組合せ荷重を受けるパイプの最終強度 (その 1)

——曲げ, 外圧および軸力を受ける海底パイプラインの崩壊強度解析——

正員 藤 田 譲* 正員 野 本 敏 治*
正員 榎 沢 誠*

Ultimate Strength of Pipes Subjected to Combined Loads (1st Report)

——Analytical Study of the Collapse Strength of Submarine Pipelines under Combined Bending, External Pressure and Axial Force——

by Yuzuru Fujita, *Member* Toshiharu Nomoto, *Member*
Makoto Enosawa, *Member*

Summary

Submarine pipelines which transport oil and gas are now being installed or planned for more and more deep waters. It was reported that planned crossing includes a Norwegian Trench crossing with depth to 350 m and trans-Mediterranean crossing with depth to 2,000 m. Submarine pipelines to be installed at such depths will require the utmost care in engineering design.

During a pipelaying operation, the pipe is subjected to the combined loads of bending, tension and external pressure. Considering the fact that bending stress during installation often reach the yield range, even though DNV Rules allow 0.2% residual longitudinal strain, it implies that this bending may become a collapse initiator. Furthermore, it should be considered that initial deformation reduce the resistance of pipeline against collapse, especially in deep water.

A rigorous analytical treatment of the collapse strength of pipeline during installation is very complicated, because it is a function of loading conditions as well as D/t ratios, material properties, and initial deformation.

In this paper a simplified analytical method, which was proposed by authors for evaluating the ultimate strength of stiffened plate, is extended in order to estimate the collapse strength of pipeline under the action of combined bending, axial force and external pressure, including the effect of initial out-of-roundness.

The present method is compound of two parts. One is elastic analysis based on energy method, and the other is plastic analysis in which collapse mechanism is assumed. In both analysis large deformation is considered.

The following conclusions are obtained.

1) Theoretical results are checked with available published data. It is confirmed that this proposed method is fairly efficient one.

2) Since this proposed method is an analytical one that the complicated collapse strength of a pipe with out-of-roundness under combined loads can easily be estimated comparing with other numerical methods.

3) Analytical results indicate that there exist two different collapse modes for pipelines under combined bending and external pressure. One of them is circumferential flattening of pipe cross section (circumferential collapse) and the other is so-called Brazier's type of failure (bending collapse).

4) Analytical results show that both bending moment and axial tension considerably reduce the external pressure-bearing capacity.

* 東京大学工学部

1 緒 言

石油、ガス等を輸送するための海底パイプラインの建設は年々増加し、より深い海、より荒い海へ進出しつつある。現在計画されているもので、ノルウエーの海溝横断パイプラインの水深は 350 m 以上であり、地中海横断パイプラインでは水深 2,000 m を超える海域もあるといわれる¹⁾。大水深におけるパイプラインの敷設時には海水による高い外圧の外に敷設法による大きな軸方向曲げと軸力とからなる組合せ荷重が作用するため、敷設時の強度設計は極めて重要である。

Fig. 1 は現在最も多く用いられている敷設船による敷設の例である。水深が大きい場合には Sagbend 部の曲げ応力を減少させる目的で Tensioner によって引張力を与える方法が用いられる。しかし、曲げと軸力との組合せ荷重による軸方向歪が弾性域を超えることは避け難い。DNV 規則²⁾では敷設後の軸方向残留歪の許容限界値を 0.2% としており、敷設時にはこれを大きく超える歪が生じていることになり、パイプライン敷設時の過酷な状況を示唆している。

一方、初期変形に対して API 規則³⁾では、(1) 式で与えられる断面の初期偏平率を 1% 以内に規定している。

$$\frac{D_{\max} - D_{\min}}{D_{\max} + D_{\min}} \times 100 \quad (\%) \quad (1)$$

ここで $D_{\max}$, $D_{\min}$ はそれぞれパイプの直径の最大値、最小値である。外圧が作用する場合には 1% 程度の初期偏平においても崩壊強度の低下が無視できないとされている。

このようにパイプライン敷設時の崩壊強度は、荷重の組合せ、材料特性、断面寸法、初期撓み等に支配され、かつ、材料非線形と幾何学的非線形が混在するため、厳密な解析は極めて困難である。

パイプの強度に関する研究は古くから数多くなされているが、ここでは特に本研究と関連の深い研究の概要を述べる。

1927年にパイプの純曲げに関する歴史的な論文が

Fig.1 Pipeline laying operation (lay barge method)

Brazier⁴⁾によって発表された。Brazier は曲げによるパイプ断面の偏平化 (Brazier effect) を考慮した弾性解析を行い、断面の偏平化によって曲げモーメントに極値が存在することを明らかにするとともに、この限界モーメントの値とそのときの限界曲率を求めた ((33) 式)。後に Reissner⁵⁾ は Brazier の解析で運動学的関係式の非線形項を無視したことによる不正確さを改良するとともにより一般的な曲げ問題に拡張した。一方、池田⁶⁾ は Brazier の解析を曲げと圧力との組合せ荷重を受ける問題に拡張して、よく知られている圧力と曲げモーメントとの相関関係式を導いた ((34) 式)。Timoshenko らはその著名な著書⁷⁾の中で初期偏平を有するパイプに外圧が作用する問題に対する精度の良い弾性解を導いた。Gellin⁸⁾ は Brazier の曲げ問題を拡張して、弾塑性大撓みを考慮したモダンな数値解析法を提案した。

