初期たわみをもつ円筒殻の胴板座屈圧力 (第 1 報)

正員 本 間 康 之* 石 田 忍**

Shell Buckling of Circular Cylindrical Shells With Initial Deflection

by Yasuyuki Homma, *member* Shinobu Ishida

Summary

An Experimental and analytical investigation of shell buckling of circular cylindrical shells under hydrostatic pressure was carried out in order to clarify the effect of initial deflection.

Fifty-nine models with one bay and two rings, which consisted of 32-models without the initial deflection and 27-models with that, were fabricated with machine tools and were tested. The geometrical characteristics of those models are shown in Table 1.

The analyses of shell buckling of those models were carried out by finite element method.

The following results were obtained from the experiments and the analyses.

1) It seems, from comparison of the analytical results with the experiments, that the shell buckling strength of the cylindrical shells with fixed ends will be predicted by the finite element method.

2) In the lower range of the thinness factor λ (that is, $0.7 < \lambda < 1.0$) the buckling strength of the cylindrical shells with the initial deflection being one-half to equal size of the shell thickness were 30% to 40% lower than the buckling strength of the perfect cylindrical shells having same geometrical characteristics, but, in the higher range of λ ($\lambda > 2.0$), the initial deflection did not appear to be very important.

3) The cylindrical shells, in the lower range of λ ($0.7 < \lambda < 0.9$), could resist to higher pressure than that at which the shell buckling was caused, and those pressure almost equal to the shell buckling pressure of the perfect cylindrical shells having the same geometrical characteristics.

1 ま え が き

この研究は初期たわみを有する円筒殻が外圧によって胴板座屈を生じるとき、初期たわみが圧潰圧力に与える影響を明らかにすることを目的としている。初期たわみが胴板座屈圧力を低下させることはよく知られており、このことについては 1950 年代に多くの研究が発表され¹⁾、円筒殻の初期たわみを数量化する方法についていくつかの提案がなされ、それらによって表示された初期たわみ量と圧潰圧力の関係についても論じられている。それらの表示法はそれぞれ一応は合理的と思われる説明がなされているが、相互に矛盾があり、また、模型実験結果について初期たわみの大小と圧潰圧力の大きさが入れ替っている例もいくつかある¹⁾。さらにこれらの研究の多くは弾性解析に基づいており、塑性変形まで考えたものはほとんどない。したがって、初期たわみが胴板座

屈圧力に与える影響、とくに弾塑性座屈を生じる場合について詳しく研究する必要がある。

この目的に対し、本研究では機械加工により製作した模型 59 個について圧潰試験ならびに有限要素法による解析を行った。Fig. 1 に示すように模型は 1 つのスペンをもち、両端に補強リングが設けられている。補強リン

Fig.1 Schematic drawing of models

* 東京農工大学工学部

** トヨタ自動車

グの断面積は十分大きく、端部のたわみとたわみ角はゼロと見なすことができる。

原則として同一形状をもつ模型3個づつを製作し、うち2個に最大たわみ量が板厚と同程度および半分程度を目標に局所的な初期たわみを与え、各模型に外圧を加えて圧潰させ、初期たわみが円筒殻の挙動および圧潰圧力

に与える影響をしらべた。

有限要素法による解析は、平面シェル要素を用い²⁾、上田らによって定式化された解法³⁾に従って作成したプログラムによった。

圧潰試験ならびに解析から胴板座屈圧力に対する初期たわみの影響の定量化についてある程度の成果が得られ

Table 1-a Dimensions of models

The Character Number of the Model	Inner Radius r (mm)	Span Length l (mm)	Shell Thickness			Initial Deflection			Thinness Factor	
			h mean (mm)	h max (mm)	h min (mm)	δ (mm)	δ/h_{mean}	δ/h_{min}	λ (h mean)	λ (h min)
103012-00	55.0	30.00	1.183	1.206	1.160	0	—	—	0.549	0.557
103512-00	55.0	35.00	1.187	1.201	1.169	0	—	—	0.591	0.598
103010-00	55.0	30.00	1.003	1.085	0.959	0	—	—	0.605	0.626
104012-00	55.0	40.00	1.184	1.220	1.148	0	—	—	0.633	0.648
103510-00	55.0	35.00	0.946	1.050	0.871	0	—	—	0.683	0.726
105012-00	55.0	50.00	1.186	1.219	1.156	0	—	—	0.707	0.721
104010-00	55.0	40.00	0.968	1.027	0.966	0	—	—	0.717	0.718
104510-00	55.0	45.00	1.031	1.090	1.000	0	—	—	0.726	0.743
105010-00	55.0	50.00	0.930	1.052	0.825	0	—	—	0.827	0.904
105009-00	55.0	50.00	0.879	0.929	0.850	0	—	—	0.862	0.884
105510-00	55.0	55.00	0.989	0.999	0.939	0	—	—	0.828	0.861
106010-00	55.0	60.00	0.976	1.130	0.810	0	—	—	0.873	1.004

