後続自由波の伝播に及ぼす非線形影響について

正員 松 村 清 重* 正員 島 崎 克 教**

On a Non-linear Effect on the Propagation of Free Wave around Ships

by Kiyoshige Matsumura, *Member* Katsunori Shimazaki, *Member*

Summary

A non-linear effect due to self-interaction like in the Stokes' wave is discussed on propagation of the Kelvin's ship wave from the view point of the perturbation method under the assumption of thin ship. The main purpose of this paper is to improve the expression of the phase function of the Kelvin's ship wave by considering the varying magnitude of the first order solution in the thin ship theory, whose decreasing rate is $R^{-1/2}$ inside the cusp line of the Kelvin's wave or $R^{-1/3}$ on it, where R is the distance from the source of the wave. It is shown that the difference of the phase function from the first order solution increases in correspondence with $\log R$ inside the cusp line and with $R^{1/3}$ on it. Calculated bow wave pattern of Wigley model is compared with an experimental result and the result of the thin ship theory.

1 緒 言

定常航走する船舶の造波抵抗は、従来、Michell に始まる薄い船の理論により求められてきた。しかし、船舶の低速肥大化に伴い薄い船の理論で欠落していた非線形項が問題視されるようになり、今日では種々の非線形理論が生まれるに至っている。

造波抵抗値は後続自由波の挙動と直接結びつけられているため、これらの理論における非線形影響の取り入れ方には船体近傍での扱いによる差はあるものの、最終的には非線形影響は後続自由波の位相、あるいは振幅に対する影響に帰着されてきた。Ogilvie¹⁾によって提唱された低速理論²⁾では二重模型周りの流れを基礎流場とし、波源を水面上に分布させることによって自由波の干渉が取り扱われ、Ursell³⁾、Keller⁴⁾は二重模型周りの非一様流速の場を伝播する自由波を扱い、波線の方向変化及び波長の伸縮の影響を自由波に取り入れた。Guilloton は薄い船の第 1 近似理論で得られた特異点分布を再配置することによって造波抵抗値が改良されることを示し、Noblesse⁵⁾、Dagan⁶⁾は特異摂動法の一方法である PLK 法⁷⁾の観点からこの方法の妥当性を検討した。これらの理論はさらに発展されつつあるが、非線形影響としては主に船体近傍の局所流によるものが入り入れられてきたように思われる。

一方、薄い船の系統の理論においても無視されてきた高次非線形項を取り入れる努力が続けられている⁸⁾が、Newman⁹⁾はその第 3 近似解が発散することを示した。しかし、そのような発散解に対応する現象は実際の船の波では見いだせないものと思われる。このような第 3 近似解の発散は微小振幅の進行波においても見られるが、分散関係式を改良することによって第 3 近似解の発散を防ぐことができ、この解はストークス波として知られ、実際の非線形波を表わすものと考えられている¹⁰⁾。

本論は以上のような状況のもとで、薄い船の理論に基づき後続自由波の伝播に及ぼす高次非線形項の影響について論じたものである。本論では、Newman の第 3 近似解の発散の原因は解析が正則摂動法により行なわれているために分散関係式が第 1 近似解のものと変わらないことにあると考え、PLK 法的観点から高次非線形項の影響を取り入れ第 1 近似解の位相関数をどのように改良すべきかを論じた。また、実験値と比較し、このような非線形項の影響について検討したので、不十分な部分もあるが、ここに御報告し御批判を仰ぐ次第である。

2 理 論

定常航走する船舶の後続自由波を扱うため、船体に固定した座標系を Fig. 1 に示すようにとり、座標 (x, y, z) はそれぞれ船長 L で無次元化を行う。速度の無次元化は一樣流速 U で行い、その他の諸量も特に断わらない限りすべて U 及び L の組み合わせで無次元化し、余分な係数

* 大阪大学工学部

** 日本鋼管(株) (研究当時大阪大学大学院在学)

Fig. 1 Coordinate system and definitions of basic quantities

はつけないことにする。

通常の仮定に従えば速度ポテンシャル ϕ が存在し、速度ベクトル $\mathbf{u}$ を

$$\mathbf{u} = \nabla \phi \quad (1)$$

とすれば ϕ は考えている領域内でラプラスの式 $[L]$

$$[L] \quad \nabla^2 \phi = 0 \quad (z \leq h) \quad (2)$$

を満足しなければならない。ただし h は無次元波高である。境界条件として次の自由表面条件 $[F]$ 、圧力条件 $[P]$ 、無限遠条件 $[\infty]$ 、及び船体表面条件 $[H]$ を満足しなければならない。すなわち、

$$[F] \quad \varepsilon(\phi_{xx}^2 + 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + \phi_y^2\phi_{yy} + 2\phi_x\phi_z\phi_{xz} + 2\phi_y\phi_z\phi_{yz} + \phi_z^2\phi_{zz}) + \phi_z = 0 \quad (z=h) \quad (3)$$

$$[P] \quad h = \frac{1}{2} \varepsilon(1 - \phi_x^2 - \phi_y^2 - \phi_z^2) \quad (z=h) \quad (4)$$

$$[\infty] \quad \phi \rightarrow x \quad (x \rightarrow -\infty) \quad (5)$$

$$[H] \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad (6)$$

さらに無限上流で波が無いという条件が必要である。なお、 ε はフルード数 F_n の 2 乗

$$\varepsilon \equiv F_n^2 = U^2/gL \quad (7)$$

と定義し、一応 $\varepsilon = O(1)$ とする。また、 $[H]$ の $\partial \phi / \partial n$ は船体表面上における法線方向の微分を表わす。