本研究のテーマである海底パイプラインの崩壊強度に関する研究は、大水深海域への敷設計画と相俟って近年特に諸外国において実験および解析法の両面から精力的に行われている。

Haagsma ら⁹⁾は初期偏平を有するパイプに軸力と外圧との組合せ荷重が作用する問題に対して前述の Timoshenko の弾性解と塑性解析法とを組合せた簡易式を提案し、鋼製パイプを用いた実験結果と比較的良好一致を示した。Winter¹⁰⁾は同様な手法で、より簡易な解析モデルを用いて、外圧、軸力、曲げおよび初期偏平を考慮した簡易解析法を提案した。しかし、外圧と曲げの組合せ荷重に対しては精度上問題があり、再検討を要するとしてその解析法を示していない。

Kyriakides ら¹¹⁾は前述の Gellin の解析法を拡張して、曲げと外圧との組合せ荷重を受けるパイプに対する非線形数値解析法を開発し、アルミニウム合金製パイプを用いた実験結果と比較してほぼ一致した結果を示した。

このように、軸力と外圧との組合せ荷重に対して初期偏平を考慮した崩壊強度解析は比較的容易であるため、解析的手法を用いた実用的な簡易解析法が提案されており、実際の設計に用いられている。しかし、曲げを含んだ組合せ荷重に対しては、前述のように曲げによる断面の偏平化と弾性域を超える軸方向歪の発生とによりその崩壊挙動は極めて複雑になるため、実用的な解析法が確立されていない。

そこで、本研究では著者のうちの二人¹²⁾が防撓板の圧縮強度について提案した弾性大撓み解析と大撓みを考慮した塑性解析とを組合せた崩壊解析法を拡張して、パイプライン敷設時の崩壊強度を支配する主要因子と考えられる曲げ、軸力および外圧とからなる荷重の組合せと初期撓みの影響を統一的に取り入れた実用的でかつ見通しの

良い簡易解析法を開発し、既に発表されている実験結果と比較検討する。

2 解析法

直径に比べて十分長いパイプを対象としているので、変形は崩壊直前まで軸方向に一樣であると仮定できる。したがってここでは単位長さのパイプの崩壊強度を解析する。

2.1 弾性大撓み解析

Fig. 2 に示すように、平均半径 R 、肉厚 t 、径方向に初期撓み $w_0(\theta)$ を有するパイプに、曲げモーメント M と軸力 T および外圧 p が作用し、軸方向の曲率が κ であるときの弾性大撓み解析を行う。なお、Reddy¹³⁾ はパイプの純曲げによる崩壊実験結果の考察から、曲げ強度を考える場合は曲げモーメントよりも曲率を用いた方が適切であることを指摘した。したがってここでは軸方向の曲げを曲率 κ で評価する。

まず、Kyriakides ら¹¹⁾ が完全なパイプに曲げと外圧とが作用する問題の数値解析法に用いた基礎式に初期撓みと軸力とを導入した定式化を行い、エネルギー原理によって平衡方程式を導く。次に、断面変形と初期撓みを仮定して Galerkin 法を用いて変位の未定係数に関する方程式を導き、これを解いて変位を求める。

なお、本解析法では解析的な手法を主眼としているため、積分はすべて closed form で実行する。

2.1.1 運動学的関係式

Fig. 3 に示すように円周方向および径方向の変位をそれぞれ v, w とし、Brush¹⁴⁾ の表示に初期撓みを導入した運動学的関係式を導く。

まず次の仮定をおく。

Fig. 2 Out-of-round pipe under combined bending, pressure and axial force

Fig. 3 Circumferential element before and after deformation

- 1) 径方向に $w_0(\theta)$ の初期撓みを考える。
- 2) 歪は微小である。
- 3) 中程度（肉厚の数倍）の変形を考える。
- 4) 断面の変形は不伸長変形とする。
- 5) 中立軸に垂直な断面は変形後も垂直を保つ。

以上の仮定より周方向の歪 ϵ_θ は次のように表わされる。

$$\epsilon_\theta = \epsilon_\theta^0 + \zeta \kappa_\theta \quad (2)$$

ここで ϵ_θ^0 および κ_θ は肉厚中心における周方向の歪および周方向の曲率であり、中程度の変形では次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta^0 &= \frac{v' + w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{v - w'}{R} \right)^2 - \frac{w_0'(v - w')}{R^2} \\ \kappa_\theta &= \frac{v' - w''}{R^2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここで $()'$ は θ に関する微分を表わす。

したがって、仮定 4) の周方向の不伸長条件は次式で表わされる。

$$\frac{v' + w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{v - w'}{R} \right)^2 - \frac{w_0'(v - w')}{R^2} = 0 \quad (4)$$