Table 1-b Dimensions of models

The Character Number of the Model	Inner Radius r (mm)	Span Length l mean (mm)	Shell Thickness			Initial Deflection			Thinness Factor	
			h mean (mm)	h max (mm)	h min (mm)	δ (mm)	δ/h_{mean}	δ/h_{min}	λ (h mean)	λ (h min)
182000-00	56.5	40.16	1.197	1.248	1.117	0	—	—	0.645	0.680
182000-05	56.5	40.35	1.172	1.267	1.104	0.614	0.52	0.56	0.657	0.687
182000-10	56.5	39.46	1.150	1.246	1.032	1.040	0.90	1.01	0.659	0.715
180000-00	56.5	40.27	0.982	1.052	0.927	0	—	—	0.753	0.767
180000-05	56.5	39.82	0.932	0.987	0.866	0.277	0.30	0.32	0.775	0.819
180000-10	56.5	39.86	0.985	1.075	0.892	0.740	0.75	0.83	0.744	0.802
192000-00	56.5	49.97	1.173	1.293	1.045	0	—	—	0.734	0.801
192000-05	56.5	49.84	1.193	1.332	1.059	0.529	0.44	0.50	0.724	0.792
192000-10	56.5	49.98	1.197	1.328	1.058	1.043	0.87	0.99	0.723	0.794
190000-00	56.5	49.98	0.994	1.026	0.956	0	—	—	0.832	0.856
190000-05	56.5	49.83	0.997	1.130	0.847	0.626	0.63	0.74	0.828	0.936
190000-10	56.5	49.97	0.966	1.093	0.854	0.936	0.97	1.10	0.850	0.932
188000-00	56.5	40.00	0.792	0.908	0.668	0	—	—	0.882	1.002
188000-05	56.5	39.93	0.796	0.849	0.727	0.437	0.55	0.60	0.878	0.940
185000-10	56.5	39.88	0.808	0.853	0.745	1.069	1.32	1.44	0.868	0.922
198000-00	56.5	50.02	0.804	0.931	0.677	0	—	—	0.975	1.110
198000-05	56.5	50.06	0.785	0.842	0.723	0.456	0.58	0.63	0.993	1.057
198000-10	56.5	49.92	0.801	0.927	0.667	1.065	1.33	1.60	0.977	1.121
100000-00	56.5	59.96	0.960	1.044	0.863	0	—	—	0.935	1.013
100000-05	56.5	60.07	0.996	1.092	0.893	0.612	0.61	0.69	0.910	0.988
100000-10	56.5	60.07	0.992	1.091	0.888	0.858	0.87	0.97	0.913	0.992

Table 1-c Dimensions of models

The Character Number of the Model	Inner Radius r (mm)	Span Length l mean (mm)	Shell Thickness			Initial Deflection			Thinness Factor	
			h mean (mm)	h max (mm)	h min (mm)	δ (mm)	δ/h mean	δ/h min	λ (h mean)	λ (h min)
105008-00	56.5	50.01	0.783	0.809	0.759	0	—	—	1.008	1.032
105008-05	56.5	49.90	0.816	0.842	0.794	0.445	0.55	0.56	0.977	0.997
105008-10	56.5	49.90	0.778	0.810	0.739	0.712	0.92	0.96	1.012	1.052
105008-11	56.5	49.86	0.791	0.818	0.767	0.716	0.91	0.93	0.999	1.023
106008-00	56.5	60.30	0.815	0.857	0.766	0	—	—	1.075	1.126
106008-05	56.5	59.85	0.797	0.824	0.764	0.295	0.37	0.39	1.089	1.124
106008-10	56.5	60.04	0.833	0.868	0.809	1.095	1.31	1.35	1.052	1.078
109007-00	56.5	90.00	0.752	0.780	0.727	0	—	—	1.446	1.483
109007-05	56.5	90.25	0.731	0.753	0.698	0.413	0.57	0.59	1.479	1.531
109007-10	56.5	90.30	0.719	0.745	0.683	0.738	1.03	1.08	1.497	1.550
112007-00	56.5	120.20	0.758	0.793	0.733	0	—	—	1.661	1.703
112007-05	56.5	120.10	0.764	0.821	0.712	0.258	0.34	0.36	1.650	1.740
112007-10	56.5	120.35	0.715	0.766	0.658	0.640	0.90	0.97	1.736	1.848
111006-00	56.5	110.15	0.601	0.638	0.570	0	—	—	1.892	1.968
111006-02	56.5	110.15	0.645	0.670	0.620	0.125	0.19	0.20	1.795	1.848
111006-05	56.5	110.25	0.571	0.600	0.542	0.329	0.58	0.61	1.967	2.045
111006-10	56.5	110.35	0.671	0.690	0.639	0.630	0.94	0.99	1.744	1.808
109005-00	56.5	90.22	0.563	0.588	0.543	0	—	—	1.798	1.848
109005-05	56.5	90.10	0.576	0.600	0.551	0.130	0.23	0.24	1.766	1.826
109005-10	56.5	90.30	0.547	0.581	0.512	0.600	1.10	1.17	1.838	1.931
114006-00	56.5	139.90	0.671	0.698	0.641	0	—	—	1.963	2.031
114006-05	56.5	140.15	0.645	0.679	0.621	0.280	0.43	0.45	2.024	2.082
114006-10	56.5	140.05	0.700	0.729	0.670	0.920	1.31	1.37	1.903	1.966
112005-00	56.5	120.05	0.529	0.562	0.482	0	—	—	2.174	2.330
112005-05	56.5	119.90	0.519	0.542	0.492	0.335	0.65	0.68	2.203	2.294
112005-10	56.5	119.60	0.500	0.530	0.478	0.515	1.03	1.08	2.263	2.341