2.1 素成波の共鳴現象

速度ポテンシャルは非線形な境界条件に従うからこれを摂動論的に求める方法としては、まず薄い船の理論にみられる正則摂動展開による方法が考えられる。微小な摂動パラメーターとして船の薄さ β 、すなわち船幅船長比 B/L をとれば、 ϕ, h は

$$\phi(x, y, z) = x + \beta \phi_1 + \beta^2 \phi_2 + \beta^3 \phi_3 + \dots \quad (8)$$

$$h(x, y) = \beta h_1 + \beta^2 h_2 + \beta^3 h_3 + \dots \quad (9)$$

と展開される。ラプラスの式は線形であるから ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 はそれぞれ $z \leq 0$ の領域内でラプラスの式を満足する必要がある、また自由表面条件

$$[F_1] \quad \varepsilon \phi_{1xx} + \phi_{1z} = 0 \quad (10)$$

$$[F_2] \quad \varepsilon \phi_{2xx} + \phi_{2z} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \phi_1)^2 - h_1 \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon \phi_{1xx} + \phi_{1z}) \quad (11)$$

$$[F_3] \quad \varepsilon \phi_{3xx} + \phi_{3z} = -\varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \nabla \phi_1 \cdot \nabla (\nabla \phi_1)^2 + 2h_1 (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_{1xx} + \nabla \phi_{1z} \cdot \nabla \phi_{1x}) + 2(\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_{2x} + \nabla \phi_2 \cdot \nabla \phi_{1x}) \right\} - h_1 \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon \phi_{2xx} + \phi_{2z}) - h_2 \frac{\partial}{\partial z} (\varepsilon \phi_{1xx} + \phi_{1z}) \quad (12)$$

をそれぞれ満たさなくてはならない。ただし、 h_1, h_2 は

$$\left. \begin{aligned} h_1 &= -\varepsilon \phi_{1x} \\ h_2 &= -\frac{1}{2} \varepsilon (\nabla \phi_1)^2 - \varepsilon (\phi_{2x} - \varepsilon \phi_{1x} \cdot \phi_{1xz}) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

であり、 h_1, h_2 及び (10)~(12) 式に現われるすべての量は $z=0$ の静止水面上での値をとる。波源は船体であるから後続自由波を考える場合でも船体表面条件が必要であるが、本節では自由波の伝播における非線形影響の簡単な性質を調べるため、船体表面条件を考慮しないこととし、支配方程式としてラプラスの式と自由表面条件のみを考えることにする。このように考えると ϕ_1 は最も簡単な

$$\phi_1 = A \exp[ik(\omega - iz)] \quad (14)$$

のような単一平面波の解をもつ。ただし、以後 ϕ は複素形で表現し、その実部をとるものとする。 ω は

$$\omega \equiv x \cos \theta + y \sin \theta \quad (15)$$

と定義したもので波の伝播方向 θ に沿って測った原点からの距離である。 ω と静止水面上の点の座標 (x, y) 、またはその極座標 (R, θ) とは Fig. 2 のような関係になっている。 k は波数であり θ とは

$$k = \sec^2 \theta / \varepsilon \quad (16)$$

の関係にある。 A は振幅で ω には依存しないものとする。この解は従来の線形理論における素成波の 1 つであり、静止空間に固定した座標系からみれば $(\theta + \pi)$ 方向

Fig. 2 Illustration of elementary wave and definitions of coordinate systems

に伝播する進行波の第1近似解でもある。この進行波の高次近似解はストークス波として知られているから本論の定常問題における高次近似解も同様に解析できる。

(14) 式の ϕ_1 を用いれば (11) 式の自由表面条件 $[F_2]$ の右辺は 0 となり 1 次の自由表面条件 $[F_1]$ と同様、同次方程式となる。従って ϕ_2 も同次解を持つが ϕ_1 の同次解と同様であるので、これを ϕ_1 の中に含ませ

$$\phi_2 = 0 \quad (17)$$

とする。

ϕ_3 の支配方程式は ϕ_1 を (14) 式で与え、 ϕ_2 を 0 としたので

$$[L_3] \quad \nabla^2 \phi_3 = 0 \quad (z \leq 0) \quad (18)$$

$$[F_3] \quad \epsilon \phi_{3xx} + \phi_{3z} = -\epsilon k^4 |A|^2 A \cdot \exp[ik\omega] \quad (z=0) \quad (19)$$

となる。(19) 式の自由表面条件は (12) 式右辺第1項だけが残り、非同次方程式となったものである。

$$\phi_3 = B(\omega, z) \cdot \exp[ik(\omega - iz)] \quad (20)$$

の形で解を求めることを考えると、 B に関する偏微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} B\omega\omega + B_{zz} + 2ikB_\omega + 2kB_z &= 0 \quad (z \leq 0) \\ B\omega\omega + 2ikB_\omega + kB_z &= -\epsilon k^5 |A|^2 A \quad (z=0) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

となり、非同次解を求めれば

$$B = i\epsilon k^4 |A|^2 A(\omega - iz) \quad (22)$$

が得られる。従って ϕ_3 は

$$\phi_3 = i\epsilon k^4 |A|^2 A(\omega - iz) \cdot \exp[ik(\omega - iz)] \quad (23)$$

となる。この解は ϕ_1 に比べて $\pi/2$ だけ位相の進んだ波を表わしているが、振幅は ω に比例して増加し、無限後方では無限大の振幅を持つことになっている。このような解の挙動は (19) 式の非同次項の位相関数が同次解と同じ位相関数 $k\omega$ を有しているために生じたものであり、(18), (19) 式の支配方程式を見る限りにおいては、線形的なバネ-質点系がその固有振動数で外力を加えられたために共鳴(共振)を起こすのと、空間的現象と時間的現象の違いはあっても類似の現象と考えられる。本論ではバネ-質点系のアナロジーで (23) 式のような解が生じる現象を共鳴現象と呼び、その解を共鳴解と呼ぶことにする。しかし、共鳴解が非線形波動の本質を表わしているわけではない。実際、(23) 式が (18), (19) 式の解ではあっても、 ϕ の展開の全体を見た場合 $\beta^3 \phi_3 / \beta \phi_1 = O(\beta^2 \omega)$ となっているから ω が $O(1/\beta^2)$ 程度の十分後方では漸近展開の一様性が失われており、このことから、 ϕ_3 は不都合な解であることがわかる。見方を変えれば、本節の問題の解は静止空間の座標で書き換えるとストークス波に一致するはずであるが、 ϕ_3 のために時間的に発散することになり振幅一定の周期解は得られず、このことから不都合な解であることが知れる。周期解が得られないのはバネ-質点系と非線形波動の場合