次に、パイプの軸方向の歪は肉厚内の変化を無視して肉厚中心での値を用いる。軸力 T による歪を ϵ_a とすると軸方向の歪 $\epsilon_x(\theta)$ は次式で与えられる。

$$\epsilon_x(\theta) = z(\theta) \kappa + \epsilon_a \quad (5)$$

幾何学的関係より

$$z(\theta) = (R + w_0 + w) \sin \theta + v \cos \theta \quad (6)$$

したがって

$$\epsilon_x(\theta) = \{(R + w_0 + w) \sin \theta + v \cos \theta\} \kappa + \epsilon_a \quad (7)$$

2.1.2 構成方程式

平面応力状態を仮定すると応力-歪関係は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu \epsilon_\theta) \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_\theta + \nu \epsilon_x) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで σ_x, σ_θ はそれぞれ軸方向および周方向の応力であり、 E, ν はそれぞれヤング率およびポアソン比である。

周方向の肉厚中心には(3)式の第1式の他に次式に示す St. Venant の曲げ理論による歪が生ずる。

$$\varepsilon_{\theta}^0 = -\nu \varepsilon_x \quad (9)$$

(2), (9) 式を(8)式に代入して整理すると次の構成方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= E\varepsilon_x + \zeta \frac{E\nu}{1-\nu^2} \kappa_{\theta} \\ \sigma_{\theta} &= \zeta \frac{E}{1-\nu^2} \kappa_{\theta} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2.1.3 全ポテンシャルエネルギー

パイプの歪エネルギー U は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} R \int_0^{2\pi} \int_{-t/2}^{t/2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_{\theta} \varepsilon_{\theta}) d\zeta d\theta \\ &= \frac{1}{2} R \int_0^{2\pi} \left\{ Et \varepsilon_x^2 + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \kappa_{\theta}^2 \right\} d\theta \quad (11) \end{aligned}$$

一方、均一な静水圧が変形状態でのパイプの外表面に垂直に作用する場合、外圧のポテンシャルエネルギー Ω は外圧とパイプの外表面が囲む面積の変化量との積で与えられる。

Brush¹⁴⁾の表示に初期撓みの影響を考慮すると、外圧のポテンシャルエネルギーは次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Omega &= pR_0 \int_0^{2\pi} \left[w + \frac{1}{2R_0} \{v^2 - v(w+w_0)' + v'(w+w_0) + w^2 + 2ww_0\} \right] d\theta \quad (12) \end{aligned}$$

ここで R_0 はパイプの平均外半径である。

したがって、全ポテンシャルエネルギー Π は次式で表わされる。

$$\Pi = \int_0^{2\pi} F d\theta \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} R \left\{ Et \varepsilon_x^2 + \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \kappa_{\theta}^2 \right\} \\ &\quad + pR_0 \left[w + \frac{1}{2R_0} \{v^2 - v(w+w_0)' + v'(w+w_0) + w^2 + 2ww_0\} \right] \quad (14) \end{aligned}$$

2.1.4 平衡方程式

エネルギー原理より、平衡の条件は(13)式の被積分関数 F が次の Euler-Lagrange の方程式を満たすことである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial v'} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{d\theta} \frac{\partial F}{\partial w'} + \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{\partial F}{\partial w''} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

(14) 式の F を(15)式に代入して整理すると、周方向および径方向の平衡方程式はそれぞれ次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} ERt\kappa^2 \left\{ (R+w_0+w) \sin \theta + v \cos \theta + \frac{\varepsilon_a}{\kappa} \right\} \cos \theta \\ - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)R^3} (v-w')'' + p(v-w_0'-w') &= 0 \\ ERt\kappa^2 \left\{ (R+w_0+w) \sin \theta + v \cos \theta + \frac{\varepsilon_a}{\kappa} \right\} \sin \theta \\ - \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)R^3} (v-w')''' + p(R_0+v'+w_0+w) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

2.1.5 変位関数

パイプの断面変形を2軸対称と仮定して初期撓みを考慮した変位関数を定める。変位 v, w および初期撓み w_0 を次のように仮定する。

$$w = R \sum_{j=0}^N a_j \cos 2j\theta, \quad v = R \sum_{j=1}^N b_j \sin 2j\theta \quad (17)$$

$$w_0 = RW_0 \cos 2\theta \quad (18)$$

不伸長条件の計算を容易にするために次のようにおく。

$$\frac{v'+w}{R} = \sum_{j=0}^N c_j \cos 2j\theta, \quad \frac{v-w'}{R} = \sum_{j=1}^N d_j \sin 2j\theta \quad (19)$$

(17), (19) 式より各係数間には次の関係がある。

$$a_j = \frac{2jd_j - c_j}{4j^2 - 1}, \quad b_j = \frac{2jc_j - d_j}{4j^2 - 1} \quad (20)$$

不伸長条件を表わす(4)式に(18), (19)式を代入して整理すると、 c_j と d_j との関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= -\frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^N d_j^2 \right) - d_1 W_0 \\ c_i &= -\frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{N-i} d_j d_{j+i} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^{i-1} d_j d_{i-j} \right) + (d_{i-1} - d_{i+1}) W_0 \\ c_N &= \frac{1}{4} \left(\sum_{j=1}^{N-1} d_j d_{N-j} \right) + d_{N-1} W_0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$N+1$ 項以降は無視する。

