma_Y\} \\ + [M]([G][K_d^e]\{d\ddot{u}^T\} - [G][dK^e]\{u^e\} \\ - [Q]\{d\sigma_Y\}) \quad (45-a)$$

ここで, $[G] = [\Phi]([\Phi]^t [K_d^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^t$,
 $[Q] = [\Phi]([\Phi]^t [K_d^e] [\Phi])^{-1} [\Psi]$,
 $[G_{I1}] = [I] - [G][K_d^e]$,
 $[G_{I2}] = [I] - [K_d^e][G]$,
 $[I]$: 単位マトリックス

(b) 温度変化の影響のみ考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^p]\{d\dot{u}\} - [K_d^p]\{d\dot{u}^T\} \\ + [G_{I2}][dK^e]\{u^e\} - [K_d^e][Q]\{d\sigma_Y\} \quad (45-b)$$

(c) 動的影響のみ考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^p]\{d\dot{u}\} + [H]\{d\dot{u}\}$$

$$+ [M][G_{I1}]\{d\ddot{u}\} \quad (45-c)$$

式 (45-a) および (45-c) は, 節点変位増分 $\{d\dot{u}\}$ に対する2階の連立常微分方程式であり, これを連立1次方程式の形に改めるために, Newmark の β 法 ($\beta=1/6$) を適用し, $\{d\ddot{u}\}, \{d\dot{u}\}$ を $\{d\dot{u}\}, \{\dot{u}\}, \{\ddot{u}\}$ で表わすと, 逐次積分法で解ける形になる。式 (45-a) に対して示すと次のようになる。

$$\{dx_u\} = \left([K_d^p] + \frac{3}{dt} [H] + \frac{6}{dt^2} [M][G_{I1}] \right) \{d\dot{u}\} \\ - [K_d^p]\{d\dot{u}^T\} + [G_{I2}][dK^e]\{u^e\} \\ - [K_d^e][Q]\{d\sigma_Y\} \\ - [H]\left(3\{\dot{u}\} + \frac{dt}{2}\{\ddot{u}\} \right) \\ + [M]\left\{ [G][K_d^e]\{d\dot{u}^T\} - [G][dK^e]\{u^e\} \right. \\ \left. - [Q]\{d\sigma_Y\} - [G_{I1}]\left(\frac{6}{dt}\{\dot{u}\} + 3\{\ddot{u}\} \right) \right\} \quad (46)$$

(ii) 慣性力増分として $[M]\{d\ddot{u}\}$ タイプを用いる場合: 式 (40) に, 式 (38), (14) および (42) を代入すると, 要素の弾塑性剛性方程式が次のように求められる。

(a) 温度変化および動的影響を考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^p]\{d\dot{u}\} + [H]\{d\dot{u}\} + [M]\{d\ddot{u}\} \\ - [K_d^p]\{d\dot{u}^T\} + [G_{I2}][dK^e]\{u^e\} \\ - [K_d^e][Q]\{d\sigma_Y\} \quad (47-a)$$

(b) 温度変化の影響のみ考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^p]\{d\dot{u}\} - [K_d^p]\{d\dot{u}^T\} \\ + [G_{I2}][dK^e]\{u^e\} - [K_d^e][Q]\{d\sigma_Y\} \quad (47-b)$$

(c) 動的影響のみ考慮した場合

$$\{dx_u\} = [K_d^p]\{d\dot{u}\} + [H]\{d\dot{u}\} \\ + [M]\{d\ddot{u}\} \quad (47-c)$$

式 (47-a) および (47-c) を解くためには, (i) の時と同様に, Newmark の β 法 ($\beta=1/6$) を用いる。この結果, 式 (47-a) は次のように表わされる。

$$\{dx_u\} = \left([K_d^p] + \frac{3}{dt} [H] + \frac{6}{dt^2} [M] \right) \{d\dot{u}\} \\ - [K_d^p]\{d\dot{u}^T\} + [G_{I2}][dK^e]\{u^e\} \\ - [K_d^e][Q]\{d\sigma_Y\} - [H]\left(3\{\dot{u}\} + \frac{dt}{2}\{\ddot{u}\} \right) \\ - [M]\left(\frac{6}{dt}\{\dot{u}\} + 3\{\ddot{u}\} \right) \quad (48)$$

