円筒殻の平均圧壊荷重に関する一考察

正員 都 井 裕*

A Study on the Mean Crushing Load of Circular Cylindrical Shells

by Yutaka Toi, *Member*

Summary

The mean crushing load for axially compressed circular cylindrical shells is studied in the present paper. The theoretical rigid-plastic solutions for the axisymmetric and the non-axisymmetric collapse mode are compared with the experimental data given in the published literatures and their validities are investigated. The obtained results are summarized as follows:

(1) For the mean crushing load in case of axisymmetric collapse the modified Alexander's solution (eq. (10)) in which the effect of stroke to length ratio is taken into account is extremely in good agreement with the experimental results with regard to the crushing wavelength as well as the crushing load.

(2) In the range of large R/t ratios where the crushing mode is mainly due to the non-axisymmetric elastic buckling the modified Johnson's theory (eq. (33)) in which the inextensional collapse mode is assumed gives reasonable mean crushing stresses.

(3) In the range of small R/t ratios where the crushing mode is mainly due to the non-axisymmetric plastic buckling the generalized Pugsley's theory (eq. (29)) in which the internal plastic work by the membrane shearing force as well as the bending moment is taken into account agrees relatively well with the experimental results.

(4) When the axisymmetric and the non-axisymmetric collapse are both considered, the modified Alexander's theory and the modified Johnson's theory can be regarded as the upper and the lower bound solution for mean crushing stresses respectively, however, no rigid-plastic solution is sufficiently accurate for non-axisymmetric collapse mode. The detailed numerical analysis such as the finite element analysis will be needed in order to estimate the mean crushing load for the non-axisymmetric collapse mode with sufficient accuracy.

1 序

塑性変形によるエネルギー吸収特性の観点から見て、軸圧縮荷重下の円筒殻は最良の構造要素の一つである¹⁾。

本研究では、Fig. 1 に示す軸対称圧壊および非軸対称圧壊のそれぞれの場合について、衝突エネルギー吸収性能を評価するための代表的なパラメータである平均圧壊荷重 (mean crushing load)²⁾ に関する考察を試みる。ここに、平均圧壊荷重とは、Fig. 2 に示す典型的な軸荷重・縮み量曲線において次式により定義される荷重 P_m をいう。

$$P_m \bar{\delta} = \int_0^{\bar{\delta}} P(\bar{\delta}) d\bar{\delta} \quad (1)$$

また、対応する応力を平均圧壊応力と呼び、 σ_m と記す。

過去の研究として、軸対称崩壊モードに対する平均圧

壊荷重については、Alexander による剛塑性解析解³⁾ および実験公式⁴⁾、非軸対称崩壊モードに対する平均圧壊荷重については、Pugsley⁵⁾ および Johnson ら⁶⁾ による理論解などが知られており、これらの理論解は本研究において再検討される。なお、軸対称圧壊モードと非軸対称圧壊モード間の遷移については、座屈パターンの局所化現象 (buckling pattern localization) と関連した解析的考察も試みられてはいるが⁷⁾、定量的には未解明であり、本研究では両者を個々に扱い、統一的な議論は今後の課題とする。

2 軸対称崩壊モードに対する平均圧壊荷重

本章では、軸荷重を受ける円筒殻の軸対称崩壊時の平均圧壊荷重を算定する公式として最も頻繁に利用されている Alexander の理論式³⁾ について、実験公式⁴⁾ および自動車技術会 (the Society of Automotive Engineers

* 東京大学生産技術研究所

(a) axisymmetric mode

(b) non-axisymmetric mode

Fig. 1 Crushing modes of axially compressed circular cylindrical shells

Fig. 2 Load-end shortening curve for axially compressed circular cylindrical shells

of Japan) の構造強度部門委員会による実験データ⁸⁾ との比較を通じ、再考察を加える。

2.1 Alexander の理論解³⁾

Alexander は Fig. 3 に示す軸対称圧壊モードに対し

Fig. 3 Axisymmetric crushing mechanism

て Mises の降伏条件を仮定し、ひずみ硬化を無視した剛塑性解析により、次式の、単軸降伏応力 σ_y で無次元化した平均圧壊応力を得ている。

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{\pi t}{2\sqrt{3}\lambda} + \frac{\lambda}{2R} \quad (2)$$