とでは原因が異なる。前者の場合、共鳴を起す外力は文字通り外から与えられるものであるから、エネルギーを十分補給でき共鳴現象が本質的であるのに対し、後者の場合、外力に相当するものは低次の波に内在するエネルギーによって与えられるため、その補給には限度があるにもかかわらず、今はそのエネルギーの減小を考慮せずに解析したため発散したものである。後者のような原因で周期解を求めようとしているにもかかわらず高次近似で非本質的な共鳴解が生じることは、天体力学あるいは非線形振動の問題でも経験されており、そのような解は永年項と呼ばれ、これを避ける種々の試みがなされている⁷⁾。永年項という用語は通常時間的に発散する解に用いられるが、ここでは広く解釈し、共鳴解と称した (23) 式のような空間的に非一様な解をも永年項と呼ぶことにする。以上に述べてきたことは ω が大きい場合の問題点であって、 ω が小さいときには何ら問題は生じず ϕ_3 は意味のある解であることはいうまでもない。

2.2 歪み座標を用いた位相関数の展開

前節で得られた解は無限遠方では (8) 式の数値ポテンシャル ϕ の展開が一様な漸近展開とはなっていないから、このような問題に対する摂動法としては正則摂動法ではなく特異摂動法によるべきである。特異摂動法には種々の方法が考えられているが、解として不適当な永年項が生ずる問題では、非線形振動の微分方程式で常用されている PLK 法を用いればよいと考えられる。ストークス波は PLK 法を用いて解析された一つの例である¹⁰⁾。この場合には波数 k は固定し角振動数 ω を展開することにより第3近似まで正しい解が得られている。ストークス波では ω と時間 t とは積の形でしか表われないから、これは ω は線形理論の分散関係式のままで、 t を展開し正しいスケールにしたと考えてもよい。このように PLK 法とは、摂動展開の破たんの原因が現象のスケールの選び方の不適切さにあると考えるものであり、高次近似解を得ることよりも、むしろ現象の正しいスケールを求めることによって低次近似解で精度を上げる方法であると考えられる。前節での解の破たんはストークス波の第3近似解から判断すれば、分散関係式として (16) 式をそのまま用いていることに起因するものであり、波数 k に波高依存性を考慮すれば空間的に一様な解が得られると期待される。ただ、(14) 式に見るように k と座標 ω は積の形で現われているから、本節では座標軸 x, y, z を歪ませることを考える。

独立変数 x, y, z をそれぞれに対応する正しいスケールと考えられる歪み座標 ξ, η, ζ を用いて次のように展開する。

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + \beta^2 \cdot x_2(\xi, \eta, \zeta) + \cdots \\ y &= \eta + \beta^2 \cdot y_2(\xi, \eta, \zeta) + \cdots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$z = \zeta + \beta^2 \cdot z_2(\xi, \eta, \zeta) + \dots$$

x_2, y_2, z_2 は決定すべき関数であり、これを歪み関数と呼ぶことにする。この展開に $O(\beta)$ の項がないのは $[F_2]$ に共振項が含まれていないためである。仮に $O(\beta)$ の項を残したとしても $O(\beta^2)$ の支配方程式に入ってくるだけであり、その解を求めても定数であるから座標系の取り方により除去でき本解析には必要ない。このような原点の不一致を引き起す定数は、歪み関数 x_2, y_2, z_2 についても起るから、 x, y, z 座標系と ξ, η, ζ 座標系の原点は一致するものとし、 $z=0$ の静止水面と $\zeta=0$ も一致するものとする。

速度ポテンシャル ϕ 、波高 h は形式的には (8), (9) 式と同様の展開を行うが、 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 はそれぞれ ξ, η, ζ の関数であると考え、速度ポテンシャル ϕ の 1 次と 2 次の支配方程式は、独立変数の摂動展開が $O(\beta)$ の項を欠いているので歪ませる前と同一の形で (10), (11) 式の x, y, z を単に ξ, η, ζ に書き換えればよい。従って、

$$\phi_1 = A \exp[ik(\Pi - i\zeta)] \quad (25)$$

$$\phi_2 = 0 \quad (26)$$

である。ただし Π は

$$\Pi \equiv \xi \cos \theta + \eta \sin \theta \quad (27)$$

と定義してある。

3 次の支配方程式を求めるに当っては、微分操作が

$$\begin{aligned} \partial/\partial x &= (1 - \beta^2 x_{2\xi}) \partial/\partial \xi - \beta^2 y_{2\xi} \partial/\partial \eta - \beta^2 z_{2\xi} \partial/\partial \zeta \\ \partial^2/\partial x^2 &= (1 - \beta^2 x_{2\xi}) \partial^2/\partial \xi^2 - 2\beta^2 y_{2\xi} \partial^2/\partial \xi \partial \eta \\ &\quad - 2\beta^2 z_{2\xi} \partial^2/\partial \xi \partial \zeta - \beta^2 (x_{2\xi\xi} \partial/\partial \xi \\ &\quad + y_{2\xi\xi} \partial/\partial \eta + z_{2\xi\xi} \partial/\partial \zeta) \end{aligned}$$

などの形で与えられることを考慮すれば $[L_3], [F_3]$ は

$$\begin{aligned} [L_3] \quad \nabla^2 \phi_3 &= 2(x_{2\xi} \phi_{1\xi\xi} + y_{2\xi} \phi_{1\eta\xi} + z_{2\xi} \phi_{1\zeta\xi}) \\ &\quad + 2\{(x_{2\eta} + y_{2\xi}) \phi_{1\xi\eta} + (y_{2\xi} + z_{2\eta}) \phi_{1\eta\zeta} \\ &\quad + (z_{2\xi} + x_{2\zeta}) \phi_{1\zeta\xi}\} + \phi_{1\xi} \nabla^2 x_2 \\ &\quad + \phi_{1\eta} \nabla^2 y_2 + \phi_{1\zeta} \nabla^2 z_2 \quad (\zeta \leq 0) \quad (28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [F_3] \quad \varepsilon \phi_{3\xi\xi} + \phi_{3\zeta} &= \Gamma_3(\phi_1, \phi_2) \\ &\quad + \varepsilon(2x_{2\xi} \phi_{1\xi\xi} + 2y_{2\xi} \phi_{1\eta\xi} + 2z_{2\xi} \phi_{1\zeta\xi} \\ &\quad + x_{2\xi\xi} \phi_{1\xi} + y_{2\xi\xi} \phi_{1\eta} + z_{2\xi\xi} \phi_{1\zeta}) \\ &\quad + x_{2\zeta} \phi_{1\xi} + y_{2\zeta} \phi_{1\eta} + z_{2\zeta} \phi_{1\zeta} \quad (\zeta = 0) \quad (29) \end{aligned}$$