たと考える。

2 模 型

2.1 模型の製作方法

模型の内径は 113 mm で一定とし、Fig.1 に示すリング間の寸法（スパン長さ） l および胴板の厚さ h を系統的に変えた。両端リングの断面寸法は高さ 13 mm、幅 15 mm で胴板の厚さにくらべ十分大きくしてある。

模型の材料は、低温配管用鋼管（JIS G 3460）呼び径 125、スケジュール番号 160（外径 139.8 mm、肉厚 15.9 mm）を用いた。Table 1-a および 1-b に示す模型は既に発表する方法⁴⁾ によって製作したが、Table 1-c の模型については製作方法を改良しつぎの手順によった。

材料を必要な長さに切断し、旋盤に 4 本爪チャックを用いて取付け、右端面を仕上げるとともに外面を黒皮がとれるまで切削する。つぎに仕上げた端面側をチャックに取付け、計画寸法となるように反対側の端面を仕上げ

ると同時に内面を 113.015 mm に切削する。外径 113 mm の円筒状の治具を内側に入れ、その右端を旋盤のセンターで支え外側を計画寸法まで切削する。このような加工法を採用することによって、円筒内面の中心軸と外面の中心軸のずれをなくすることができ、板厚のバラツキを従来の加工法より減らすことができた。

2.2 模型の形状寸法

模型の形状寸法の測定結果を Table 1 に示す。測定方法は文献 4 と同様である。とくに胴板の厚さは全周を 72 等分し、各点の厚さをマイクロメータで測定した。それらの平均値、最大値および最小値を Table 1 に示した。また、板厚分布を製作方法別に 1 例ずつ Fig. 2 に示した。

2.3 初期たわみ

すでに述べたように原則として同じ計画寸法をもつ模型 3 個を製作し、そのうちの 2 個につぎに述べる方法で初期たわみを与えた。

Fig. 2-a Shell thickness of model manufactured by former method

Fig. 2-b Shell thickness of model manufactured by new method

Fig. 3 に示す金具を模型の内側に差し入れ、板厚最小部の外面に球状の硬質ゴムを押しあてて凹みを生じさせ、そのあと金具を分解して取り出す。初期たわみを与えた模型を旋盤の両センチで支え、刃物台にとりつけたダイヤルゲージで初期たわみ形状を測定した。その1例を Fig. 4 に示す。また、測定された初期たわみの最大値を Table 1 に示す。

2.3 材料試験

文献4と同様の方法で模型材料から JIS 14 B 号材料試験片を採取し、ねじ式材料試験機を用いて材料の縦弾性係数と降伏点を求めた。結果を Table 1 に示す。

3 圧潰試験

3.1 加圧方法

加圧タンクを用いて模型に階段状に増加させた外圧を

Fig. 3 Apparatus giving initial deflection to cylindrical shells

Fig. 4 Initial deflection of models

加え、圧力とたわみを測定した。たわみ測定は一部の模型については Fig. 5-a に示すように圧力段階における周方向たわみ分布 (X 軸: 回転角, Y 軸: たわみ) を、また、他の模型については Fig. 5-b のように初期たわみの中心点のたわみと圧力の関係 (X 軸: たわみ, Y 軸: 圧力) を X - Y レコーダーにより記録させた。

3.2 円筒殻の挙動と圧潰圧力

3.2.1 Thinness Factor

銅板座屈の実験結果を整理するのに次に述べる thinness factor λ あるいは徳川ナンバーと呼ばれるパラメータが用いられている。これらは互に逆数関係になっており本質的には同じものである。ただし, thinness factor には $\sqrt{\text{降伏点}/\text{縦弾性係数}}$ が乗じられている。

Mises あるいは徳川が導いた両端単純支持の境界条件をもつ円筒殻の弾性銅板座屈圧力は高次の項を省略し次式で与えられる。

Fig. 5-a Relations between pressure and distribution of deflection in circumferential direction

Fig. 5-b Relation between pressure and deflection at the point to which initial deflection was given

$$P = \frac{E \left(\frac{h}{r} \right)}{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi r}{l} \right)^2} \left[\frac{\left(\frac{\pi r}{l} \right)^4}{\left\{ n^2 + \left(\frac{\pi r}{l} \right)^2 \right\}^2} + \frac{h^2}{12 r^2 (1 - \nu^2)} \left\{ n^2 + \left(\frac{\pi r}{l} \right)^2 \right\}^2 \right] \quad (1)$$