Gellin⁹⁾ はパイプの弾性曲げ問題に対する数値解析結果から、変位関数の項数 N による精度の収束は極めて早く、 $N=4$ で十分な精度が得られ、 $N=2$ においても $N=4$ に対する諸量(限界モーメントとそのときの曲率、応力および撓み)の誤差は1%以内であることを確認した。

本解析では解析的手法を用いるため項数を多くとると積分等の手数が増大する、したがって、Gellinの結果を参考にして $N=2$ とする。

(17)~(21) 式より撓みは次式のように d_1 と d_2 との2個の未知数で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} w &= R \left\{ -\frac{1}{4} (d_1^2 + d_2^2) - W_0 d_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \left(2d_1 + \frac{1}{2} d_1 d_2 + W_0 d_2 \right) \cos 2\theta \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$v=R\left\{\begin{aligned} &+\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{4}d_1^2+4d_2-W_0d_1\right)\cos 4\theta\Big\} \\ &-\frac{1}{3}(d_1d_2+d_1+2W_0d_2)\sin 2\theta \\ &+\frac{1}{15}(d_1^2-d_2+4W_0d_1)\sin 4\theta\Big\} \end{aligned} \right. \quad (22)$$

2.1.6 変分原理

(18) 式の初期撓みと (22) 式の変位関数を用いて (16) 式の平衡方程式を Galerkin 法で解く。

すなわち、(16) 式の第1式および第2式の左辺をそれぞれ ϕ_i および ϕ_r とおくと Galerkin 法による変分方程式は次式で表わされる。

$$\int_0^{2\pi} (\phi_i \delta v + \phi_r \delta w) d\theta = 0$$

積分を実行して整理すると次の形の方程式を得る。

$$\sum_{i=1}^2 f_i \delta d_i = 0 \quad (23)$$

これより次の2元連立方程式が得られる。

$$f_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (24)$$

(24) 式は具体的には d_1 と d_2 に関する3次の連立方程式となる。この方程式の係数は紙面の都合により今回は示すことができないが、係数の中には軸力による歪 ε_a が含まれていない。したがって、軸力は断面の弾性変形には影響を及ぼさない。

(24) 式の解は、Cardano 法により電子計算機を用いて、繰返し計算を行って求めた。後述の解析例では数回の繰返しにより速やかに収束した。

2.1.7 曲げモーメント

曲率が κ で軸力による歪が ε_a である場合の、塑性化を考慮した軸方向応力の肉厚中心における値 σ_x^0 の分布は容易に定められる (Fig. 4)。

この応力分布と弾性解析より求めた断面の変形形状を用いて、次式により曲げモーメントを求めることができる。

$$M = Rt \int_0^{2\pi} \sigma_x^0 z d\theta \quad (25)$$

Fig. 4 Longitudinal stress distribution due to bending and axial force

Fig. 5 Circumferential collapse mode assumed in plastic analysis

(25) 式の積分は (6) 式の z を用いて closed form で実行する。

2.2 塑性解析

曲率が κ 、軸歪が ε_a で外圧 p が作用する場合の変形を考慮した塑性解析を行う。

崩壊モードを Fig. 5 に示す4点塑性ヒンジモードと仮定する。

2.2.1 内部仕事

変形状態における各ヒンジ点の塑性モーメントを、加藤ら¹⁵⁾が板の塑性解析に用いた手法を参考にして、次の仮定に基づいて求める。

- 1) 大変形を考える。
- 2) 中立軸に垂直な断面は変形後も垂直を保つ。
- 3) 材料は Mises の降伏条件に従う完全剛塑性体とする。
- 4) 曲げと軸力とによる軸方向の応力は肉厚中心で評価し、その値を σ_x^0 とする。この σ_x^0 は周方向応力の影響を受けず、 σ_y で降伏する。

以上の仮定に基づいて、Fig. 5 に示すようにパイプの外表面に垂直に外圧 p が作用し、軸方向応力 σ_x^0 が存在するときのヒンジ点 i での塑性モーメント $m_\theta(i)$ は次式のように求められる。

$$m_\theta(i) = 2m_p \left\{ 1 - \left(\frac{\sigma_x^0(i)}{\sigma_Y} \right)^2 - \left(\frac{pR_0}{t\sigma_Y} \right)^2 - \left(\frac{pR_0}{t\sigma_Y} \right) \times \left(\frac{\sigma_x^0(i)}{\sigma_Y} \right) \right\} / \sqrt{4 - 3 \left(\frac{\sigma_x^0(i)}{\sigma_Y} \right)^2} \quad (26)$$