のような複雑な形に変形される。ただし (28), (29) 式の微分演算記号はすべて ξ, η, ζ に関する微分を表わす。また $\Gamma_3(\phi_1, \phi_2)$ は (12) 式右辺の項において x, y, z を ξ, η, ζ に書き換えたものである。

永年項が生じる原因は (29) 式の Γ_3 の一部の項が存在するためであるから、この原因を打ち消すように歪み関数を決定すればよいと考えられる。しかし、これだけの条件では歪み関数の決定には任意性が伴うし、また、たとえそれらを適当な仮定のもとで決定し (29) 式右辺が 0 になったとしても、(28) 式右辺が 0 にならない限

りやはり永年項が生じる。従って、歪み関数の決定は (28), (29) 式の右辺が 0 の条件のもとに決定する必要がある。(25), (26) 式を用いればこれらの条件は

$$\begin{aligned} \nabla^2(x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta - iz_2) \\ + 2ik \cos \theta \cdot (x_{2\xi} \cos \theta + y_{2\xi} \sin \theta - iz_{2\xi}) \\ + 2ik \sin \theta \cdot (x_{2\eta} \cos \theta + y_{2\eta} \sin \theta - iz_{2\eta}) \\ + 2k(x_{2\zeta} \cos \theta + y_{2\zeta} \sin \theta - iz_{2\zeta}) = 0 \quad (\zeta \leq 0) \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sec^2 \theta \cdot (x_{2\xi\xi} \cos \theta + y_{2\xi\xi} \sin \theta - iz_{2\xi\xi}) \\ + 2ik \sec \theta \cdot (x_{2\xi} \cos \theta + y_{2\xi} \sin \theta - iz_{2\xi}) \\ + k(x_{2\zeta} \cos \theta + y_{2\zeta} \sin \theta - iz_{2\zeta}) + i\varepsilon k^4 |A|^2 = 0 \quad (\zeta = 0) \quad (31) \end{aligned}$$

となる。(30), (31) 式は x_2, y_2, z_2 の 3 つの未知関数の方程式となっているが、実際には $(x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta - iz_2)$ の組み合わせでしか方程式の中には現われてこない。そこで

$$\left. \begin{aligned} X &= x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta \\ Z &= z_2 \\ E &= X - iZ \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

と置き、微分操作が $\partial/\partial \xi = \cos \theta \cdot \partial/\partial \Pi$, $\partial/\partial \eta = \sin \theta \cdot \partial/\partial \Pi$ であることを考慮すれば、(30), (31) 式は E の Π , ζ に関する偏微分方程式と見なせ

$$E_{\Pi\Pi} + E_{\zeta\zeta} + 2ikE_{\Pi} + 2kE_{\zeta} = 0 \quad (\zeta \leq 0) \quad (33)$$

$$E_{\Pi\Pi} + 2ikE_{\Pi} + kE_{\zeta} + i\varepsilon k^4 |A|^2 = 0 \quad (\zeta = 0) \quad (34)$$

が得られる。(32) 式の変換は

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \Pi + \beta^2 \cdot X(\Pi, \zeta) \\ z &= \zeta + \beta^2 \cdot Z(\Pi, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

を意味するものであり、特に ω 軸の変換は素成波の伝播方向のスケールを歪ませたものに他ならない。これは ϕ_1 が θ を単にパラメータとしているだけであり、独立変数が Π と ζ であることからもうなずけることである。 E を Π の関数と ζ の関数との和の形で変数分離すれば、 E は

$$\begin{aligned} E &= -\varepsilon k^3 |A|^2 (\Pi - i\zeta) + E_1 \\ &\quad + E_2 e^{-2ik\Pi} + E_3 \{e^{-2k\zeta} - 2ik(\Pi - i\zeta)\} \quad (36) \end{aligned}$$

と得られる。ただし、 E_1, E_2, E_3 は積分定数である。 E は $\zeta \rightarrow (-\infty)$ の時、 $\exp[-2k\zeta]$ のように大きくなることはあり得ないから、この項が消えるように $E_3 = 0$ とし、原点で $E=0$ 、水面で $Z=0$ という条件を課せば E_1, E_2 はともに 0 となり、

$$E = -\varepsilon k^3 |A|^2 (\Pi - i\zeta) \quad (37)$$

と求まる。今は 2 階の微分方程式を解いたが、この解は (33), (34) 式で 2 階微分を無視しても得られる。結局、歪み座標は (35) 式を逆変換すれば

$$\left. \begin{aligned} \Pi &= \omega(1 + \beta^2 \cdot \varepsilon k^3 |A|^2) \\ \zeta &= z(1 + \beta^2 \cdot \varepsilon k^3 |A|^2) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

と求まる。 Π - ζ 空間では ϕ_3 に対する支配方程式は同

次式となり、もはや同次解しか生じないから、波を表わす速度ポテンシャルは ϕ_1 のみでよく、元の物理座標 $\varpi-z$ を用いて書き直せば

$$\phi_1 = A \exp[ik\varpi(1+\beta^2 \cdot \epsilon k^3 |A|^2)] \times \exp[kz(1+\beta^2 \cdot \epsilon k^3 |A|^2)] \quad (39)$$