3 解 析 例

塑性節点法による熱弾塑性挙動および動的弾塑性挙動の解析例を示す。

Fig. 2 Model for thermal elastic-plastic analysis (butt weld)

3.1 熱弾塑性解析 (溶接残留応力の解析)

塑性節点法による熱弾塑性解析例として Fig. 2 に示す平板の突合せ溶接で、溶接が溶接線上瞬間熱源で行われたと想定した場合を示す (溶接条件は板寸法とともに図中に示している)。

実際の計算では Fig. 2 に破線で示すような溶接線に垂直方向の細長い片である簡単なモデルを取り扱う。境界条件は片の側面 (破線で示した面) を常に平面に保ち、溶接部が剛性を有さない時期は、その面が平行移動と回転変形を起こし、剛性を回復すると回転変形は拘束され、平行移動のみ生じうるものとする。

解析は、まず要素内ひずみ一定の三角形要素を用い有限要素法で行った。次に塑性節点法で解析を行った。この解析法は塑性化による剛性計算での数値積分を必要としない特徴をもっているため、要素内でひずみおよび温度がともに変化すると要素の精度を向上させることが容易である。ここでは、熱応力解析において温度とひずみが要素内で線形変化する長方形要素を用いる。

Fig. 3 Mechanical properties of the model

Fig. 2 に示すように細長片の長さ方向 (板幅方向) に 10 分割するだけとした (有限要素法では、その解を正解として比較の対象にするため、板幅方向に充分細かく分割し、40 分割とし、80 要素を用いた)。

Fig. 3 に解析に用いた材料の力学的性質を示す。力学的熔融温度を 750°C とし、それ以上の温度域では剛性を有さず、それ以下では、図に示すような温度依存性を示すものとする。また降伏条件は Mises の条件を用いた。

次に解析結果を示す。まず、有限要素法による結果を Fig. 4 に破線で示す。Fig. 4 は溶接線方向応力の板幅方向の分布を示したもので、過渡および残留応力を、その時点での塑性領域とともに示している。(a) は溶接部が剛性を回復した直後で、その後 (b) のように変化し、(c) は残留応力分布である。この Fig. 4 に塑性節点法の適用により得られた結果を実線で示す。また、各時点での塑性関節の生成状態も示す。要素内で応力が変化していること、また、位置により温度が異なるため降伏応力が異なることにより、同じ要素内でも塑性関節が生じている節点と生じていない節点が見られる。2つの解析法による結果を比較すると、過渡および残留応力分布、また、塑性化の状態とも非常に一致しており、本解

Fig. 4 Transient and residual stresses, and plastic zone and plastic nodes

Fig. 5 Time-deflection relations of beams under impact lateral load, and plastic zone and plastic nodes

析法は、要素内でひずみおよび温度が変化することを考慮した精度の高い要素の適用が容易であることより、かなり粗い要素分割でも十分高い精度の解が得られることがわかる。

3.2 動的弾塑性挙動解析

塑性節点法による動的弾塑性解析理論では、慣性力の取扱いに3種類あることを示した。本節では、これらを用い、衝撃横荷重を受ける梁および板の微小弾塑性挙動を解析し、理論の適用性を検討する。また、このために通常の有限要素法による解析を行い、本理論による解析結果を比較する。なお解析における時間増分は、それぞれの荷重条件のもとで最も精度のよい弾性応答の解（たわみ）を与えるように選ぶ。また、減衰力は作用しないものとして解析する。