ここで

$$m_p = t^2 \sigma_Y / 4$$

$$\sigma_x^0(i) = E\kappa z(i) + E\varepsilon_a$$

また、肉厚中心における周方向応力 σ_θ^0 は Fig. 5 の 1/4 円の力の釣合より、次式のように変形量 β によらず一定である。

$$\sigma_\theta^0 = -pR_0/t$$

各ヒンジにおける回転角はいずれも 2β であるので内部仕事 V は

$$V = 2\beta M_\theta \quad (27)$$

$$\text{ここで} \quad M_\theta = \sum_{i=1}^4 m_\theta(i)$$

内部仕事の変分 δV は $m_\theta(i)$ の中の $\sigma_{x^0}(i)$ が変形量 β の関数であるから

$$\begin{aligned} \delta V &= 2 \left(\frac{\partial M_\theta}{\partial \beta} - \beta + M_\theta \right) \delta \beta \\ &= 2 \left\{ \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial m_\theta(i)}{\partial \sigma_{x^0}(i)} \frac{\partial \sigma_{x^0}(i)}{\partial \beta} \beta + m_\theta(i) \right) \right\} \delta \beta \quad (28) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_\theta(i)}{\partial \sigma_{x^0}(i)} &= 2 m_p \left\{ -5 \left(\frac{\sigma_{x^0}(i)}{\sigma_Y} \right) + 3 \left(\frac{\sigma_{x^0}(i)}{\sigma_Y} \right)^3 - 4 \left(-\frac{p R_0}{t \sigma_Y} \right) \right. \\ &\quad \left. - 3 \left(\frac{\sigma_{x^0}(i)}{\sigma_Y} \right) \left(\frac{p R_0}{t \sigma_Y} \right)^2 \right\} / \\ &\quad \left[\sigma_Y \left\{ 4 - 3 \left(\frac{\sigma_{x^0}(i)}{\sigma_Y} \right)^2 \right\}^{3/2} \right] \end{aligned}$$

ただし

$$|\sigma_{x^0}(i)| = \sigma_Y \text{ のとき } \frac{\partial \sigma_{x^0}(i)}{\partial \beta} = 0$$

2.2.2 外部仕事

外部仕事は 2.1.3 項と同様に、外圧とパイプ外表面が囲む断面積の変化量との積で与えられる。

Fig. 5 において、ヒンジ点以外の円弧は剛体であるから 4 個の部分円の面積は不変である。変形状態が β であるときに、各ヒンジ点の外表面を結んだ四辺形の面積 A は

$$A = 2 R_0^2 (1 - 2 \sin^2 \beta)$$

である。

A の変分 δA は

$$\delta A = -4 R_0^2 \sin 2\beta \delta \beta$$

である。したがって外部仕事の変分 δW は次式で与えられる。

$$\delta W = p \delta A = -4 p R_0^2 \sin 2\beta \delta \beta \quad (29)$$

2.2.3 仮想仕事の原理

仮想仕事の原理より

$$\delta V + \delta W = 0 \quad (30)$$

(30) 式に (28), (29) 式を代入して変形すると

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} \arcsin \left[\frac{1}{2 p R_0^2} \left\{ \sum_{i=1}^4 \left(\frac{\partial m_\theta(i)}{\partial \sigma_{x^0}(i)} \frac{\partial \sigma_{x^0}(i)}{\partial \beta} \beta \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + m_\theta(i) \right) \right\} \right] \quad (31) \end{aligned}$$

(31) 式を用いて繰返し計算により β を求める。

ヒンジ点 1 の垂直変位 δ は次式より求められる。

$$\delta = R \{ 1 - (\cos \beta - \sin \beta) \} \quad (32)$$

パイプの崩壊強度は、弾性解による z 軸上の垂直変位と塑性解の δ とが等しくなる条件によって求められる。

ここでは電子計算機を用いて数値的に両者の交点を求めた。

3 解析結果

本解析法の適用性を検証する目的で、Kyriakides らがアルミニウム合金 (Al-6061-T6) 製パイプを用いて行った実験結果と数値解析法による計算結果、および、Haagsma らが初期偏平を有する鋼製 (ASTM A106 GR. B) パイプを用いて、外圧、曲げと外圧、軸力と外圧の各荷重に対して行った実験結果との比較検討を行う。

両者が実験に用いたパイプの材料特性と断面寸法とを Table 1 に示す。なお、Kyriakides らが解析に用いた材料の応力-歪関係式、および、Haagsma らによる材料実験結果より、両材料の歪硬化は無視できるものと推察できる。

また、本解析で D/t を変えた計算では、肉厚 t を一定 (Table 1 の値) として直径 D を変化させて行った。

初期撓みを仮定した (18) 式より、本解析での W_0 は (1) 式で示した初期偏平率を表わしている。したがって以下では、初期偏平率を表わすパラメータにこの W_0 を用いる。

3.1 弾性解析の検証

本解析で用いている弾性解析の精度を検証するために、曲げと外圧との組合せ荷重を受けるパイプの弾性解析を行い、他の研究者による解析結果と比較する。

Fig. 6 は Table 1 に示した Al-6061 製パイプのデータを用いて本解析法の弾性解析により求めた曲げと外圧

Table 1 Characteristics of pipes tested⁽⁹⁾⁽¹¹⁾

Material	Grade	Young's modulus (E)(N/mm ²)	Poisson's ratio ν	Yield stress (σ _y)(N/mm ²)	Mean diameter D(mm)	Thickness t(mm)
Al-6061	T6	68600	0.34	295	31.75	0.89
ASTM A106	B	205800	0.3	320	96.0	4.0