ここで、軸方向半波長 λ として、(2) 式を最小化する値：

$$\lambda = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} \sqrt{Rt} = 1.347\sqrt{Rt} \quad (3)$$

を仮定すると、(2) 式は

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{t}{R}} = 1.347\sqrt{\frac{t}{R}} \quad (4)$$

と表現され、 λ として接線係数理論による塑性座屈半波長⁹⁾ (弾性座屈半波長と等しい)：

$$\lambda = \left\{ \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \right\}^{1/4} \sqrt{Rt} \\ = 1.728\sqrt{Rt} \quad (\nu=0.3 \text{ の時}) \quad (5)$$

を仮定すると、(2) 式は以下のように表現される。

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{\{12(1-\nu^2)\}^{1/4}}{2\sqrt{3}} \sqrt{\frac{t}{R}} + \frac{\pi}{2\{12(1-\nu^2)\}^{1/4}} \sqrt{\frac{t}{R}} \\ = 1.389\sqrt{\frac{t}{R}} \quad (\nu=0.3 \text{ の時}) \quad (6)$$

なお、実際の試験機加圧盤下の円筒は端部摩擦のため最初から圧縮とともに曲げを受ける。その場合の変形モードにおける軸方向半波長値は、座屈前は(5)式より大きな値をとるが、座屈時には(5)式と一致することが Geckeler により示されている¹⁴⁾。

上記の2種類の解を比較すると、軸方向半波長 λ ((3) 式と(5) 式) は大きく異なるが、平均圧壊応力 ((4) 式と(6) 式) には顕著な相違は見られない。文献3) では平均圧壊荷重のみが実験結果と対比されており、(3) 式あるいは(5) 式の正当性については触れられていないが、両理論解のより厳密な評価のためには、軸方向半波長 λ に関する検討も要求される。

2.2 Alexander の理論解の補正

前節の理論解の導出過程においては、軸対称圧壊変形の半波長進展に対応する試験機加圧盤の下降距離 (Fig. 2 における δ) が圧壊モード半波長 λ に等しいと仮定され

ているが、実際には

$$k \equiv \delta/\lambda = 0.7 \sim 0.8 \quad (7)$$

程度の値をとる⁴⁾。標準的な値として

$$k = 0.75 \quad (8)$$

を採用し、剛塑性解析における外力仕事量を修正すれば、前節の(5)式および(6)式は、以下のように補正される。

$$\delta = 1.728 k \sqrt{Rt} = 1.296 \sqrt{Rt} \quad (9)$$

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{1.389}{k} \sqrt{\frac{t}{R}} = 1.852 \sqrt{\frac{t}{R}} \quad (10)$$

なお、上述の k は一般にストローク・長さ比(stroke to length ratio)と呼ばれている。厳密には剛塑性解析における内部塑性仕事量も k の値の影響を受けるはずであるが、ここでは外力仕事量に対する影響の方が卓越すると仮定し、外力仕事に対する影響分のみを考慮して(10)式の補正解を得た。

2.3 実験公式⁴⁾

Ezra と Fay による文献 4) に、円筒殻の平均圧壊応力および半波長分のストロークとして、次の実験公式が紹介されている。

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_m}{\sigma_y} &= \left(\frac{4\sqrt{2}}{\pi} - \frac{\sqrt{2}E_t}{\pi\sigma_y} \right) \sqrt{\frac{t}{R}} \\ &= 1.801 \sqrt{\frac{t}{R}} \quad (E_t = 0 \text{ の時}) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\delta = 1.35 \sqrt{Rt} \quad (12)$$

ここに、 E_t は材料の応力・ひずみ関係における塑性変形時の接線係数である。

2.4 実験データとの比較

本節では、前節までに示した諸理論式および実験公式を、文献 8) の炭素鋼鋼管に対する実験データと比較する。

Fig. 4 は、単軸降伏応力で無次元化した平均圧壊応力 σ_m/σ_y に関する比較であり、

Fig. 4 Mean crushing stresses for axisymmetric collapse mode

- 1 軸方向波長に関し最小化した Alexander の解(4)式
- 2 接線係数塑性座屈理論による Alexander の解(6)式
- 3 $k=0.75$ により補正した Alexander の解(10)式
- 4 Ezra と Fay による実験公式(11)式

