薄肉構造の離散化極限解析 (その 5)

——軸圧縮荷重を受ける円筒殻の非軸対称塑性座屈モード——

正員 都 井 裕* 正員 川 井 忠 彦**

Discrete Limit Analysis of Thin-Walled Structures (Part 5)

——Non-axisymmetric plastic buckling mode of axially compressed circular cylindrical shells——

by Yutaka Toi, *Member* Tadahiko Kawai, *Member*

Summary

The relation between radius-to-thickness ratios and non-axisymmetric plastic buckling patterns for axially compressed circular cylindrical shells was investigated from both analytical and experimental viewpoints. The obtained results are summarized as follows:

(1) The lower bound value $(R/t)_{el}$ (eq. (6)) of the radius-to-thickness ratios which produce the non-axisymmetric buckling pattern with n circumferential waves was determined by applying the elastic buckling theory, and its validity was confirmed through comparison with the experimental data given by Horton et al.

(2) Numerical calculations of non-axisymmetric buckling stresses were carried out by using the simulator with 9 degrees of freedom which was composed of 6 rigid elements idealizing the periodic unit area of Yoshimura buckle pattern, and the value of $(R/t)_{pl}$ (Table 1 and Table 2) was obtained corresponding to the circumferential wave number n .

(3) It was certified that the value of $(R/t)_{pl}$ can be almost considered as the lower bound to each circumferential wave number by conducting the compression tests for mild steel circular cylinders (Fig.10), however, more experimental data will be needed in order to establish the above conclusion.

1 序

平板剛体要素モデルによる幾何学的および材料非線形性を考慮した離散化極限解析アルゴリズム¹⁾を薄肉構造要素の安定問題に適用すると、柱の塑性座屈問題における Shanley model³⁾の板殻構造への一般化が可能であり、非弾性構造安定問題の定性的研究に特に有用な一連の低自由度シミュレーションモデルが構成されることを本研究の第3報¹⁾で柱および平板に対する数値例を通じて明らかにした。代表的な殻構造である円筒殻の座屈挙動に関しては、Yoshimura buckle pattern⁴⁾の基本周期領域を6剛体要素に離散化した9自由度シミュレータを構成し、非軸対称弾性座屈問題に対する固有値解析をすでに実施しているが^{1),2)}、本報ではこのシミュレータを軸圧縮荷重を受ける円筒殻の塑性安定問題に応用し、

特にその半径・肉厚比と生ずる非軸対称モードの関係についての考察を試みる。また合わせて、構造部材、配管材として重要な円筒鋼管に対する圧縮実験を実施し、シミュレーション結果の妥当性を確認する一助としたい。

2 軸圧縮荷重を受ける円筒殻の塑性座屈モード

Fig. 1 に軸圧縮力を受ける円筒殻の座屈応力 σ_{cr} と半径・肉厚比 R/t の関係を模式的に示す。図中の曲線 BC は弾性座屈応力の古典理論解⁵⁾であり、軸対称および非軸対称モードに関し同じ値をとる。また、直線 AY と曲線 AP はそれぞれ降伏応力 σ_y およびひずみ硬化を無視した場合の塑性座屈応力であり、 σ_p は比例限応力を意味する。

点 P における半径・肉厚比 $(R/t)_p$ より小なる R/t を有する円筒殻には塑性座屈現象が生じ得るが、一對の互いに平行な加圧盤間に試験体を設置して行う通常の圧縮

* 東京大学工学部

** 東京大学生産技術研究所

Fig. 1 Schematic diagram for buckling stresses of axially compressed circular cylindrical shells

試験においては、 R/t が零から $(R/t)_P$ に至る範囲で一般に次のような3種類の座屈崩壊過程が存在する⁶⁾。

- (i) 軸対称塑性座屈後、軸対称モードを保つ。
- (ii) 軸対称塑性座屈後、非軸対称モードに分岐する。
- (iii) 初めから非軸対称座屈を生ずる。

試験機内で圧縮状態にある円筒殻には、端部の半径方向変位が加圧盤との摩擦により拘束されるため、ポアソン比に起因するバルジ変形 (bulging) を生ずる。その影響で最初に上端あるいは下端部近傍が軸対称塑性座屈によりリング状に変形し、以後、非軸対称モードに分岐し一端から他端へ連続的に畳み込まれながら圧壊してゆくのが上述の (ii) の崩壊過程であり、比較的 R/t の小さい範囲で観察される。非軸対称モードを形成するに十分な長さをもたない短い円筒殻の場合は、リング状の変形モードのまま圧壊する (i) の崩壊過程となる。 R/t が比較的大きい範囲では (iii) の崩壊過程が見られるが、初期不整の影響により弾性座屈応力が古典理論解を下回る可能性を考慮すれば、 $(R/t)_P$ の近傍で生ずる非軸対称座屈は必ずしも塑性座屈とはいえない。