ここに n は周方向の座屈波数である。 n に関し P を最小化して P_{cr} を求め、簡略化を行って次式が得られる。

$$\psi_{cr} = 1.30 / \lambda^2 \quad (2)$$

ここに

$$\psi_{cr} = \frac{P_{cr} r}{\sigma_y h}, \quad \lambda = \sqrt[4]{\left(\frac{l}{2r} \right)^2 \left(\frac{2r}{h} \right)^3 \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}}}$$

r 円筒殻の半径 P_{cr} 胴板座屈圧力
 l 円筒殻のスパン長さ E 縦弾性係数
 h 円筒殻の板厚 σ_y 降伏点
 ψ pressure factor
 λ thinness factor

thinness factor λ は柱の細長比、あるいは板の挙動を論じる際に用いられる $\sqrt{\sigma_y/E} \times b/t$ に相当するものと考えてよからう。円筒殻の胴板座屈を論じるのに λ が指標として用いられることが多い。これが適切か否か明確でないが現在のところ他によい方法が見当たらないのでこれによることとする。

なお、軟鋼を材料として著者らがこれまでに行った研究結果によると $\lambda < 0.5$ の場合、円筒殻の圧潰形態は軸対称圧潰となり、 $\lambda > 0.5$ のとき胴板座屈となる。したがってこの研究では後者の範囲を対象とする。

3.2.2 初期たわみのない円筒殻の挙動

円筒殻のたわみは圧力とともに増加してゆくが、 λ が大きく殻の大部分が弾性状態で座屈を生じる場合（圧潰時の pressure factor がおよそ 0.6 以下）には、圧力の上昇とともに周方向に胴板座屈波形が形成されてゆく。 λ が小さい場合には座屈波の形成は見られず、ほぼ一様なたわみを生じてゆき、胴板座屈圧力に近づくにつれてたわみの一様性は減少するものの局所的にたわみが特に大きくなる現象は現れない。そして胴板座屈圧力 P_{cr} に達すると最初の座屈波を生じて圧力が低下する。その後送油を再開すると再び圧力は増加し、順次第2、第3の座屈波を生じてゆくが、胴板座屈圧力 P_{cr} をこえることはない。

3.2.3 初期たわみをもつ円筒殻の挙動

thinness factor λ が 0.7~1.1 の範囲に入る円筒殻ではつぎのような挙動が見られた。Fig. 5-a は初期たわみをもつ円筒殻の周方向たわみ分布を示したものである。初期たわみを与えた部分の変形は圧力とともに増加するがその他の部分はほぼ一様な変形を生じ、その大きさは初期たわみのない場合に比べて小さい。そして、ある圧力で初期たわみを与えた部分のたわみが局所的に急増し、最初の座屈波となって圧力が低下する。この研究ではこの第1番目の座屈波が形成され、圧力低下を生じる圧力を胴板座屈圧力 P_{cr} 、それに対応する pressure factor を ψ_{cr} で表わす。胴板座屈を生じる際のたわみ増加量は与えた初期たわみが小さいほど大きい。円筒殻は P_{cr} より大きな圧力に耐えることができ、送油を再開すると最高圧力 P_{max} において第2の座屈波を生じ、再び圧力が低下する。送油をつづけると第3、第4の座屈波を生じてゆくが圧力は P_{max} をこえることはない。両

端に大きなリングをもつ1スパンの円筒殻は銅板座屈によって局部的に大きな変形を生じ、部分的に剛性が失われたあともリングの働きによってさらに大きな耐荷力をもつのであろう。

λ が1.5より大きい範囲では、初期たわみをもつ円筒

殻の銅板座屈圧力と最高圧力の差は λ の増加とともに小さくなり、 λ が2.0以上で最高圧力は見られなくなる。これは λ が大きい円筒殻はスパンが大きく、板厚が薄いので両端リングの支持作用が効果的に働かないためである。

Table 2-a Pressure factor required to cause collapsing of models with rigidly supported ends

The Character Number of the Model	Buckling Pressure P_{cr} (kgf/cm ²)	Maximum Pressure P_{max} (kgf/cm ²)	Pressure Ratio P_{max}/P_{cr}	Young Modulus $E(\times 10^4)$ (kgf/mm ²)	Yield Point σ_y (kgf/mm ²)	Pressure Factor				Number of Lobe
						ψ_{cr} (h mean)	ψ_{max} (h mean)	ψ_{cr} (h min)	ψ_{max} (h min)	
103012-00	60.0	—	—	2.08	25.6	1.090	—	1.111	—	13
103512-00	68.0	—	—	2.08	25.6	1.231	—	1.250	—	10
103010-00	45.0	—	—	2.02	23.6	1.046	—	1.094	—	9
104012-00	59.0	—	—	2.08	25.6	1.071	—	1.104	—	9
103510-00	40.0	—	—	2.02	23.6	0.985	—	1.070	—	10
105012-00	60.0	—	—	2.03	25.6	1.087	—	1.115	—	8
104010-00	49.0	—	—	2.02	23.6	1.180	—	1.182	—	10
104510-00	50.0	—	—	2.02	23.6	1.130	—	1.165	—	9
105010-00	35.0	—	—	2.02	23.6	0.877	—	0.989	—	10
105009-00	40.0	—	—	2.02	23.6	1.061	—	1.097	—	10
105510-00	40.0	—	—	2.02	23.6	0.943	—	0.993	—	10
106010-00	35.0	—	—	2.02	23.6	0.836	—	1.007	—	8