Fig. 6 Moment-pressure interaction diagram in elastic state

との相関曲線である。

図の縦軸の圧力は座屈圧力 $p_{cr}(=Et^3/4(1-\nu^2)R^2R_0)$ で、横軸の曲げモーメントは純曲げに対する Brazier の限界モーメント M_m^e ((33) 式) でそれぞれ無次元化してある。

Brazier が求めた限界モーメント M_m^e と限界曲率 κ_m^e および断面の最大変位 δ_m^e は次式で与えられる。

$$M_m^e = \frac{2\sqrt{2}}{9} \frac{E\pi R t^2}{\sqrt{1-\nu^2}}, \quad \kappa_m^e = \frac{\sqrt{2}}{3} \frac{t}{R^2\sqrt{1-\nu^2}}, \quad \delta_m^e = \frac{2}{9} R \quad (33)$$

また、同図中の破線は池田による次の相関関係式である。

$$\left(\frac{M}{M_m^e}\right)^2 + \frac{p}{p_{cr}} = 1 \quad (34)$$

$p=0$ において両曲線のモーメントの値が違っている。この違いは Brazier の解の精度が悪いためである。また、本解析結果で、 $p/p_{cr}=1$ においても曲げモーメントを支え得るのは、本解析法では座屈後強度を考慮していることによるものと思われる。

本解析法による結果で、 $p=0$ における限界モーメントと限界曲率はそれぞれ $M/M_m^e=0.950$, $\kappa/\kappa_m^e=0.957$ であり、Kyriakides らが (17) 式の変位関数で項数を $N=4$ として解析した結果と全く一致している。また、外圧が作用する場合には、数値が示されていないために定量的な比較はできないが、グラフ上で全く一致している。

Kyriakides らはこの項数 N による影響を数値解析により検討した結果、曲げと外圧との組合せ荷重に対して、弾性解析のみでなく、弾塑性解析においても $N=4$

で十分な精度が得られることを確認している。

以上の結果より、曲げと外圧との組合せ荷重に対して、 $N=2$ を用いている本解析法の弾性解は十分な精度が得られていることが確認できた。

Fig. 7(a) は純曲げの場合の弾性解析による断面の変形過程を示したものである。図中の曲率は (33) 式の Brazier の限界曲率で無次元化してある。

$\kappa/\kappa_m^e=0.40$ は (25) 式で塑性化を考慮した曲げモーメントが極値に達した状態であり、 $\kappa/\kappa_m^e=0.957$ は純弾性と仮定した場合に曲げモーメントが極値に達した状態である。

Fig. 7(b) は微小な初期偏平 $W_0=0.002$ を与えて外圧を加えた場合の断面変形である。曲げによる変形と、外圧による変形とは良く似ている。

3.2 崩壊解析結果

Fig. 8 は ASTM A 106 製パイプの崩壊圧力に及ぼす初期偏平率の影響を $D/t=24, 50$ について示したものである。この図では縦軸の圧力を理論的な降伏圧力 $p_Y (=t\sigma_Y/R_0)$ で無次元化してある。

本解析結果は Haagsma らの解析結果と良く一致しており、実験値より 10% 程度高い崩壊圧力を与えている。また、初期偏平率の影響は D/t が小さい程大きいことを示しており、API 規則の許容初期偏平率である $W_0=0.01$ において、 $D/t=24$ のパイプでは崩壊圧力が約 40% 減少している。

Fig. 9 は Al-6061 製パイプの曲げと外圧との組合せ荷重に対する崩壊強度を Kyriakides らの実験結果および解析結果と比較したものである。この図では縦軸の圧力は座屈圧力で無次元化し、横軸の曲率は真円の状態で、曲げによる軸方向の最大応力が降伏応力に達するときの曲率 $\kappa_Y (= \sigma_Y/ER$: 降伏曲率と呼ぶ) で無次元化してある。

Fig. 7 Elastic deformation sequences

Fig. 8 Influence of out-of-roundness for steel pipes

Fig. 9 Curvature-pressure interaction for aluminum pipes

本解析法による結果の実線は 2.2 節の塑性解析で仮定した 4 点ヒンジモードによる崩壊 (断面崩壊) を示す。一方、破線は (25) 式で応力の塑性化と断面の弾性変形を考慮した曲げモーメントの値が限界となる (曲げ崩壊) 曲率を示している。したがって、実線と破線との交点を超える外圧では断面崩壊モードで崩壊し、それ以下の外圧では曲げ崩壊モードで崩壊する。この 2 つの崩壊モードの存在は Haagsma¹⁰⁾ が実験により明らかにしている。

曲げと外圧との荷重順序の影響については、実験結果に差が無かった¹¹⁾とするものや、曲率一定で外圧を増加させた方が高い崩壊圧力が得られたが、更に実験による検証を要する¹⁰⁾とするものがあり、現在のところ定説はない。

本解析法では断面崩壊モードに対しては荷重順序にかかわらず同じ値が得られた。ところが、曲率一定で外圧を増加する方法では曲げ崩壊モードが得られないため、曲げと外圧との組合せ荷重の解析はすべて外圧一定で曲率を増加させる方法で計算を行った。