軸圧縮荷重を受ける円筒殻の塑性安定問題に関しては過去に多数の解析的・実験的研究^{7)~11)} (解説論文 12), 13) に相当数の文献が引用されている) が行われており、塑性座屈応力値に関しては塑性変形理論の適用⁷⁾、塑性流れ理論の適用⁸⁾、端部拘束の影響⁹⁾、初期不整の影響¹⁰⁾ など詳細な検討がなされているが、座屈後挙動、特に非軸対称座屈モードについては大きな関心は払われていない。一般には最終耐力、すなわち最大応力値が工学的に最も重要であるが、塑性安定論の基本課題として、また衝撃エネルギー吸収部材としての特性把握の観点などからも圧縮円筒に生ずる非軸対称モードの検討は興味深く、本報告で考察を試みる次第である。

なお、非軸対称モードに着目した円筒殻の圧縮実験は過去に Horton ら⁶⁾ によって実施されており、Fig. 1 における $0 \leq R/t \leq (R/t)_P$ のほぼ全域を網羅する系統的な実験データが発表されているが、他には、塑性座屈応力を論じた文献中に特定の R/t に対するデータが散見される程度である。

3 弾性座屈理論による考察

前章で述べたように、Fig. 1 における $(R/t)_P$ (比例限が不明確な場合は $(R/t)_Y$) の近傍の領域に対しては、弾性座屈理論により非軸対称モードを検討することが可能と予想される。したがって本章では、弾性理論により半径・肉厚比 R/t と非軸対称モードにおける周方向波数 n の関係を求め、Horton らの実験結果と比較する。

3.1 弾性理論による R/t と n の関係

軸圧縮荷重を受ける円筒殻に対する弾性座屈応力：

$$\sigma_{cr} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \cdot \frac{t}{R} \quad (1)$$

に対応する非軸対称座屈モードは次式で表現される⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} &= \frac{2R}{t} \sqrt{3(1-\nu^2)} \\ \lambda &= \frac{m\pi R}{L} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、 L は円筒殻の長さ、 m は軸方向半波数、 n は周方向波数であり、非軸対称モードは一意には定まらない。

いま軸方向波長の周方向波長に対する比 β ：

$$\frac{2L}{m} = \beta \frac{2\pi R}{n} \quad (3)$$

を新しいパラメータとして導入すれば、非軸対称モードを決定する関係式 (2) 式は n, β 、および R/t により次のように表現される。

$$n^2 \left(\beta + \frac{1}{\beta} \right)^2 = \frac{2R}{t} \sqrt{3(1-\nu^2)} \quad (4)$$

ここで $(\beta + 1/\beta)$ の最小値は 2 ($\beta = 1$ のとき) である。したがって

$$2n^2 \leq \frac{R}{t} \sqrt{3(1-\nu^2)} \quad (5)$$

なる関係を満足しない R/t に対しては周方向波数 n の非軸対称座屈モードは存在しないことになり、換言すれば (5) 式は周方向波数 n の非軸対称座屈モードを生ずる R/t の下限値を与えている。これを次のように記す。

$$\left(\frac{R}{t} \right)_{ei} = \frac{2n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (6)$$

3.2 Horton による実験結果との比較

Horton らは文献 6) において R/t の異なる多数のアルミニウム (2024-T4) 製円筒の圧縮試験を実施し、 R/t と非軸対称モードにおける周方向波数 n の間に明瞭な相関が存在することを確認している。2024-T4 アル

Fig. 2 Variation in circumferential wave number (n) as a function of R/t for 2024-T4 aluminum circular cylinders

ミニウムの材料定数を $E=10.8 \times 10^6$ psi, $\nu=0.3$, $\sigma_y=60,200$ psi (0.5% 耐力) とすれば, Fig. 1 における $(R/t)_Y$ は約 109 である。Horton らの実験における試験体は R/t が約 20 から 130 の間に分布しており, これは塑性座屈を生じ得る範囲 $0 \leq R/t \leq (R/t)_P$ の全域にほぼ対応している。