Table 2-b Pressure factor required to cause collapsing of models with rigidly supported ends

The Character Number of the Model	Buckling Pressure P_{cr} (kgf/cm ²)	Maximum Pressure P_{max} (kgf/cm ²)	Pressure Ratio P_{max}/P_{cr}	Young Modulus $E(\times 10^4)$ (kgf/mm ²)	Yield Point σ_y (kgf/mm ²)	Pressure Factor				Number of Lobe
						ψ_{cr} (h mean)	ψ_{max} (h mean)	ψ_{cr} (h min)	ψ_{max} (h min)	
182000-00	56.8	—	—	2.05	26.2	1.023	—	1.097	—	9
182000-05	45.8	56.4	1.23	2.05	26.2	0.843	1.038	0.895	1.102	10
182000-10	45.0	54.5	1.21	2.05	26.2	0.844	1.022	0.940	1.139	9
180000-00	45.0	—	—	2.00	25.8	1.004	—	1.063	—	10
180000-05	38.0	43.1	1.13	2.05	26.2	0.879	0.997	0.946	1.073	10
180000-10	31.0	43.0	1.39	2.05	26.2	0.679	0.941	0.749	1.040	10
122000-00	55.0	—	—	2.00	25.8	1.027	—	1.153	—	9
192000-05	40.0	50.0	1.25	2.00	25.8	0.734	0.918	0.827	1.034	9
192000-10	34.5	50.0	1.45	2.00	25.8	0.631	0.915	0.714	1.035	9
190000-00	45.0	—	—	2.00	25.8	0.991	—	1.031	—	9
190000-05	27.5	37.5	1.36	2.00	25.8	0.604	0.824	0.711	0.970	9
190000-10	25.5	33.0	1.53	2.00	25.8	0.578	0.834	0.654	1.000	9
188000-00	32.0	—	—	2.00	25.8	0.665	—	1.049	—	10
183000-05	25.5	35.9	1.41	2.00	25.8	0.702	0.988	0.768	1.031	10
183000-10	21.0	35.0	1.67	2.00	25.8	0.569	0.949	0.617	1.029	10
198000-00	33.0	—	—	2.00	25.8	0.839	—	1.067	—	9
198000-05	21.5	29.0	1.35	2.00	25.8	0.600	0.809	0.651	0.878	9
198000-10	16.0	27.0	1.69	2.00	25.8	0.437	0.738	0.525	0.886	9
100000-00	44.0	—	—	2.00	25.8	1.004	—	1.117	—	7
100000-05	29.0	38.0	1.31	2.00	25.8	0.638	0.836	0.711	0.932	7
100000-10	26.5	37.0	1.40	2.00	25.8	0.585	0.817	0.654	0.912	7

Table 2-c Pressure factor required to cause collapsing of models with rigidly supported ends

The Character Number of the Model	Buckling Pressure P_{cr} (kgf/cm ²)	Maximum Pressure P_{max} (kgf/cm ²)	Pressure Ratio P_{max}/P_{cr}	Young Modulus E ($\times 10^4$) (kgf/mm ²)	Yield Point σ_y (kgf/mm ²)	Pressure Factor				Number of Lobe
						ψ_{cr} (h mean)	ψ_{max} (h mean)	ψ_{cr} (h min)	ψ_{max} (h min)	
105008-00	35.6	—	—	2.09	27.7	0.927	—	0.957	—	9
105008-05	29.2	36.9	1.26	2.09	27.7	0.730	0.922	0.750	0.948	8
105008-10	22.5	31.3	1.39	2.09	27.7	0.590	0.821	0.621	0.864	8
105008-11	21.6	32.2	1.49	2.09	27.7	0.557	0.830	0.574	0.856	9
106008-00	39.0	—	—	2.09	27.7	0.976	—	1.039	—	8
106008-05	28.4	33.4	1.18	2.09	27.7	0.727	0.855	0.758	0.892	10
106008-10	23.5	33.9	1.44	2.09	27.7	0.573	0.827	0.592	0.855	8
109007-00	29.2	—	—	1.98	28.2	0.778	—	0.893	—	6
109007-05	19.8	20.7	1.05	1.98	28.2	0.543	0.567	0.568	0.594	6
109007-10	16.7	21.8	1.31	1.98	28.2	0.466	0.608	0.490	0.640	6
112007-00	23.8	—	—	1.98	28.2	0.629	—	0.650	—	5
112007-05	21.3	—	—	1.98	28.2	0.558	—	0.599	—	6
112007-10	14.4	15.6	1.08	1.98	28.2	0.404	0.437	0.439	0.475	5
111006-00	14.3	—	—	1.98	28.2	0.476	—	0.503	—	5
111006-02	16.2	—	—	1.98	28.2	0.503	—	0.581	—	6
111006-05	10.8	11.1	1.03	1.98	28.2	0.379	0.389	0.399	0.411	6
111006-10	14.9	15.9	1.07	1.98	28.2	0.445	0.475	0.467	0.498	6
109005-00	14.8	—	—	1.98	28.2	0.527	—	0.546	—	7
109005-05	14.5	14.6	1.01	1.98	28.2	0.504	0.508	0.527	0.531	6
109005-10	10.2	—	—	1.98	28.2	0.374	—	0.399	—	7
114006-00	15.7	—	—	1.98	28.2	0.468	—	0.491	—	5
114006-05	12.4	—	—	1.98	28.2	0.386	—	0.400	—	5
114006-10	13.5	14.2	1.05	1.98	28.2	0.386	0.406	0.404	0.424	5
112005-00	9.6	—	—	1.98	28.2	0.364	—	0.399	—	7
112005-05	7.2	—	—	1.98	28.2	0.278	—	0.294	—	6
112005-10	7.3	—	—	1.98	28.2	0.293	—	0.306	—	6