の諸式が実験結果と対比されている。理論式および実験公式の計算では、ひずみ硬化が無視されているため、実験データは、単軸降伏応力 σ_y で無次元化した値と引張強さ σ_u で無次元化した値の双方を示した。いずれの実験値も大きな隔たりはなく、(10)式の補正 Alexander 解および(11)式の実験公式と良好に一致しており、また、修正を施さない Alexander の理論解(4)式および(6)式は若干低目の値を与えていることが確認される。

Fig. 5 では、Fig. 4 の各理論解および実験公式に対応する崩壊モードの軸方向半波長 λ あるいはストローク δ ((3),(5),(9),(12)の各式)を、実験における半波長分ストロークと比較している。この結果より、ストローク δ 間の比較では、(9)式の修正 Alexander 解と(12)式の実験公式が実験結果と良好に対応することが理解される。

以上の比較より、少なくとも本実験データに関する限り、ストローク・長さ比 $k=0.75$ により補正した Alexander の解(9)式および(10)式が実験結果と最もよく一致し、また、別途導かれた実験公式とも良好に対応することが明らかである。

3 非軸対称崩壊モードに対する平均圧壊荷重

本章ではまず、円筒殻の半径・肉厚比 R/t と非軸対称崩壊モードにおける周方向波数 n の関係を論じ、後にその結果に基づき、Pugsley⁵⁾および Johnson ら⁶⁾の理論

Fig. 5 Crushing strokes for axisymmetric collapse mode

解を参照して種々の場合に対する平均圧壊荷重を計算し、文献の実験結果との比較を通じ、諸理論解の有効性および問題点を検討する。

3.1 非軸対称崩壊モードにおける R/t と n の関係

軸圧縮荷重を受ける円筒殻が非軸対称崩壊する場合の平均圧壊荷重を算定するためには、まず、その非軸対称崩壊モードに関する情報が必要となる。従来より実験的には、円筒殻の半径・肉厚比 R/t と非軸対称圧壊モードにおける周方向波数 n の間に強い相関関係のあることが知られており、 R/t が大きいほど波数 n が増加するが¹⁰⁾、解析的な検討は数少なく、定量的に完全な把握には至っていない。以下では、著者による文献 11) の研究に基づき、 R/t と n の関係の概略を整理したい。

3.1.1 弾性座屈理論に基づく関係

軸圧縮荷重を受ける円筒殻の古典的弾性座屈理論⁹⁾に従えば、周方向波数 n の非軸対称座屈モードを生ずる半径・肉厚比の下限值 $(R/t)_{el}$ として次式が得られる¹¹⁾。

$$\left(\frac{R}{t}\right)_{el} = \frac{2n^2}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} = 1.210n^2 \quad (\nu=0.3 \text{ の時}) \quad (13)$$

また便宜上、 n を実数と考へて (13) 式を n について解けば、次の関係式を得る。

$$n = \left\{ \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \right\}^{1/2} \sqrt{\frac{R}{t}} = 0.909 \sqrt{\frac{R}{t}} \quad (\nu=0.3 \text{ の時}) \quad (14)$$

(13) 式の有意性は、Horton らによる実験結果¹⁰⁾との比較により、文献 11) において確認されている。

3.1.2 塑性座屈シミュレーションに基づく関係

塑性変形を伴う場合の R/t の下限値は、文献 11) において、Fig. 6 の非軸対称圧壊モード (Yoshimura buckle pattern¹²⁾) の基本周期領域 1234 を 6 剛体要素モデルに離散化した 9 自由度シミュレータにより数値的に求めた。すなわち、軸対称塑性座屈応力と R/t の関係、周方向波数 n の変形モード (軸方向波長は周方向波長に等しいと仮定) に対応する非軸対称塑性座屈応力と R/t の関係を個々に求め、両者の交点をもって周方向波数 n の非軸対称圧壊モードを生ずる R/t の下限値 $(R/t)_{pl}$ とした。ここでは、文献 11) の数値計算結果を参照して $(R/t)_{pl}$ の簡単な解析的表示を試みる。