(6)式により各非軸対称モードに対する半径・肉厚比の下限值 $(R/t)_{el}$ を計算し, 実験結果とともに図示すると Fig. 2(a) を得る。実験で周方向波数 n の非軸対称モードが観察された試験体の R/t 値は, すべての n に対して $(R/t)_{el}$ を上回っている。 $n=2$ および $n=3$ に対する実験点が存在しないのは, すべての試験体が $L/R=3.40$ に統一されており, 低次の非軸対称モードを生ずるためには長さ L が若干不足していることが理由である。その結果 R/t が 20~25 程度の試験体は軸対称モードのまま圧壊している。

Fig. 2(a) の横軸を $(R/t)_{el}$ で除して無次元化した結果を Fig. 2(b) に示す。図から明らかなように, n が増大する程, あるいは R/t が $(R/t)_P$ に近付く程, (6)式で定まる $(R/t)_{el}$ が精度のよい下限値を与えていることがわかる。これは (6) 式が弾性座屈理論に基づいて

いる以上, 必然的な帰結であり, $(R/t)_P$ の近傍では (6) 式による非軸対称モードの予測がある程度まで可能であることを示唆している。なお, 実験で $n=1$ のモードを生じた円筒は, 十分な長さを有していれば $n=3$ 程度の非軸対称モードを生ずるはずであり, Fig. 2(b) では $n=3$ の位置に表示している。

4 塑性座屈シミュレーションによる考察

円筒殻の半径・肉厚比 R/t が $(R/t)_P$ に比較して十分に小さい領域では弾性座屈理論は適用できず, 塑性変形を考慮した検討が必要となる。本章では平板剛体要素モデルによる数値シミュレーションにより, R/t と非軸対称モードにおける周方向波数 n の関係を考察する。

4.1 平板剛体要素モデルによるシミュレーション

3.1 節の弾性解析では, Fig. 1 における弾性座屈応力曲線 BC 上で各非軸対称モードに対し $\beta=1$ (周方向波長と軸方向波長が等しい) となる点を見出すことにより, 各 n に対する R/t の下限値を求めた。塑性座屈曲線 AP に対しても同様の手順を踏めば, R/t が十分に小さい領域における R/t と n の関係を把握することが可能と推定される。

軸圧縮力を受ける円筒殻の軸対称塑性座屈応力に対する理論解としては, 接線係数理論による解⁵⁾:

$$\sigma_{cr} = \frac{tE_t}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (7)$$

曲げ剛性のみを接線係数に置換した Timoshenko の解⁵⁾:

$$\sigma_{cr} = \frac{t\sqrt{EE_t}}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}} \quad (8)$$

塑性変形理論による Gerard の解⁷⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{cr} &= \frac{t\sqrt{E_s E_t}}{R\sqrt{3(1-\mu^2)}} \\ \mu &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} - \nu \right) \frac{E_s}{E} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

塑性流れ理論による Batterman の解⁹⁾:

$$\sigma_{cr} = \frac{2E}{\{3[(5-4\nu)E/E_t - (1-2\nu)^2]\}^{1/2}} \cdot \frac{t}{R} \quad (10)$$

などが知られている。ここに, E_t および E_s は接線係数およびセカント係数である。塑性座屈応力曲線 AP として (7)~(10) 式のいずれかの解を用いるものとする。

曲線 AP 上で $\beta=1$ の各非軸対称モードに対応する点を求める過程は数値計算による。すなわち, Fig. 3(a) に示す Yoshimura buckle pattern の基本周期領域 1234 を Fig. 3(b) のように 6 剛体要素にモデル化した 9 自由度シミュレータ¹⁾を用いて, 荷重増分法により各非軸対称モードに対する塑性座屈応力を R/t の関数

Fig. 3 Buckling simulator for circular cylindrical shells

として計算し、曲線 AP との交点として求める点を得る。この結果定まる R/t 値の数列は、弾性解析の場合と同様に解釈すれば、各周方向波数 n に対する R/t の下限値を与えることになる。しかし、 R/t が $(R/t)_p$ に比べ十分に小さい場合の非軸対称モードは軸対称座屈モードからの分岐の結果生ずるので初めの軸対称変形が初期不整としての効果を有すること、また平板剛体要素モデルによるシミュレータの計算値は弾性ばね定数の設定法に依存することを考慮すれば、計算のみで上述のような解釈を下すことは避けるべきであり、実験事実と照らし合わせた上で矛盾しない意味付けを行う必要がある。