と表わせる。

この解を元の (14) 式の ϕ_1 と比較すると、位相 $k\varpi$ が $k\varpi \cdot (1+\beta^2 \cdot \epsilon k^3 |A|^2)$ となっているだけであるから ϖ の全域にわたって発散するようなことはなく一様な解である。一方、 ϖ が大きくない場合には (39) 式は

$$\phi_1 = A \exp[ik(\varpi - iz)] + \beta^2 \cdot \epsilon k^4 |A|^2 A(\varpi - iz) \cdot \exp[ik(\varpi - iz)] \quad (40)$$

と展開でき、これは前節で求めた (23) 式と一致するから、(39) 式は $\Pi-\zeta$ 空間で求めた架空の解ではなく物理的にも正しい解である。このように最低次の解 ϕ_1 は位相を $k\varpi$ から $\beta^2 \cdot \epsilon k^4 |A|^2 \varpi$ だけ増加させ精密化することにより、正則摂動法による3次の解まで含んだ表現にすることができる。従って、 ϕ_1 はこのような非線形問題の近似解を単一の形で、しかもより広い領域で精度を保った表現と考えられる。一方、(33)、(34) 式と (21) 式を比べ ϖ, z を Π, ζ と同一視すれば

$$E = iB/kA \quad (41)$$

となっているから、歪み座標を求め一様な解を得ることと、前節で行った共鳴解を求めることは同等のことであり、共鳴解を求めれば (41) 式により正しい位相を求めることができる。

2.3 後続自由波の位相関数

本節では後続自由波の伝播に及ぼす3次の非線形項による影響について調査し、前節と同様、位相関数の精度を上げることを考える。薄い船の第1次近似理論によれば後続自由波の速度ポテンシャル ϕ_1 は

$$\phi_1 = \frac{4}{\epsilon} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} i H_1^*(\theta) \sec^2 \theta \times \exp\left[i \frac{\sec^2 \theta}{\epsilon} (\varpi - iz)\right] d\theta \quad (42)$$

と与えられる。 H_1 は船体形状を表わす式、 $y = \beta \cdot f_1$ を用いて

$$H_1 \equiv (P + iQ)/\beta = \frac{1}{2\pi} \iint \frac{\partial f_1}{\partial x} \exp\left[\frac{i \sec^2 \theta}{\epsilon} (\cos \theta \cdot x - iz)\right] dx dz \quad (43)$$

と与えられており、 P, Q は振幅関数である。なお、(*) は複素共役を表わすものとする。

ϕ_1 の位相関数を修正するに際しては、前節とは異なり後続自由波を表わす速度ポテンシャルが (42) 式のように素成波の連続分布で与えられているため、すべての素成波同志の干渉を同時に取り扱う必要があり、そのま

までは非常には複雑である。そこで、(42) 式を $\varpi \rightarrow \infty$ での漸近形すなわちケルビン波で解析することを考えれば、 ϕ_1 は

$$\phi_1 \sim \sum_{n=1}^2 4i H_1^*(\theta_n) \sec^2 \theta_n \times \sqrt{\frac{2\pi}{|\epsilon \cdot R \cdot F(\theta_n)(1-2\tan^2 \theta_n)|}} \times \exp\left[\frac{i}{\epsilon} R \cdot F(\theta_n) + \frac{\sec^2 \theta_n}{\epsilon} \cdot z - i(-1)^n \cdot \frac{\pi}{4}\right] \quad (44)$$

と与えられる。ただし $R \cdot F(\theta)$ は静水面上の座標と

$$R \cdot F(\theta) = R \sec^2 \theta \cdot \cos(\Theta - \theta) = \sec^2 \theta \cdot \varpi \quad (45)$$

の関係があり、また下添字 n は1のとき横波を、2のとき縦波を表わし、2つの素成波の伝播方向 θ_n と静止水面上の点の偏角 Θ とは

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = -\frac{1}{4} \cot \Theta [1 \mp \sqrt{1-8\tan^2 \Theta}] \quad (46)$$

で関係づけられている。このように、ケルビン波は1つの Θ に対して振幅が原点からの距離とともに変化する2つの成分波から構成されているから、3次の非線形影響は横波と縦波の2波の相干干渉の問題として扱ってよいように思われる。 Θ が $19^\circ 28'$ の近傍、すなわち、ケルビン波のカスプライン近傍では (44) 式は良い近似とはいえず、もう少し複雑な形で扱う必要があるが (44) 式でもその本質は変わらないと考えられる。しかし $\Theta = 19^\circ 28'$ の線上では $\theta_1 = \theta_2 = -35^\circ 16' \equiv \theta_0$ となるから ϕ_1 はただ1つの波で構成される。これに伴い、 ϕ_1 は振幅の減少率が (44) 式と異なる

$$\phi_1 = 4i \cdot H_1^*(\theta_0) \sec^2 \theta_0 \cdot \sqrt{3} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{\epsilon^2 \cdot R \cdot F(\theta_0)}\right)^{1/3} \times \exp\left[\frac{i}{\epsilon} R \cdot F(\theta_0) + \frac{\sec^2 \theta_0}{\epsilon} \cdot z\right] \quad (47)$$

と与えられる。

Phillips¹¹⁾, Longuet-Higgins¹²⁾ は2つの進行する深海波の非線形相互作用について論じ、角振動数がそれぞれ ω_1, ω_2 で、対応する波数ベクトルを $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$ とする2つの進行波が存在するとき、

$$(2\omega_1 - \omega_2)^2 = g[2\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2] \quad (48)$$

なる分散関係を満足すれば第3近似解で波の相互作用により共鳴を起し、新しい波数ベクトルを持ち時間とともに振幅が増大してゆく成分波が生じることを示した。Fig. 3 に示すループ状の実線は共鳴条件 (48) 式を満足する $\mathbf{k}_1$ に対する $\mathbf{k}_2$ の位置関係を示したものである。Newman⁹⁾ はケルビン波においては横波の波数ベクトルに対する縦波の波数ベクトルの位置が Fig. 3 の点線のように限定され、共鳴条件が満足されるのは $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2$ の場合、すなわち、ケルビン波のカスプライン上だけであることを示すとともに、(42) 式の積分形のままカスプライン近傍で第3近似解を求め実際に定常解が存在しないこ