まず、軸対称塑性座屈応力 σ_{cr}^A と R/t の関係に関しては、文献 11) では Timoshenko の解⁹⁾ あるいは Gerard の解¹³⁾ などを用いたが、 R/t が小さい時の塑性座屈応力は第 1 近似的には材料の降伏応力 σ_y で表現されることを考慮して、ここでは σ_{cr}^A を次のように仮定する。

$$\sigma_{cr}^A = \sigma_y \quad (15)$$

また、周方向波数 n の変形モードに対応する非軸対称塑

Fig. 6 Non-axisymmetric crushing mechanism

性座屈応力 σ_{cr}^{NA} に関しては、文献 11) におけるシミュレーション結果が同一モードに対する弾性座屈応力に比較的近いことを考慮して、次式の形を仮定する。

$$\sigma_{cr}^{NA} = C E n^2 \left(\frac{t}{R}\right)^2 \quad (16)$$

ここに係数 C の値は、前述の 9 自由度シミュレータによる数値計算結果を参照して

$$C = 0.3 \quad (17)$$

と定める。

(15) 式と (16) 式の交点、すなわち

$$\sigma_{cr}^A = \sigma_{cr}^{NA} \quad (18)$$

より

$$\begin{aligned} \frac{R}{t} &= \sqrt{\frac{C E}{\sigma_y}} n \\ &= 0.548 \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} n \end{aligned} \quad (19)$$

なる半径・肉厚比が得られるが、(19) 式をさらに次のように修正すると、文献 11) で求めた $(R/t)_{pl}$ のよりよい近似値を与える。

$$\left(\frac{R}{t}\right)_{pl} = 0.548 \sqrt{\frac{E}{\sigma_y}} (n-1) \quad (20)$$

(20) 式に STK 41 炭素鋼鋼管の材料定数： $E=24000 \text{ kg/mm}^2$, $\sigma_y=35.65 \text{ kg/mm}^2$ (文献 11) における引張試験値) を代入して求めた $(R/t)_{pl}$ と、文献 11) で数値計算により得た $(R/t)_{pl}$ 値の比較を Fig. 7 に示す。両者はほぼ良好に対応しており、本研究においては (20) 式を、周方向波数 n の非軸対称圧壊モードを生ずる半径・

Fig. 7 Comparison between formula and simulation for $(R/t)_{pl}$ of mild steel cylinders

肉厚比の下限值として使用することにする。

3.1.3 実験データとの比較

弾性座屈理論に基づく (13) 式の $(R/t)_{el}$ と Horton¹⁰⁾ (アルミニウム 2024-T4 管), Johnson⁶⁾ (ポリ塩化ビニル管) および著者¹¹⁾ (炭素鋼鋼管) による実験結果との比較を Fig. 8 に示す。材料によらずいずれの実験データも理論解の右側に位置しており, (13) 式の $(R/t)_{el}$ が周方向波数 n の非軸対称モードを生ずる半径・肉厚比の下限值となっていることが確認される。

Fig. 9 では, アルミニウム製鋼管に対する実験データのみを, (13) 式の $(R/t)_{el}$ および $E=10.8 \times 10^6 \text{ psi}$, $\sigma_y=60200 \text{ psi}$ (0.5% 耐力) を用いて計算した (20) 式の $(R/t)_{pl}$ と比較している。 $n < 5$ の範囲において塑性座屈シミュレーションに基づく $(R/t)_{pl}$ は $(R/t)_{el}$ よりも良好な下限値を与えており, また n が大きくなるほど $(R/t)_{el}$ の精度が向上していることが本図から理解される。

Fig. 8 Relation between R/t and circumferential wave number (n) in non-axisymmetric crushing mode

Fig. 9 Relation between R/t and n for aluminum cylinders

3.2 平均圧壊荷重の理論解

Fig. 6 の非軸対称圧壊モードに対し, 剛塑性解析法により, Pugsley⁵⁾ および Johnson ら⁶⁾ の解を含む一般的な平均圧壊応力の算定式を誘導する。