(1) 梁の衝撃曲げ

Fig. 5 に示す両端固定の矩形断面梁にステップ状の中央集中荷重が作用する場合を、1次元梁要素を用いて解析した。要素分割は、塑性節点法、有限要素法ともに長さ方向に20分割とした。また、有限要素法では、各要素を板厚方向に20層に等分割しただけの場合（要素内分割タイプ EI-I）と、更に、長さ方向にも10分割し弾塑性の領域区別を厳密にした場合（EI-II）の2つの要素内分割を考えた。荷重の大きさは、梁の塑性解析における静的崩壊荷重の80%とし、1時間増分（0.0009ms）間に作用し、以後一定荷重として作用し続けるものとした。

塑性節点法では、節点の断面モーメントが全塑性モーメントに達したときに、全断面塑性が生じ、有限要素法

Table 1 Methods of analysis (beam)

Method	EI-pl analysis (Mesh type)	Inertia force
1	P.N.M.	Lumped
2	P.N.M.	Consistent-I
3	P.N.M.	Consistent-II
4	F.E.M. (EI-I)	Lumped
5	F.E.M. (EI-II)	Lumped
6	F.E.M. (EI-I)	Consistent
7	F.E.M. (EI-II)	Consistent

では、要素内の各領域の中心での応力が降伏応力に達したとき、その領域が降伏するとしている。本例では、梁の弾塑性応答を対象とするので、解析にあたっては、除荷および再負荷の判定を厳密に評価しており、各時間増分ごとに正しい釣合状態を求めつつ進めている。

解析は、Table 1 に示す7つの方法で行った。その結果をFig. 5 に示す。まず、有限要素法による結果をみると、各要素内で長さ方向にも分割し弾塑性の領域を精度よく取り入れた要素内分割タイプ EI-II を用いた場合は、ランプト・マス法とコンシステント・マス法の結果はほぼ完全に一致している。要素内分割の粗いタイプ EI-I を用いた場合は、ランプト・マス法の結果は不安定な振動を示し、コンシステント・マス法による結果は、安定はしているが、たわみ量が小さくなっている。これに対して、塑性節点法を適用した解では、慣性力としてランプト・マス法を用いた場合とコンシステント・マス

Fig. 6 Time-deflection relations of plates under impact lateral distributed load and plastic nodes

法-IIを用いた場合は、解はほとんど完全に一致し安定した応答現象を示すとともに、有限要素法で要素内分割の細かい場合の解にかなり近い。なお、コンシステント・マス法-Iを用いた場合は、梁の中央で最初の塑性節点を生じた直後、慣性力が急激に増加し、隣接節点も塑性化し崩壊し、解は発散する。安定した応答が得られた場合には、梁の中央と両端が塑性化し、静的な場合と同じ崩壊メカニズムが形成された後も、塑性変形が進行することにより運動エネルギーが吸収され、崩壊には至っていない。

(2) 正方形板の衝撃曲げ

次に、Fig. 6に示す周辺単純支持の正方形板にステップ状の等分布荷重(荷重の大きさは前例同様、塑性解析での静的崩壊荷重の80%とした)が作用する場合を解析した。解析は変形を対称モードのみと仮定し、正方形板の1/8の部分のみについて行った。要素としては、非適合三角形板曲げ要素を用いた。梁要素と異なり、この要素では、各節点の応力は、要素のすべての節点の節点力の関数と

なる。そのため、塑性節点法では、ある節点が塑性化した場合、弾性節点にも見かけの塑性変位が生じるという特徴がある。また、有限要素法では、各要素を板厚方向に20層に等分割した。

解析は、Table 2に示す5つの方法で行った。この場合も、コンシステント・マス法-Iを用いた塑性節点法では初期塑性直後、崩壊し、解は発散するが、他の4つの方法による結果はよく一致しており、塑性節点法の有効性を示していると考えられる。

以上の解析結果を検討すると、まず、塑性節点法の有効性が確認された。その他、慣性力の取り扱いでランプト・マス法を用いると、一般には精度が良くないと考えられているが、本論文の2つの解析例では一つの結果を除き、精度は非常に高いことが知られた。