Fig. 3 Phillips's resonance loop(solid line) and the Kelvin wave system (dotted line) (Adapted from Newman's paper)

とを示した。Newman が求めた第3近似的解は発散するとはいふ対数的な発散にとどまっているから、その程度は弱く、 $\phi_3 = O(1)$ と考えてよいと思われる。カスプライン上では (47) 式から $|\phi_1| = O(\omega^{-1/3})$ であり、前節の結果を直接適用すれば $|\phi_3| = O(|\phi_1|^3 \omega) = O(1)$ となるから、Newmann が求めた解と同程度のオーダーである。従って、3 次の非線形項による影響を調査するのに (47) 式の漸近形を用いても本質は変わらず、より明白な形で位相関数にその影響が現われると考えられる。一方、2つの波を同一の波と考えれば、2.1 節で示したストークス波のような自己共鳴現象はどのような方向に伝播する素成波についても存在するから、あらゆる方向に伝播する素成波の位相を修正すべきであると考えられる。結局、本節での解析は、距離とともに振幅が変化するような波に対して前節で示した手法を拡張することになる。

ϕ_1 としてケルビン波を用いることとしたので ϕ_1 の振幅が変化していること、あるいは θ が x, y の関数となっていることにより、自由表面条件の非同次項は前節と同じ形にはならない。しかし、 ϕ_1 は $x \rightarrow \infty$ では、

$$\phi_1 = A \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \varphi_0 \right] \quad (49)$$

の形をしており、 $x \rightarrow \infty$ での微分は最低次の項が

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} &\sim \frac{i}{\varepsilon} \varphi_{0x} \cdot \phi_1 \\ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &\sim \left(\frac{i}{\varepsilon} \varphi_{0x} \right)^2 \cdot \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

などと近似できるから、 φ_0 が

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{0x}^2 + \varphi_{0y}^2 + \varphi_{0z}^2 &= 0 \quad (z \leq 0) \\ -\varphi_{0x}^2 + i\varphi_{0z} &= 0 \quad (z=0) \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

を満足していれば、ラプラスの式及び自由表面条件(10)式を近似的に満足することになる⁴⁾。このような近似法は WKB 法あるいは幾何光学的近似法として知られ本質的には $\varepsilon \ll 1$ の近似である。本論では ϕ_1 をこの程度の

方程式を満足しているものと考え、振幅の微分などは考えないことにする。 φ_0 を求めるには特性曲線法に従い特性曲線の方に s をとれば、 $z=0$ では

$$\left. \begin{aligned} x &= 2 \sec \theta (2 \sec^2 \theta - 1) \cdot s \\ y &= -2 \sec \theta \cdot \tan \theta \cdot s \\ \varphi_0 &= 2 \sec^4 \theta \cdot s \\ \varphi_{0x} &= \sec \theta \\ \varphi_{0y} &= \sec \theta \tan \theta \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

と得られる。ただし、 s は R, ω とは

$$2 \sec^4 \theta \cdot s = R \cdot F(\theta) = \sec^2 \theta \cdot \omega \quad (53)$$

のような関係がある。

以上のことを考慮し自由表面条件の非同次項を考えてみると、最低次の項として (12) 式右辺第1項だけが残る、結局、前節と同様の方程式が得られるから歪み座標を導入し位相関数を求めることが考えられる。(30), (31) 式から $\zeta=0$ で $z_2=0$ であることを考慮すれば、 $\zeta=0$ で成立する x_2 と y_2 の2つを未知数とした方程式が1つだけ得られる。しかし、これ以上に方程式は得られないから歪み関数を求めることはできない。前節でもこのような事情は同様であったが、歪み関数を求めることができたのは単一の素成波であったために歪みの方向があらかじめわかり、 $(x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta)$ を1つの未知数と考えることができたことによる。本節の場合には θ が x と y 、あるいは ξ と η の関数となっているため、そのようなまとまった変数が存在するかどうかは疑わしく、位相関数が x_2 と y_2 の和の形で表わされない限り不可能であるように思われる。前節では正則摂動法により得られた永年項を用いて全域で一樣な解が得られることを示したから、本節でも

$$\begin{aligned} \phi &= x + \beta \cdot A \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \varphi_0 \right] \\ &\quad + \beta^3 \cdot B \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \varphi_0 \right] + \dots \end{aligned} \quad (54)$$

の形で解を求めることにする。一方、一樣な解が得られるとすると、位相関数 φ は

$$\varphi = \varphi_0 + \beta^2 \varphi_2 \quad (55)$$

と展開される必要があり、速度ポテンシャルを

$$\phi = x + \beta \cdot A \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} (\varphi_0 + \beta^2 \varphi_2) \right] \quad (56)$$

で与えることにすれば $\beta \ll 1$ であるから、(56) 式は

$$\begin{aligned} \phi &= x + \beta \cdot A \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \varphi_0 \right] \\ &\quad + \beta^3 \cdot \frac{i}{\varepsilon} \varphi_2 \cdot A \exp \left[\frac{i}{\varepsilon} \varphi_0 \right] \end{aligned} \quad (57)$$

と展開できる。従って φ_2 は (54) 式の B を用いて

$$\varphi_2 = -i\varepsilon \cdot B/A \quad (58)$$

のように求められる。 B に関する支配方程式は、 φ_0 と同様、 $\varepsilon \ll 1$ の仮定のもとに WKB 法による展開をすれ

ば

$$2\varphi_{0x}B_x + 2\varphi_{0y}B_y + 2\varphi_{0z}B_z + (\varphi_{0xx} + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz})B = 0 \quad (z=0) \quad (59)$$

$$i(2\varphi_{0x}B_x + \varphi_{0xx}B) + B_z = -\frac{(\varphi_{0z})^4}{\varepsilon^3}|A|^2A \quad (z=0) \quad (60)$$