軸方向半波長分の圧壊過程を考えると, 軸荷重による外力仕事は次式のように表現される。

$$W_{EX} = 2\pi\sigma_m R t \delta \quad (21)$$

ここに, δ は軸方向半波長分の圧壊過程に対応するストローク (試験機加圧盤の下降距離) である。また, 内部塑性仕事は文献 5) および 6) を参照して, 以下のように計算される。

$$\left. \begin{aligned} W_{IN} &= W_B + W_B' + W_S \\ \text{ここに} \\ W_B &= \frac{1}{2} \pi \sigma_0 n t^2 h_0 (\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha) \\ W_B' &= \frac{1}{2} \pi \sigma_0 t^2 h_0 \\ W_S &= \pi \tau_0 n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) t h_0^2 \operatorname{cosec}^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22) 式において, W_B は塑性関節線 (Fig. 6 の線分 12, 24, 34 など) における曲げ塑性仕事, W_B' は円筒面を平面化するために要する曲げ塑性仕事, W_S は面内せん断塑性仕事であり, h_0 は軸方向半波長 (Fig. 6 の辺 14 または 23 の長さ), α は塑性関節線のなす角度 (Fig. 6 の $\angle 124$ または $\angle 243$), σ_0 と τ_0 は垂直およびせん断降伏応力である。

(21) 式と (22) 式を等置, すなわち

$$W_{EX} = W_{IN} \quad (23)$$

とすることにより, 一般的な平均圧壊応力の算定式として次式を得る。

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{\sigma_y} n \frac{t}{R} \frac{h_0}{\delta} (\operatorname{cosec} \alpha + \cot \alpha)$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\sigma_0}{\sigma_y} \frac{t}{R} \frac{h_0}{\delta} + \frac{\tau_0}{\sigma_y} n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \frac{h_0}{\delta} \frac{h_0}{R} \operatorname{cosec}^2 \alpha \quad (24)$$

(24) 式右辺の第1項、第2項および第3項はそれぞれ、(22) 式の W_B , W_B' および W_S の寄与分を表わしている。

3.2.1 Pugsley の理論解の一般化

(24) 式において、円筒面を平面化するために要する塑性仕事 W_B' に関する項を無視し、各パラメータを

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \pi R/n \\ h_0 &= (\pi R/n) \tan \alpha \\ \alpha &= \pi/2n \\ \sigma_0 &= \sigma_y \\ \tau_0 &= \sigma_y/3 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

と仮定すると、平均圧壊応力として

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{1}{4} n \frac{t}{R} \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2n} + \cot \frac{\pi}{2n} \right) \tan \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{6} \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \sec^2 \frac{\pi}{2n} \quad (26)$$

を得る。(26) 式は変形前の軸方向半波長をストローク δ とし、圧壊後の軸方向半波長 h_0 を用いて内部塑性仕事量を計算して得た理論解である。 $n=3$ の場合、(26) 式は

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = 1.616 \frac{t}{R} + 0.116 \quad (27)$$

$n=4$ の場合、(26) 式は

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = 2.082 \frac{t}{R} + 0.153 \quad (28)$$

となり、文献 5) で誘導された Pugsley の解と一致する。

また、(24) 式において W_B' も考慮し、各パラメータを

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \pi R/n \\ h_0 &= \pi R/n \\ \alpha &= \pi/4 \\ \sigma_0 &= 2\sigma_y/\sqrt{3} \\ \tau_0 &= \sigma_y/3 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

と仮定すると、平均圧壊応力は次のように計算される。

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{t}{R} \{1+n(\sqrt{2}+1)\} - \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \right) \quad (30)$$

(30) 式では δ および h_0 とともに変形前の軸方向半波長値が仮定されており、本研究では (30) 式を一般化 Pugsley 解として次節で種々の実験データと比較する。

3.2.2 Johnson の理論解

(24) 式において面内せん断応力による塑性仕事 W_S に関する項を無視し、各パラメータを

$$\left. \begin{aligned} \delta &= (\pi R/n) \tan \alpha \\ h_0 &= (\pi R/n) \tan \alpha \\ \alpha &= \pi/2n \\ \sigma_0 &= 2\sigma_y/\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