Fig. 9 において $\kappa/\kappa_y=1.1$ 付近で断面崩壊曲線にナックル点が現われている。これは Fig. 4 に示した上下のヒンジの軸方向応力が降伏応力に達したためであり、 κ/κ_y が 1 を超えているのは、断面の偏平化によりこの点の曲げ応力が緩和されているためである。

本解析結果と実験結果とを比較すると、崩壊モードが変る付近で実験点との差が最も大きくなっているが、全体的には簡易解析法として十分適用できるものと思われる。

Fig. 10 は $p/p_{cr}=0.285$ における曲げモーメントと曲率の関係を Kyriakides らの実験値および計算値と比較

Fig. 10 Moment-curvature relation of aluminum pipe

したものである。実験では曲げモーメントを負荷して曲率を計測しているため、限界モーメント以降は示されていない。また、Kyriakides らの計算は非線形数値解析法であり、曲率増分に対してモーメントが僅かに減少した時点で崩壊とみなし、計算を中止しているため、限界モーメント以降の値は得られていない。

本解析法の結果によると、限界モーメント以降曲率の増加と共にモーメントは緩やかに減少している。したがって、スティンガー、ポンツーン等により曲げモーメントを僅かに支持して曲率をコントロールすることにより、限界モーメント以降も広範囲な曲率にわたって安定が保てることを示している。

Fig. 11 は AI-6061 製パイプで D/t を変化させた場合の曲げと外圧による崩壊解析結果である。 $D/t=15$ では降伏圧力が $0.857 p_{cr}$ であるので、最大圧力がこの値で規定されている。同図では D/t が増加すると低い

Fig. 11 Curvature-pressure interaction for various kinds of D/t

曲率比で曲げ崩壊が生ずることを示している。

Table 1 より、この材料の降伏歪は約 0.4% であるので、軸方向の残留歪が DNV 規則の許容値である 0.2% 残留すると仮定すると、敷設時には約 0.6% の歪が生じていることになる。これは $\kappa/\kappa_Y=1.5$ に相当し、 $D/t=80$ のパイプでは限界曲率に近い状態であることを示している。

図中の矢印で示す圧力は各 D/t に対する伝播圧力 (Propagation pressure: p_p) であり、DNV 規則に示されている次式から計算した値である。

$$p_p = 1.15 \pi \sigma_Y \left(\frac{t}{D} \right)^2$$

この伝播圧力は何らかの原因で局所的な崩壊が生じ、かつ、この圧力以上の外圧が作用している場合には外圧のみで軸方向に座屈が伝播することを示す圧力である。この現象は伝播座屈 (Propagating buckling) と呼ばれ、10 年程前に海底パイプラインの敷設時に発生した Sagbend 部の局部座屈が、敷設完了部に伝播し、広範囲な崩壊に至ったことから注目された現象である¹⁷⁾。

Fig. 12~16 は ASTM A 106 製パイプの崩壊強度を解析した結果である。

まず、Fig. 12 は $D/t=24$ の場合の曲げと外圧との組合せ荷重に対する崩壊強度を初期偏平率をパラメータとして表わしたものである。なお、縦軸の圧力は降伏圧力で無次元化してある。図中の黒丸は $W_0=0$ の場合の実験値である。実験点は少ないが本解析結果とはほぼ一致している。

解析結果の $W_0=0$ に対する断面崩壊曲線に注目すると、曲率が降伏曲率に近づくにつれて急激に崩壊圧力が低下している。降伏曲率程度で強度が約 40% 減少し、その後は緩やかな減少を示している。

初期偏平がある場合には全体として断面崩壊曲線は下がっているが、 $W_0=0$ の場合と同様な傾向を示している。しかし、限界曲率に及ぼす初期偏平の影響は小さ

Fig. 12 Curvature-pressure interaction of steel pipes for various values of W_0

Fig. 13 Influence of W_0 for $D/t=50$

Fig. 14 Axial force-pressure interaction

く、かつ、ここには示していないが、限界モーメントの値もほとんど初期偏平率に影響されないことが分かった。

Fig. 13 は $D/t=50$ について同様の計算を行った結果である。この図では縦軸の圧力は座屈圧力で無次元化してある。 $W_0=0$ の場合には $\kappa/\kappa_Y \leq 1$ の領域で前図のような急激な変化は見られない。

Fig. 14 は軸力と外圧との組合せ荷重に対する崩壊強度を初期偏平率をパラメータとして表わしたものである。横軸の軸力は降伏軸力 $T_Y (=2\pi R t \sigma_Y)$ で無次元化してある。

軸力が引張力の場合は崩壊圧力を著しく低下させ、逆に圧縮力の場合は増加させる。しかし、海底パイプラインにおいては積極的に圧縮力を加えることはほとんどない。

Fig. 15 は $D/t=24$ の場合の曲げ、軸力および外圧の組合せ荷重に対する崩壊強度を軸歪をパラメータとして表わしたものである。軸力が作用する場合には Fig. 5 に示した上下のヒンジの軸方向応力が降伏応力に達する曲率が異なるため、断面崩壊曲線の 2 個所にナックル点

Fig. 15 Curvature-pressure interaction for various values of $E\epsilon_a/\sigma_Y$