と得られる。 $z=0$ での B の挙動を調べることにすれば (59) 式で $z=0$ と置き、両式から B_z を消去すれば

$$\varphi_{0x}(1-2\varphi_{0x}^2)B_x + \varphi_{0y}B_y + \frac{1}{2}\{\varphi_{0xx}(1-2\varphi_{0x}^2) + \varphi_{0yy} + \varphi_{0zz}\}B = \frac{(\varphi_{0z})^5}{\varepsilon^3}|A|^2A \quad (61)$$

が得られる。ただし、 B はすべて $z=0$ での値である。この方程式の特性曲線は $\varphi_0|_{z=0}$ のものと同じものであり、 s を使えば左辺の中括弧の量は $(-1/2s)$ となるから、結局、 $B|_{z=0}$ は

$$\frac{dB}{ds} + \frac{B}{2s} = -2\frac{(\varphi_{0z})^5}{\varepsilon^3}|A|^2A \quad (z=0) \quad (62)$$

に従う。カスプラインの内側では ϕ_1 は

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{C}{\sqrt{s}} \exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\varphi_0\right] \\ C \cdot C^* &= 16 \cdot H_1 \cdot H_1^* \cdot \frac{2\pi}{\varepsilon(1-2\tan^2\theta)} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

と書け、 A は $C/\sqrt{s}$ であるから

$$B|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{s}} \left\{ 2i \frac{\sec^{10}\theta}{\varepsilon^3} (C \cdot C^*) \cdot C \cdot \log s + B_1 \right\} \quad (64)$$

と求める。ここに B_1 は積分定数であり、 $B_1/\sqrt{s}$ は ϕ_0 の支配方程式の同次解、すなわちケルビン波を表わすものであるから無視してよい。カスプライン上でも同様に

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{D}{s^{1/3}} \cdot \exp\left[\frac{i}{\varepsilon}\varphi_0\right] \\ D \cdot D^* &= \frac{144}{3^{1/3}} \left\{ \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \right\}^2 \cdot \frac{H_1 \cdot H_1^*}{\varepsilon^{4/3}} \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

と書けるから

$$B|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{s}} \left\{ 4i \cdot \frac{\sec^{10}\theta}{\varepsilon^3} (D \cdot D^*) \cdot D \cdot \sqrt{s} + B_2 \right\} \quad (66)$$

と求める。

3 結果とその検討

以上得られた結果を位相関数の形で表現すると、ケルビン波の場合カスプラインより内側では

$$\varphi|_{z=0} = F(\theta) \cdot R + \beta^2 \cdot 2 \frac{\sec^{10}\theta}{\varepsilon^2} \cdot C \cdot C^* \log\left(\frac{F(\theta) \cdot R}{2\sec^4\theta}\right) \quad (67)$$

となり、第1項目のケルビン波の位相関数は距離 R に比例して増加するのに対し、第2項目のものは $\log R$ に比例して位相は大きくなる。一方、カスプライン上では

$$\varphi|_{z=0} = F(\theta_0)R + \beta^2 \cdot 4 \frac{\sec^{10}\theta}{\varepsilon^2} D \cdot D^* \left(\frac{F(\theta_0) \cdot R}{2\sec^4\theta_0} \right)^{1/3} \quad (68)$$

となり、ケルビン波との位相差は $R^{1/3}$ に比例して増大する。このような位相関数の挙動は、2.2 節で示した振幅が一定の単一素成波の挙動からも推察される。後者の場合、素成波の振幅を A とすると線形理論による位相との差は $A^2 \cdot R$ に比例して増加する。この関係をケルビン波の場合にもあてはめると、カスプライン上では A は $R^{-1/3}$ に比例するから、線形理論によるものとの位相差は $R^{1/3}$ に比例することになり (68) 式と一致する。カスプラインより内側では A は $R^{-1/2}$ に比例するから、位相差は R に依存しない定数となる。この場合には (67) 式と必ずしも一致するわけではないが、 $\log R$ という増加の仕方は非常に弱くほぼ定数と考えることもできるから、定性的には単一素成波の場合に帰着されるものと考えられる。しかし、この不一致は (67) 式には波数の積分効果を取り入れられているから当然のことであり、むしろカスプライン上の場合の一致こそ問題点を含んでいる。ひとつの問題は (66) 式の同次解は $B_2/\sqrt{s}$ となっているが、カスプライン上では (47) 式の挙動に従うべきであるから $s^{-1/3}$ に比例する同次解が存在すべきであるにもかかわらず、このような同次解が (62) 式には存在しないことである。これはカスプライン上で φ_{0xx} などが無限大になるにもかかわらず、(61)式中括弧の量は無限大とはならず (61) 式が成立することが原因であり、WKB 近似法を見直す必要があるように思われる。しかし、上記のような不合理な面を持っているにしても結果の性質に大差はなく、高々 $R^{1/3}$ の係数が異なるか $R^{1/3} \log R$ あるいは Newman⁹⁾ が示したような $R^{1/3} \log^2 R$ に変わる程度と思われる。

これらの結果を実験値及び薄い船の第1近似理論による結果とを比較検討する。ただ、解析結果は無限後方での漸近解でしか得られていないから、その性質として原点の移動には鈍感な面を持っており、波源が船体全体にわたって分布するような場合には船体の近傍で実験値と比較するには問題がある。そこで、本論では波源のはっきりしている船首波にのみ着目することにする。対象船型として振幅関数 $H_1(\theta)$ が簡単に求まる Wigley 船型を選んだ。実験に使用した Wigley 船型は、船長 L が 2.0 m、船の薄さ $\beta (=B/L)$ が 0.1、無次元喫水 δ が 0.0625 の標準のものであり、船体の半幅 βf_1 は

$$f_1 = \frac{1}{2} \{1 - (2x)^2\} \left\{ 1 - \left(\frac{z}{\delta}\right)^2 \right\} \quad (69)$$