と仮定すると、平均圧壊応力として

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{t}{R} \left\{ 1+n \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2n} + \cot \frac{\pi}{2n} \right) \right\} \quad (32)$$

を得るが、この解は文献 6) において誘導された Johnson の解と一致する。Johnson の理論では、面内不伸長が仮定されており、また、 δ および h_0 として圧壊後の軸方向半波長値が用いられていることが (31) 式より了解される。

3.2.3 Johnson の理論解の修正

(24) 式において、Johnson の理論解と同様に W_S に関する項を無視し、各パラメータを

$$\left. \begin{aligned} \delta &= \pi R/n \\ h_0 &= \pi R/n \\ \alpha &= \pi/4 \\ \sigma_0 &= 2\sigma_y/\sqrt{3} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

と仮定すると、次式の平均圧壊応力を得る。

$$\frac{\sigma_m}{\sigma_y} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{t}{R} \{1+n(\sqrt{2}+1)\} \quad (34)$$

(34) 式は、前項の Johnson の理論における δ および h_0 として変形前の軸方向半波長値を仮定した解であり、以下ではこれを修正 Johnson 解と称する。

3.3 理論解と実験データの比較

本節では、3.1 節で論じた $R/t-n$ 関係および 3.2 節に示した $n-\sigma_m$ 関係に基づいて、軸圧縮荷重を受ける円筒殻が非軸対称モードで圧壊する場合の $R/t-\sigma_m$ 関係を計算し、文献に示された種々の実験結果と比較検討する。

3.3.1 $(R/t)_{el}$ に基づく平均圧壊応力

Fig. 10 は、(13) 式の弾性座屈理論による $(R/t)_{el}$ を用いて、(30) 式の一般化 Pugsley 解、(32) 式の Johnson 解、(34) 式の修正 Johnson 解による平均圧壊応力を計算し、ポリ塩化ビニル管⁸⁾、アルミニウムまたはステンレス鋼鋼管 (両者の区別は不明)⁵⁾ および炭素鋼鋼管^{8), 11)} による実験データと比較した図である。(13) 式はポアソン比 ($\nu=0.3$ を仮定) 以外の材料定数には無関係であり、したがって σ_m/σ_y も R/t のみの関数として材料によらず一意に定まる。

本図における理論解は、 $R/t-n$ の弾性関係に基づいていること、および R/t が大であるほど圧壊モードは弾性座屈モードに近付くことを考慮すれば、 R/t の増大とともに平均圧壊応力の実験値は理論値に漸近することが要求される。この観点から判断すると、一般化 Pugsley 解と Johnson 解は R/t の増大とともに実験点と離れる

Fig. 10 Mean crushing stresses based on $(R/t)_{el}$

傾向が見えるため十分とはいえず、修正 Johnson 解は比較的良好な傾向を示している。

R/t が大、すなわち薄肉円筒の場合は曲げ塑性仕事は支配的と考えられるが、一般化 Pugsley 解における面内せん断塑性仕事の寄与分（一般化 Pugsley 解と修正 Johnson 解の差に相当する）は、逆に R/t の増大とともに増加しており、一般化 Pugsley 解が不十分な解を与える主要因はこの点にあると考えられる。すなわち、一般化 Pugsley 解における膜応力塑性仕事量の算定は必ずしも適切とはいえない。また、Johnson 解においては、 $\alpha = \pi/2n$ と仮定し、 δ および h_0 として圧壊後の軸方向半波長値を用いているが、 R/t が大の場合にはこの仮定が不適切な近似になっていると判断される。

なお、文献 6) では、実験による $R/t-n$ 関係を用いて $n=2$ および $n=3$ に対するポリ塩化ビニル管の実験結果と Johnson の解が比較的良好に対応することが示されているが、Fig. 10 では理論的な $R/t-n$ 関係 (Fig. 8 に示したように実験データと良好に対応する) を用いていることに注意されたい。