3.2.4 圧潰圧力

圧潰圧力 (胴板座屈圧力 P_{cr} および最高圧力 P_{max}) を Table 2 および Fig. 6 に示す。この図は横軸に thinness factor λ をとり, pressure factor で表わした圧潰圧力をプロットしたものである。胴板座屈圧力の他に最高圧力をもつ場合にはそれらを直線で結んである。初期たわみをもつ円筒殻の最高圧力 P_{max} は $\lambda=0.7\sim 0.9$ の範囲では初期たわみのない円筒殻の胴板座屈圧力とほとんど等しく, λ がこの範囲をこえると両者の間に差を生じてくる。しかし, λ がさらに大きくなり $\lambda>1.5$ の範囲になると既に述べたように λ の増加とともに両者の差は減少してゆく。

また, この図では初期たわみ量 δ/h が 0.74 以下の模型とそれ以上の 2 グループに分けてあり, それらの平均値は 0.50 および 1.09 である。これら 2 グループおよび初期たわみのない場合の各実験点をとる曲線を記入してある。実験数が少なく, かつ, 初期たわみ量 δ のバラ

ツキもあるため確定的なことは言えないが, この図からつぎのことが言えよう。初期たわみによる胴板座屈圧力の低下は $\lambda=1.0$ に対し, $\delta/h=0.5$ のとき約 30%, $\delta/h=1.0$ で約 40%, $\lambda=1.5$ に対し, $\delta/h=0.5$ で約 20%, $\delta/h=1.0$ で約 30% である。

4 有限要素法による解析

4.1 円筒殻の非軸対称弾塑性大たわみ解析

上田ら³⁾によって定式化された方法によって作成した平板の弾塑性大たわみ解析の有限要素法プログラム⁵⁾に平面シェル要素を導入し²⁾, 円筒殻の非軸対称変形の解析を行った。面内ひずみに対しては定ひずみ三角形要素を²⁾, 板曲げに対しては非適合三角形要素²⁾を用いた。外力については, 軸方向荷重は Fig. 7 に示す $\widehat{AB}$ 上の各節点に分散して加え, 円筒面に作用する外圧は常に変形後の円筒面に垂直に作用するものとし, それを節点荷重として負荷する。

Fig.6 Relations between thinness factor and pressure factor to cause collapsing of models with rigidly supported ends

Fig.7 Patterns of initial deflection and direction of coordinate

Fig.7 に示す ABCD 部分すなわち、軸方向にスパン長さの半分 ($x=0 \sim l/2$)、周方向に半波長 (中心角 $\varphi_n = \pi/n$) の部分を計算の対象とした。周方向の半波長をとり上げたのは内方へのたわみと外方へのたわみの形状が同じ形とならないためである。

圧力増分 ΔP と点 $D(x=l/2, y=0)$ におけるたわみ増分の比 $\Delta P/\Delta w$ を計算し、この値が初期値の 1/100 以下となったときの圧力を胴板座屈圧力とした。また、加工硬化率 $H' = E/200$ とした。

4.2 弾性胴板座屈圧力

作成した有限要素法プログラムの精度を確認するため、これによって求めた計算値を式 (1) から得られる Mises の値と比較した。

式 (1) を導くにあたっては、リングの影響を無視して座屈前には一様なたわみを生じていると仮定し、この状態から Fig.7 に示す座標系を用いて次式で与えられる座屈変形を生じるとしている。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \cos \frac{\pi}{l} x \cos n\varphi \\ v &= v_0 \sin \frac{\pi}{l} x \sin n\varphi \\ w &= w_0 \sin \frac{\pi}{l} x \cos n\varphi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