で与えられる。船首波の振幅関数 $H_{1F}(\theta)$ は、乾¹³⁾により

$$H_{1F}(\theta) = P_{1F}(\theta) + iQ_{1F}(\theta)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi} K(\theta) \left[\frac{1}{k^2 \cos^2 \theta} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} k \cos \theta\right) \right. \\
&\quad + \frac{1}{2k \cos \theta} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} k \cos \theta\right) \\
&\quad - i \left\{ \frac{1}{2k \cos \theta} \cdot \cos\left(\frac{1}{2} k \cos \theta\right) \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{k^2 \cos^2 \theta} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} k \cos \theta\right) \right\} \right] \quad (70)
\end{aligned}$$

で与えられている。ただし、 $k = \sec^2 \theta / \epsilon$ であり、 $K(\theta)$ は

$$K(\theta) = \frac{1}{k} - \frac{2}{\delta^2 k^3} + \left(\frac{2}{k^2 \delta} + \frac{2}{k^3 \delta^2} \right) e^{-k\delta} \quad (71)$$

である。

Fig. 4 は素成波の伝播方向 θ_1, θ_2 に対する (67) 式第 2 項の実際の位相 $\beta^2 \varphi_2 / \epsilon$ を $\log s$ の係数として示したものである。この係数はフルード数が小さくなるにつれて一般に大きくなるが、図ではフルード数が 0.2236 ($K_0 L = 20$) の場合を示した。図から明らかなように $\theta = -35^\circ 16'$ 及び -90° の 2 点で係数は発散している。 $\theta = -90^\circ$ での発散の原因は縦波の振幅関数 $|H|$ が収束しても $\sec^{10} \theta$ の発散が強いことにある。 $\theta = -35^\circ 16'$ での発散の原因は (44) 式のケルビン波の振幅が発散することによるものである。このことから $\theta = -35^\circ 16'$ 近傍の方向に伝播する素成波、すなわち、カスプラインを形成する素成波は $R^{-1/3}$ で減衰する波として扱う必要のあることがわかる。 $\theta = -35^\circ 16'$ 付近を除いた全体の傾向は $|\theta|$ の増加に伴い大きくなる傾向がある。しかし、全体的に小さな値であるから、観測できる範囲内では第 2 近似の位相 $\beta^2 \varphi_2 / \epsilon$ が 2π となって線形理論で得られる波紋と一波長分だけ差が生じるようなことは起こらない。むしろ、これは対数関数の性質から伝播方向により第 1 近似理論による位相とは初期位相の差として現われている

Fig. 4 Variation of the 2nd term of the phase function

と見るべきである。しかし、初期位相の差が存在するとしても波長の高々数%のずれである。

Fig. 5 は実験による船体波紋図とともに、 $19^\circ 28'$ のカスプライン上における本論の結果から得られる波の山の位置 (実線) と第 1 近似理論による山の位置 (点線) を示したものである。実線は点線に比べて若干船首方向へずれており実験値に近い傾向は示すものの、船長の 2 倍程度の後方でも山の位置の差は波長の 6% 程度である。最近の理論の成果によれば、船体周りの局所的な流速の変化が波紋に影響することが知られているが、本論では局所流の影響は考慮していないため、これ以上の議論はさし控える。

4 結 言

本論は薄い船の理論に基づき、定常航走する船舶の後続自由波の位相に及ぼす高次非線形項の影響について摂動論的観点から論じたものである。以下に得られた結果

Fig. 5 Comparison of crest line between theoretical results and measured wave contour (mm)

を示す。

(1) 単一の素成波の高次近似解を求める際、正則摂動法による解析では第3近似解が発散し非一様な解となるが、定常問題でも PLK 法を用い歪み座標を導入することによって全領域にわたって一様な解を得ることができた。

(2) 船舶の後続自由波をケルビン波として扱い、正則摂動法により非一様な第3近似解を求めることによって位相関数の改善を試みた。その結果、薄い船の第1近似理論による位相関数との差はカスプラインで距離 R の $1/3$ 乗に比例し、その内側では $\log R$ に比例して増加することを示した。また、実験値と比較したところ、カスプラインで第1近似理論による結果よりもやや実験値に近づくものの、全体的に位相関数の差は小さく実験値を説明するには至らなかった。

本稿を終わるに当たり、終始熱心な御指導並びに御助言をいただいた田中一郎教授に感謝いたします。また、幾多の御討論をいただいた研究室諸氏に感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Ogilvie, T. F.: Wave Resistance: The Low Speed Limit, The University of Michigan College of Engineering, No. 002 (1968).
- 2) Baba, E., Takekuma, K.: A Study on Free-surface Flow around Bow of Slowly Moving Full Forms, 日本造船学会論文集, 第137号 (1975).
- 3) Ursell, F.: Steady Wave Patterns on a Non-uniform Steady Fluid Flow, J. Fluid Mech., Vol. 9 (1960).
- 4) Keller, J. B.: The Ray Theory of Ship Waves and the Class of Streamlined Ships, J. Fluid Mech., Vol. 9 (1979).
- 5) Noblesse, F.: A Perturbation Analysis of the Wave-making of a Ship, with an Interpretation of Guilloton's Method, J. Ship Res., Vol. 19 (1975).
- 6) Dagan, G.: A Method of Computing Non-linear Wave Resistance of Thin Ships by Coordinate Straining, J. Ship Res., Vol. 19 (1975).
- 7) Cole, J. D.: *Perturbation Methods in Applied Mathematics*, Blaisdell Publishing Company, London (1968).
- 8) Maruo, H.: A Note on the Higher Order Theory of Thin Ships, Bulletin of the Faculty of Engineering, Yokohama National Univ., Vol. 15 (1966).
- 9) Newman, J. N.: Third-Order Interactions in Kelvin Ship-Wave Systems, J. Ship Res., Vol. 15 (1971).
- 10) 富永政英: 海洋波動, 共立出版, 1976.
- 11) Phillips, O. M.: On the Dynamics of Unsteady Gravity Waves of Finite Amplitude. Part 1. The Elementary Interactions, J. Fluid Mech., Vol. 9 (1960).
- 12) Longuet-Higgins, M. S.: Resonant Interactions between Two Trains of Gravity Wave, J. Fluid Mech., Vol. 12 (1962).
- 13) 乾 崇夫, 梶谷 尚: 単純船型の船首波波形解析, 日本造船学会論文集, 第124号 (1968).