3.3.2 $(R/t)_{pl}$ に基づく平均圧壊応力

Fig. 11 では、(20) 式の塑性座屈シミュレーションに基づく $(R/t)_{pl}$ を考慮して (2024-T4 アルミニウムの材料定数 $E=10.8 \times 10^6 \text{ psi}$ および $\sigma_y=60200 \text{ psi}$ を仮定)、すなわち、Fig. 9 に示したように n が小の場合の $(R/t)_{el}$ をより良好な下限値 $(R/t)_{pl}$ で置換して、(29) 式の一般化 Pugsley 解、(31) 式の Johnson 解および (33) 式の修正 Johnson 解による平均圧壊応力を計算し、Fig. 10 に示したアルミニウムまたはステンレス鋼鋼管の実験結果⁵⁾と比較している。実験における n の値は不明である。

$n=2, 3, 4$ における $(R/t)_{pl}$ の値は対応する $(R/t)_{el}$

Fig. 11 Mean crushing stresses for aluminum cylinders based on $(R/t)_{pl}$ Fig. 12 Mean crushing stresses for aluminum cylinders based on the experimental relation between R/t and n

値を上回っており、したがって、 $n=4$ 以下の場合の平均圧壊応力値 σ_m/σ_y はいずれの理論解においても総体的に Fig. 10 よりも低い値となっている。 $n=4$ および 5 程度における実験値との対応は、一般化 Pugsley 解（やや高目）と Johnson 解（やや低目）が比較的良好である。このことは、低次モードに対しては、面内せん断力の塑性仕事分を考慮すべきこと、あるいは $\alpha = \pi/2n$ の仮定の妥当性を示唆するが、実験による観察¹¹⁾では後者は必ずしも肯定できない。

Fig. 12 では、Fig. 11 での $(R/t)_{pl}$ および $(R/t)_{el}$ の代わりに、実験的な $R/t-n$ 関係 ($n \geq 4$)¹⁰⁾を用いて平均圧壊応力 σ_m/σ_y が計算されている。Fig. 9 から明らかのように、すべての n に対して実験での R/t は $(R/t)_{pl}$

Fig. 13 Mean crushing stresses for mild steel cylinders based on $(R/t)_{pl}$

および $(R/t)_{el}$ より大きな値をとり、したがって n の全域で Fig. 12 の σ_m/σ_y は Fig. 11 の値よりも小さい。その結果、 $n=4$ 程度の一般化 Pugsley 解が実験値と良好に対応しており、再び、低次モードにおいて面内せん断力を考慮することの正当性が示された。

Fig. 13 では炭素鋼鋼管に対する平均圧壊応力の理論値と実験値^{8),11)} が比較されており、理論解の計算には (20) 式の $(R/t)_{pl}$ (文献 11) に示したように実験結果とほぼ良好に対応する) が仮定されている。 $n=3$ および 4 程度における理論値と実験値との対応に関しては、一般化 Pugsley 解が比較的良好であり、Johnson 解と修正 Johnson 解はかなり低目の結果を与えている。すなわち、Fig. 12 のアルミニウム/ステンレス鋼鋼管の場合と同様に、低次モードに対しては膜力成分のなす塑性仕事を考慮する必要があると判断される。

4 結 言

本研究においては、軸圧縮荷重を受ける円筒殻の軸対称および非軸対称完全崩壊時の平均圧壊荷重に関し、種々の剛塑性解析解と実験結果との比較を行い、各理論解の妥当性を論じた。主要な結論は、以下のとおりである。

(1) 軸対称崩壊時の平均圧壊荷重に関しては、ストローク・長さ比の影響を考慮して Alexander の理論解を修正した (10) 式の補正 Alexander 解が、平均圧壊荷重値および半波長圧壊に対応するストローク値ともに、自動車技術会による炭素鋼鋼管実験結果と良好に一致した。

(2) 肉厚が薄く、非軸対称崩壊モードが主として塑性座屈現象により決定される範囲の R/t を有する円筒殻

Fig. 14 Mean crushing stresses for axisymmetric and non-axisymmetric collapse mode of axially compressed circular cylindrical shells