Fig. 16 Influence of $E\epsilon_a/\sigma_Y$ and W_0

が現われている。この 2 点間の間隔は軸歪が高い程広い。

一方、曲げモーメントが限界値に達する限界曲率は軸歪が高い程大きくなる。また、ここには示していないが、限界モーメントの値はほとんど軸歪の影響を受けない。

Fig. 16 は前図の計算に API 規則の許容初期偏平率である $W_0=0.01$ を付加した場合の計算結果である。この図より初期偏平率と軸方向の残留歪とが各規則の許容量程度であっても、それらの組合せによって崩壊強度が著しく低下することが分かる。

4 結 言

本論文では弾性大撓み解析と塑性大撓み解析とを組合せて、組合せ荷重を受けるパイプの崩壊強度を解析する方法を提案した。この方法は解析的な手法を用いているため、崩壊強度に及ぼす諸因子の影響が定量的かつ定性的に推定できる。したがって、非線形数値解析法に比べて見通しが良く、かつ計算が容易であるため、実際の設計に適用しやすい。

本解析法による解析結果と実験結果との比較により、以下の結論が得られた。

1) 実験結果との比較により、本解析法は海底パイプライン敷設時の崩壊強度設計に十分適用できると思われる。特に本解析法により、曲げと他の因子との複雑な相関関係を定量的に設計に取り込むことができる。

2) 海底パイプラインの敷設時の崩壊挙動は、作用する荷重の組合せ、初期撓み、材料特性および断面寸法等により複雑に変化する。また、これら諸因子はその崩壊強度に大きな影響を及ぼす。

3) 曲げと外圧との組合せ荷重が作用する場合には、断面崩壊モードと曲げ崩壊モードの 2 種類の崩壊モードが存在する。

4) 初期撓みにより断面崩壊モードによる崩壊強度は低下するが、曲げ崩壊モードによる崩壊強度はほとんど影響されない。

5) 本解析法をマイクロコンピュータに組み込むことにより、設計図表を参照する程度の手数で容易にパイプの崩壊強度が推定できる。また、崩壊モードが明確に得られるために見通しの良い設計ができる。

今後より広範囲の実験結果との比較により、更に本解析法の信頼性を検討するとともに、ライザ管等の類似の構造物の崩壊強度解析への適用性も検討する。

最後に本論文の数値計算にあたっては、東京大学大型計算機センターの M 280 H、および東京大学船舶工学科材料研究室のマイクロコンピュータ CS-3 を使用させて戴きました。

参 考 文 献

- 1) B. K. Jinsi: Collapse and buckling-strength considerations are pinpointed for offshore pipeline design, Oil & Gas Journal, May 3 (1982), pp. 217~227.
- 2) Det Norske Veritas: Rules for the design, construction and inspection of submarine pipelines and risers (1976).
- 3) American Petroleum Institute: Specifications for line pipe, high-test line pipe, API Spec. 5 L, 5 LX, March (1982).
- 4) L. G. Brazier: On the flexure of thin cylindrical shells and other "thin" sections, Proc. R. Soc. Series A, Vol. 116 (1927), pp. 104~114.
- 5) E. Reissner: On finite pure bending of cylindrical tubes, Österr. Ing. Arch., Vol. 15 (1961), pp. 165~172.
- 6) 池田: 内圧または外圧を受ける薄肉円筒の曲げ, 日本航空学会誌, 第 7 巻, 第 68 号 (昭和 15 年 12 月), pp. 499~510.
- 7) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: Theory of elastic stability, 2nd ed., McGraw-Hill (1961).
- 8) S. Gellin: The plastic buckling of long cylindrical shells under pure bending, Int. J. Solids Structures, Vol. 16 (1979), pp. 397~

- 407.
- 9) S. C. Haagsma and D. Schaap: Collapse resistance of submarine lines studied, *Oil & Gas Journal*, Feb. 2 (1981), pp.86~95.
 - 10) P. E. de Winter: Deformation capacity of steel tubes in deep water, OTC 4035, Off-shore Technology Conference (1981), pp. 257~265.
 - 11) S. Kyriakides and P. K. Shaw: Response and stability of elastoplastic circular pipes under combined bending and external pressure, *Int. J. Solids Structures*, Vol.18 (1982), pp. 957~973.
 - 12) 藤田, 野本, 仁保: 防撓板の圧縮強度について, 日本造船学会論文集, 第141号 (1977.6), 190~197.
 - 13) B. D. Reddy: An experimental study of the plastic buckling of circular cylinders in pure bending, *Int. J. Solids Structures*, Vol.15 (1979), pp. 669~683.
 - 14) D. B. Brush and B. O. Almroth: Buckling of Bars, Plates and Shells, McGraw-Hill (1975).
 - 15) 加藤, 福知: 板要素の変形能力について, 日本建築学会論文報告集, 第147号 (昭和43年5月), pp. 19~25.
 - 16) S. C. Haagsma: Research and tests study collapse of subsea pipelines, *Oil & Gas Journal*, Nov. 1 (1976), pp. 54~62.
 - 17) S. Kyriakides and C. D. Babcock: Experimental determination of the propagation pressure of circular pipes, *Trans. ASME*, Vol.103, Nov. (1981), pp. 328~336.
-