ここに、 u, v および w はそれぞれ軸方向 (x 方向)、周方向 (φ 方向) および半径方向の変位である。

有限要素法による計算ではこれに対応して座標系を Fig.7 のようにとり、境界条件をつぎのように設定した。

$$\left. \begin{aligned}
 &\widehat{AB} \text{ 間 } (x=0, \varphi=0 \sim \pi/n) \\
 &\quad \theta_x=0, \quad v=w \tan \varphi \\
 &\widehat{CD} \text{ 間 } (x=l/2, \varphi=0 \sim \pi/n) \\
 &\quad u=0, \quad \theta_y=0, \quad \theta_z=0 \\
 &\widehat{AD} \text{ 間 } (x=0 \sim l/2, \varphi=0) \\
 &\quad v=0, \quad \theta_x=0, \quad \theta_z=0 \\
 &\widehat{BC} \text{ 間 } (x=0 \sim l/2, \varphi=\pi/n) \\
 &\quad v=w \tan(\pi/n), \quad \theta_x=0, \quad \theta_z=-\theta_y \tan(\pi/n)
 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

ここに、 u, v および w はそれぞれ x, y および z 軸方向の変位、 θ_x, θ_y および θ_z は各座標軸まわりの回転角、 φ は任意の半径と $\overline{OA}$ のなす角、 n は座屈波数であって n を変えて座屈圧力を計算し最小値を求める。

初期たわみをつぎのように仮定した。Fig. 7 において点 D($x=l/2, y=0$) に所定の強制変位 δ を与えたとき生じる軸方向のたわみ分布を初期たわみの軸方向分布とする。このたわみは殻の両端 ($x=0, x=l$) における境界条件を満たしている。また、周方向には全周にわたって波数 n の余弦分布をしているとする。

円筒殻の形状、材料常数および初期たわみ量 δ をつぎのように与えた。

半径/スパン長さ	1/3, 1/4, 1/5
半径/板厚	100~500
縦弾性係数	21,000 kgf/mm ²
最大初期たわみ量 (Fig. 7, D点のたわみ)	
$h/5, h/10, h/20, h/50, h/100, h/1,000$	

なお、降伏点は 60 kgf/mm² とした。

計算結果の一部を Fig. 8 および Fig. 9 に示す。Fig. 8 はスパン長さ/半径=1/4 の場合について thinness factor λ と ψ_{cr} の関係を、また、Fig. 9 はスパン長さ/半径=1/4、板厚/半径=1/200 の場合に初期たわみ量と圧潰圧力の関係を示したものである。有限要素法による計算値は初期たわみ量が板厚の 1/100 のとき Mises の値の約 92%、また、板厚の 1/1,000 のときは同じく 96% であり、作成したプログラムによって弾性銅板座屈圧

Fig. 8 Calculated elastic shell buckling pressure of cylindrical shells with simply supported ends

Fig. 9 Effect of initial deflection to elastic shell buckling pressure of cylindrical shell with simply supported ends

力のはほぼ正しい値が得られるものと考えてよからう。また、この場合板厚の 1/10 の初期たわみによって銅板座屈圧力は約 30% 低下する。

4.3 模型実験の解析

実験した模型の銅板座屈圧力を有限要素法によって計算し実験値と比較した。Fig. 7 に示す ABCD 部分を計算の対象とし、 $\widehat{BC}$ 間の半径方向の変位および x 軸まわりの回転角 θ_x をゼロとし、最大初期たわみの実測値と同じ大きさの強制変位を D 点に与えたときのたわみ分布を初期たわみとした(したがってこの初期たわみは Fig. 7 と異なる)。これは測定された大きさの初期たわみが座屈波と同数だけ周方向に存在すると仮定したことになり、初期たわみの影響を実際より大きく取り入れることになるが、この仮定を設けないと円筒殻の半円周について計算を行わねばならず、節点数が n 倍となって計算機の使用時間の点で困難となる。

すでに述べたように模型の板厚は一様ではなく、したがって模型の全周を対象とし板厚を変化させて計算を行うべきであるが同様の理由から困難である。そこで板厚として平均板厚あるいは最小板厚のいずれかを用いて計算を行うこととし、Table 1-a および 1-b に示す模型については最小板厚を、Table 1-c の模型については平均板厚を用いた。その理由は Table 1-a および 1-b に示す模型の板厚の不均一は内、外面の中心軸の偏りから生じたもので Fig. 4-a のような分布をしている。このため初期たわみを与えない模型の場合、最初の座屈波は必ず板厚最小部に発生するが、Table 1-c に示す模型の板厚は Fig. 4-b の分布をしており、最初の座屈波が板厚最小部に生じるとは限らなかったからである。