の平均圧壊荷重に関しては、 $\alpha=\pi/4$ の非軸対称モードに対し曲げ塑性仕事のみを考慮した (34) 式の修正 Johnson 解が、実験値より若干低目の値を与えるものの、総体的に実験結果の傾向をよく表現している。

(3) 肉厚が厚く、非軸対称崩壊モードが主として塑性座屈現象により決定される範囲の R/t を有する円筒殻の平均圧壊荷重に関しては、一般化 Pugsley 解、Johnson 解および修正 Johnson 解のいずれも実験結果を十分に説明する値を与えないが、面内せん断力のなす塑性仕事を考慮した一般化 Pugsley 解が比較的实验データに近い平均圧壊荷重値を与えており、 R/t が小さい場合には塑性崩壊メカニズムに対する面内不伸張の仮定は妥当でなく、膜力塑性仕事を考慮する必要があると考えられる。

(4) 軸対称圧壊および非軸対称圧壊の両者を含めて考えた場合は、Fig. 14 に示すように種々の材料から成る円筒殻の平均圧壊応力値は、ほぼ (10) 式の補正 Alexander 解と (34) 式の修正 Johnson 解 ($R/t-n$ 関係として (14) 式を用いている) の間に分布しており、両者をそれぞれ平均圧壊応力値の上界および下界値と見なすこともできる。現状では、非軸対称崩壊モードに対する材料別の精度の高い平均圧壊荷重評価は困難であり、今後の課題として有限要素法などによる詳細な解析が要求される。

参 考 文 献

- 1) W. Johnson and R. Reid: Metallic Energy Dissipating Systems, Applied Mechanics Reviews, Vol. 31, No. 3 (1978), 277.
- 2) N. Jones and T. Wierzbicki: Structural Crash-

- worthiness, Butterworth & Co(Publishers) Ltd. (1983).
- 3) J. M. Alexander : An Approximate Analysis of the Collapse of Thin Cylindrical Shells under Axial Loading, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol.13, Pt.1 (1960), 10.
 - 4) A. A. Ezra and R. J. Fay : An Assessment of Energy Absorbing Devices for Prospective Use in Aircraft Impact Simulations, Dynamic Response of Structures (ed. by G. Herrmann and N. Perrone), Pergamon Press Inc. (1972), 225.
 - 5) A. Pugsley and M. Macaulay : The Large-Scale Crumpling of Thin Cylindrical Columns, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol.13, Pt.1 (1960), 1.
 - 6) W. Johnson, P. D. Soden and S. T. S. Al-Hasani : Inextensional Collapse of Thin-Walled Tubes under Axial Compression, J. of Strain Analysis, Vol.12, No.4 (1977), 317.
 - 7) V. Tvergaard : On the Transition from a Diamond Mode to an Axisymmetric Mode of Collapse in Cylindrical Shells, Int. J. Solids Structures, Vol.9, No.10 (1983), 845.
 - 8) 自動車技術会構造強度部門委員会衝突解析WG編集 : 薄肉部材の崩壊特性 (1981年10月), 衝突解析法実例集 (1982年8月).
 - 9) S. P. Timoshenko and J. M. Gere : Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill (1961).
 - 10) W. H. Horton, S. C. Bailey and A. M. Edwards : Nonsymmetric Buckle Patterns in Progressive Plastic Buckling, Proc. Soc. Exp. Stress Anal., Vol.23, No.2 (1966), 433.
 - 11) 都井, 川井 : 薄肉構造の離散化極限解析 (その5) ——軸圧縮荷重を受ける円筒殻の非軸対称塑性座屈モード——, 日本造船学会論文集, 第154号 (1983), 353.
 - 12) Y. Yoshimura : On the Mechanism of Buckling of a Circular Cylindrical Shell under Axial Compression, NACA, TM 1390 (1955).
 - 13) G. Gerard : Compression and Torsional Buckling of Thin-Walled Cylinders in the Yield Region, NACA, TN 3726 (1956).
 - 14) J. W. Geckeler : Plastisches Knicken der Wandung von Hohlzylindern und einige andere Faltungserscheinungen an Schalen und Blechen, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 8, Heft 5 (1928), 23.
-