4.2 炭素鋼鋼管における R/t と n の関係

前節で説明した計算手順を JIS の一般構造用炭素鋼鋼管 STK 41 に適用する。材料定数としては引張試験により次の値を得た。

$$\begin{cases} E=24,000 \text{ kg/mm}^2 \\ \nu=0.3 \\ \sigma_p=25.70 \text{ kg/mm}^2 \\ \sigma_y=35.65 \text{ kg/mm}^2 \end{cases}$$

比例限以後、降伏応力に達する間は、Fig. 4 のように

$$\frac{E_t}{E} = -\frac{10}{3} \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_y} - 1 \right) \quad (11)$$

に従い接線係数が減少するものと仮定した。

ひずみ硬化率を零と仮定した場合の軸対称塑性座屈応力は前節の (7)~(10) 式のいずれを用いても大差ない。本計算では Timoshenko による (8) 式の解を使用した。また、Yoshimura buckle pattern による非軸対称塑性座屈応力の計算に際しては、Fig. 3 の節点 1, 3 に負方向、2, 4 に正方向の初期たわみ (肉厚の 1/1,000) を付与した。

計算結果を Fig. 5 に示す。図から軸対称および非軸対

Fig. 4 Tangent modulus versus equivalent stress for mild steel

Fig. 5 Buckling stresses for STK 41 mild steel circular cylinders

Table 1 $(R/t)_{pl}$ versus n for STK 41 mild steel cylinders

n	2	3	4	5	6	7	8
$(R/t)_{pl}$	18	31	44	57	70	83	96

称塑性座屈応力曲線の交点として、周方向波数 n に対する R/t の値 (これを $(R/t)_{pl}$ と記す) を読み取ると、大略 Table 1 に示すような値を得る。

4.3 ステンレス鋼鋼管における R/t と n の関係

同様の手順により、304 ステンレス鋼鋼管の R/t と n の関係を検討した。材料定数は文献 (11) に記載の次の値を用いた。

$$\begin{cases} E=31.5 \times 10^6 \text{ psi} \\ \nu=0.274 \\ \sigma_p=23,600 \text{ psi} \\ \sigma_y=36,500 \text{ psi} \end{cases}$$

比例限以後の接線係数は近似的に次式により表現した。

$$E_t = \frac{\sigma - 67270}{-1.2934\sigma + 29134} \times 10^6 \text{ (psi)} \quad (12)$$

実際の応力・ひずみ曲線との比較を Fig. 6 に示す。

Fig. 6 Stress-strain diagram for 304 stainless steel

Fig. 7 Buckling stresses for 304 stainless steel circular cylinders

Table 2 $(R/t)_{pl}$ versus n for 304 stainless steel cylinders

n	2	3	4	5	6
$(R/t)_{pl}$	5	17	31	48	70

ステンレス鋼のようにひずみ硬化の大きい材質の円筒殻に対しては、4.1節に示した諸理論解の中で、Gerardによる(9)式の解と実験結果との一致が良好であることが Sobel らにより確認されている¹¹⁾。よってステンレス鋼鋼管の軸対称塑性座屈応力としては Gerard の解を使用する。非軸対称塑性座屈応力の計算には前節と同様の微小な初期たわみの存在を仮定した。

Fig. 7 に非軸対称モードの周方向波数 $n=2\sim6$ に対する計算結果を示す。図から軸対称および非軸対称座屈応力曲線の交点を読み取ると、各 n に対する $(R/t)_{pl}$ として Table 2 に示す値を得る。

5 円筒殻の圧縮実験および計算値との比較

JIS の一般構造用炭素鋼鋼管 STK 41 (2 体) および STPY 41 (1 体) に対する圧縮実験を実施した。Horton

Table 3 Dimensions and properties of mild steel cylinders

Cylinders	R [mm]	t [mm]	R/t	L [mm]	Material
C-1	78.9	7.15	11.0	805	STK 41
C-2	156.1	6.30	24.8	1000	STK 41
C-3	276.2	6.20	44.5	1510	STPY 41

(a) specimen C-1

(b) specimen C-2

(c) specimen C-3

Fig. 8 Axial load/end shortening curves for mild steel circular cylinders

Table 4 Experimental results for mild steel cylinders

Cylinders	$\sigma_{\max}$ (Timoshenko) [kg/mm ²]	n	n_A ($nL/2\pi R$)
C-1	45.4 (35.64)	2	3 (3.25)
C-2	35.0 (35.61)	3	3 (3.06)
C-3	34.0 (35.53)	3	4 (2.61)