その理由として、これらの例では、回転慣性が全体の挙動に及ぼす影響が十分小さかったためと考えられる。また、コンシステント・マス法を塑性節点法に導入する場合、2つのタイプが考えられるが、そのうちタイプIの方が理論的に適合しているようであるが、実際の解析では、塑性節点が生じると、慣性力が急増し、隣接節点に塑性化を生じさせ塑性崩壊し、計算は続行しない。他方、実際の弾塑性挙動を観察すると、塑性変形が生じる部分にも質量があり、このような見地からタイプIIは現実即した取り扱いであると考えられ、このタイプIIを用いた塑性節点法も、精度の高い適用性をもつことを確認した。しかし、その理論的背景について今後も考察を続ける予定である。

4 結 論

本研究では、塑性節点法による解析理論を動的熱弾塑性問題に拡張し、いくつかの解析例を示した。得られた結果を要約すると、

(1) 温度変化の影響として、熱ひずみの生成および力学的性質の温度依存性を、また動的影響として、慣性力および減衰力の作用を考慮して理論式を展開した。その結果、各影響の連成項が生じるが、実際の解析では、熱弾塑性問題、動的弾塑性問題と分けて行い、理論の適用性を検討した。

(2) 熱弾塑性問題としては、材料が剛性を失う温度まで上昇する温度変化の激しい溶接問題を取り上げ、平板の突合せ溶接による残留応力の解析を行った。塑性節点法の長所を生かすことのできる要素内でひずみと温度

Table 2 Methods of analysis (plate)

Method	El-pl analysis (Mesh type)	Inertia force
1	P.N.M	Lumped
2	P.N.M.	Consistent-I
3	P.N.M.	Consistent-II
4	F.E.M.	Lumped
5	F.E.M.	Consistent

が線形変化する長方形要素を用いた結果、かなり粗い分割でも精度の高い解が得られた。

(3) 動的弾塑性問題としては、両端固定梁に中央集中荷重が、また周辺支持板に等分布荷重が衝撃的に加わる場合を取りあげた。慣性力としてランプト・マス法およびコンシステント・マス法-IIを用いた塑性節点法と有限要素法による解とはよく一致し、本解析法の精度の高い適用性が確認された。また、これらの理論による梁の解析では、静的な場合と同じ崩壊機構が形成された後も崩壊に至らないという結果が得られた。ここでは微小変形として解析を行っているので、今後、大たわみの影響を取り入れて解析することも必要と考えられる。

最後に、本研究で塑性節点法熱弾塑性解析において、プログラムの開発など多大の協力を得た田伏範幸君（石川島播磨重工業(株)、研究当時大阪大学大学院）に感謝する。

参 考 文 献

- 1) 上田, 松石, 山川, 赤松: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第124号 (1968), pp. 183~191.
- 2) 上田, 赤松, 近江: マトリックス法による骨組構造の弾塑性解析 (その2), 日本造船学会論文集, 第126号 (1969), pp. 253~262.
- 3) 上田, 矢尾, 藤久保: 塑性関節法の一般化に関する研究, 日本造船学会論文集, 第146号 (1979), pp. 307~313.
- 4) Y. Ueda, T. Yao: The plastic Node Method—A New Method of Plastic Analysis, Computer Methods in Applied Mechanics and Engr., Vol. 34, No. 1~3, Sept. 1982, pp. 1089~1104.
- 5) Y. Ueda, T. Yamakawa: Analysis of Thermal Elastic-Plastic Stress and Strain during Welding by Finite Element Method, IIW Doc. X-616-71, and Trans. of the Japan Welding Society, 2-2 (1971), 及び上田, 山川: 有限要素法による熱弾塑性挙動の解析, 溶接学会誌, 42-6 (1973), 567~577.
- 6) E. L. Wilson: A Computer Program for the Dynamic Stress Analysis of Underground Structures, USAEWES, Contract Report No. 1-175 (Jan. 1968).
- 7) C. S. デサイ, J. F. アーベル (山本善之訳): マトリックス有限要素法, 初版, 科学技術出版社, 1974, pp. 396~402.