の実験で欠けている最低次付近 ($n=2$ および 3) の実験データを得て、前章の計算値の確認あるいは解釈を行うことが実験の目的である。

5.1 炭素鋼鋼管の圧縮実験

Table 3 に各試験体の寸法および材料を示す。各試験体は試験機の加圧盤間に単純に据え置かれ軸方向に圧縮された。

実験結果を Table 4, Fig. 8, Fig. 9 に示す。Table 4

には初期の軸対称塑性座屈時の最大応力値 $\sigma_{\max}$ (括弧内は (8) 式による Timoshenko の解), 非軸対称モードに分岐後の周方向波数 n , 軸方向波数 n_A (括弧内は $\beta=1$ を仮定した場合の軸方向波数) が示されている。Fig. 8 および Fig. 9 は各試験体に対する荷重・縮み量曲線および最終圧壊形状である。

試験体 C-1 は Fig. 9(a) に見られるように断面が楕円形, すなわち周方向波数 $n=2$ の非軸対称崩壊モードを呈している。軸方向波数 n_A は約 3 であり, $\beta=1$ を仮定した場合の波数 3.25 に近い。Fig. 8(a) の荷重・縮み量曲線における最初のピーク値は円筒下端が軸対称座屈する荷重を表わしている。以後の絶対値のやや小さい 7 個のピーク値 (①~⑦) は, 非軸対称モードが軸方向に半波長進展することに生じており, 全軸長で約 3 波が形成されることと対応している。

試験体 C-2 および C-3 に生ずる非軸対称モードは,

(a) specimen C-1

(b) specimen C-2

(c) specimen C-3

Fig. 9 Crushed configurations of mild steel cylinders

Fig. 10 Comparison between theoretical predictions and experimental results for n versus R/t

Fig. 9 (b) および 9 (c) に見られるようにいずれも周方向波数 $n=3$ であり、断面は三角形である。ただし、C-2 では軸方向波数が約 3 であり $\beta=1$ がほぼ成立しているが、C-3 の軸方向波数は約 4 であり、 $\beta=0.65$ 程度である。なお、Fig. 9 に示されているように、C-2 では下端部、C-3 では上端部に初期の軸対称座屈を生じた。

各試験体の軸対称塑性座屈時の最大応力値は Table 1 で、4.2 節に示した材料定数を仮定した Timoshenko の解と比較されている。試験体 C-2、C-3 については両者の値がほぼ等しいが、C-1 では実験値が相当に大きい。この程度の R/t に対してはひずみ硬化の影響を無視し得ないことが理解される。

5.2 実験値と計算値の比較

Fig. 10 に前節の炭素鋼鋼管に対する実験結果を 4.2 節の計算結果とともに示す。また合わせて、文献 (6)、11) に記載されているステンレス鋼鋼管の実験結果を 4.3 節の計算結果と比較している。

Fig. 1 における $0 \leq R/t \leq (R/t)_Y$ で生じ得る非軸対称モードの周方向波数は、(6) 式に従えば炭素鋼鋼管では $2 \leq n \leq 18$ 程度、ステンレス鋼鋼管では $2 \leq n \leq 21$ 程度である。

炭素鋼鋼管 C-1 の R/t は $n=2$ に対する $(R/t)_{p1}$ を相当下回っているが、ひずみ硬化を考慮して計算すれば $(R/t)_{p1}$ の値はより下がる可能性がある。試験体 C-2 の R/t は $n=3$ に対する計算値 $(R/t)_{p1}$ より若干小さいが、ほぼ $\beta=1$ が成立しており、C-2 の R/t は $n=3$ の場合の下限値に近いと考えられる。また、C-3 の R/t は $n=3$ に対する $(R/t)_{p1}$ をかなり上回り、 $n=4$ に対する $(R/t)_{p1}$ とほぼ等しい。同試験体の最下端には $n=4$ の非軸対称モードも観察されており、C-3 の R/t は $n=3$ の場合の上限値あるいは $n=4$ の場合の下限値

に近いと推定される。

ステンレス鋼鋼管については実験における β の値は不明であるが、 $n=3$ の非軸対称モードを生じた試験体の R/t (18.8 および 18.3) は対応する計算値 $(R/t)_{p1}$ をわずかに上回る値である。

実験データ数が少ないので断定的な結論は下せないが、以上の比較より、4 章の塑性座屈シミュレーションより得た $(R/t)_{p1}$ の値は良好に実験点の傾向を説明しており、周方向波数 n の非軸対称モードを生ずる R/t に対し、その下限値に近い値を与えていると判断される。

n が大きい (R/t が $(R/t)_{p1}$ に近い) 範囲では、3 章で述べたように $(R/t)_{el}$ が良好な下限値を与えられるので、たとえば炭素鋼鋼管については Fig. 10 の $(R/t)_{el}$ と $(R/t)_{p1}$ を連ねた実線の右側近傍を各非軸対称モードを生ずる R/t の目安として用いることが可能と予想される。ただし、 R/t が $(R/t)_Y$ 付近に位置し弾性座屈現象に近い場合は、円筒殻の初期不整が生ずる非軸対称モードに大きく影響すると予想され、Fig. 10 に示すような高次 ($n=15 \sim 20$) の非軸対称モードが実際に観察されるか否かは定かでない。

6 結 論

軸圧縮荷重を受ける円筒殻に生ずる非軸対称塑性座屈モードに関し、解析および実験の両面から検討した。成果を要約して以下に示す。

(1) Fig. 1 における $(R/t)_Y$ 近傍の円筒殻に対しては、弾性座屈理論により周方向波数 n の非軸対称モード生ずる半径・肉厚比の下限値 $(R/t)_{el}$ を求め ((6) 式)、Horton らの実験結果との対比によりその有意性を確認した。

(2) $(R/t)_Y$ に比し十分に小さい R/t を有する円筒殻に対しては、Yoshimura buckle pattern の基本周期領域を平板剛体要素モデルに離散化して構成した 9 自由度シミュレータを用いて非軸対称塑性座屈応力の数値計算を行い、軸対称塑性座屈応力曲線との交点として各周方向波数 n に対応する $(R/t)_{p1}$ を得た (Table 1 および Table 2)。

(3) 炭素鋼鋼管に対する圧縮実験を行い、 $(R/t)_{p1}$ が $(R/t)_{el}$ と同様に、周方向波数 n に対する半径・肉厚比のほぼ下限値と見なせることを確認したが、定量的により精密な結論を得るためにはさらに多くの実験データの蓄積が必要である。

謝 辞

著者の一人の本研究課題に対する興味を喚起してくださった東京大学工学部建築学科教授 加藤勉先生に深甚なる謝意を表します。

また、本研究における炭素鋼鋼管の圧縮実験に際し種

種ご助力をいただいた金子幸平氏(当時)を始めとする東大工学部総合試験所大型構造物試験室の職員諸氏にお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 都井, 川井: 薄肉構造の離散化極限解析(その3), 一平板剛体要素モデルによる安定問題のシミュレーション, 日本造船学会論文集, 第152号(1982), 441.
- 2) 都井: 平板剛体要素モデルによる薄肉板殻構造の極限強度解析, 第22回生研講習会テキスト(固体力学における非線形現象の数理解析)(1983), 1.
- 3) F. R. Shanley: The Column Paradox, J. Aeronaut. Sci., Vol. 13, No. 12 (1946).
- 4) Y. Yoshimura: On the Mechanism of Buckling of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression, NACA, TM 1390 (1955).
- 5) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd Ed. McGraw-Hill (1961).
- 6) W. H. Horton, S. C. Bailey and A. M. Edwards: Nonsymmetric Buckle Patterns in Progressive Plastic Buckling, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., Vol. 23, No. 2 (1966), 433.
- 7) G. Gerard: Compressive and Torsional Buckling of Thin-Walled Cylinders in the Yield Region, NACA, TN 3726 (1956).
- 8) S. C. Batterman: Plastic Buckling of Axially Compressed Cylindrical Shells, AIAA J., Vol. 3, No. 2 (1965), 316.
- 9) L. M. Murphy and L. H. N. Lee: Inelastic Buckling Process of Axially Compressed Cylindrical Shells Subject to Edge Constraints, Int. J. Solids Structures, Vol. 7 (1971), 1153.
- 10) S. Gellin: Effect of an Axisymmetric Imperfection on the Plastic Buckling of an Axially Compressed Cylindrical Shell, J. of Applied Mechanics, Vol. 46 (1979), 125.
- 11) L. H. Sobel and S. Z. Newman: Plastic Buckling of Cylindrical Shells under Axial Compression, J. of Pressure Vessel Technology (Transactions of the ASME), Vol. 102 (1980), 40.
- 12) M. J. Sewell: A Survey of Plastic Buckling, Stability (ed. by H. Leipholz), Chap 5, University of Waterloo Press (1972), 85.
- 13) D. Bushnell: Buckling of Shells-Pitfall for Designers, AIAA J., Vol. 19, No. 9 (1981), 1183.