また、初期たわみを与えたことによる残留応力や加工硬化の影響についても考慮しない。

Table 3 Collapsing pressure factor

The Number of the Model	The Character Number of the Model	λ	Pressure Factors			ψ_{cr}/ψ_{cal}
			Experiment		F E M	
			ψ_{cr}	ψ_{max}	ψ_{cal}	
1	103012-00	0.557	1.111	—	1.252	0.89
2	103512-00	0.598	1.250	—	1.224	1.02
3	103010-00	0.626	1.094	—	1.213	0.90
4	104012-00	0.648	1.104	—	1.179	0.94
5	182000-00	0.680	1.097	—	1.156	0.95
6	182000-05	0.687	0.895	1.102	0.910	0.98
7	182000-10	0.715	0.940	1.139	0.802	1.17
8	104010-00	0.718	1.182	—	1.115	1.06
9	105012-00	0.721	1.115	—	1.111	1.00
10	103510-00	0.726	1.070	—	1.126	0.95
11	104510-00	0.743	1.165	—	1.105	1.05
12	180000-00	0.787	1.063	—	1.108	0.96
13	192000-05	0.792	0.827	1.034	0.869	0.95
14	192000-10	0.794	0.714	1.035	0.735	0.97
15	192000-00	0.801	1.153	—	1.104	1.04
16	180000-10	0.802	0.749	1.040	0.788	0.95
17	180000-05	0.819	0.946	1.073	0.944	1.00
18	190000-00	0.856	1.031	—	1.104	0.93
19	105510-00	0.861	0.993	—	1.102	0.90
20	105009-00	0.884	1.097	—	1.097	1.00
21	105010-00	0.904	0.989	—	1.093	0.90
22	188000-10	0.922	0.617	1.029	0.629	0.98
23	190000-10	0.932	0.654	1.000	0.626	1.04
24	190000-05	0.936	0.711	0.970	0.685	1.04
25	188000-05	0.940	0.768	1.081	0.741	1.04
26	105008-05	0.977	0.730	0.922	0.675	1.08
27	100000-05	0.988	0.711	0.932	0.692	1.03
28	100000-10	0.992	0.654	0.912	0.624	1.05
29	105008-11	0.999	0.557	0.830	0.593	0.94
30	188000-00	1.002	1.049	—	1.079	0.97
31	106010-00	1.004	1.007	—	1.105	0.91
32	105008-00	1.008	0.927	—	1.083	0.86
33	105008-10	1.012	0.590	0.821	0.579	1.02
34	100000-00	1.013	1.117	—	1.106	1.01
35	106008-10	1.052	0.573	0.827	0.527	1.09
36	198000-05	1.057	0.651	0.878	0.666	0.98
37	106008-00	1.075	0.976	—	1.084	0.90
38	106008-05	1.089	0.727	0.855	0.686	1.05
39	198000-00	1.110	1.067	—	1.087	0.98
40	198000-10	1.121	0.525	0.806	0.532	0.99
41	109007-00	1.446	0.778	—	0.818	0.95
42	109007-05	1.479	0.543	0.567	0.477	1.13
43	109007-10	1.497	0.466	0.608	0.396	1.18
44	112007-05	1.650	0.558	—	0.462	1.21
45	112007-00	1.661	0.629	—	0.611	1.03
46	112007-10	1.736	0.404	0.437	0.361	1.13
47	111006-10	1.744	0.445	0.475	0.340	1.31
48	109005-05	1.766	0.504	0.508	0.459	1.10
49	111006-02	1.795	0.503	—	0.460	1.09
50	109005-00	1.798	0.527	—	0.523	1.01
51	109005-10	1.838	0.374	—	0.311	1.20
52	111006-00	1.892	0.477	—	0.473	1.01
53	114006-10	1.903	0.386	0.406	0.296	1.31
54	114006-00	1.963	0.469	—	0.445	1.05
55	111006-05	1.967	0.379	0.389	0.333	1.14
56	114006-05	2.024	0.385	—	0.335	1.15
57	112005-00	2.174	0.364	—	0.358	1.02
58	112005-05	2.203	0.278	—	0.265	1.05
59	112005-10	2.263	0.293	—	0.233	1.25

境界条件は $\widehat{AB}$ 間を固定としてつぎのように表わせる。

$$\left. \begin{aligned}
 &\widehat{AB} \text{ 間 } (x=0, \varphi=0 \sim \pi/n) \\
 &\quad u=v=w=0, \quad \theta_x=\theta_y=\theta_z=0 \\
 &\widehat{CD} \text{ 間 } (x=l/2, \varphi=0 \sim \pi/n) \\
 &\quad u=\text{一様}, \quad \theta_y=0, \quad \theta_z=0 \\
 &\widehat{AD} \text{ 間 } (x=0 \sim l/2, \varphi=0) \\
 &\quad v=0, \quad \theta_x=0, \quad \theta_z=0 \\
 &\widehat{BC} \text{ 間 } (x=0 \sim l/2, \varphi=\pi/n) \\
 &\quad v=w \tan(\pi/n), \quad \theta_x=0, \quad \theta_z=-\theta_y \tan(\pi/n)
 \end{aligned} \right\}$$

(5)

胴板座屈圧力の計算値を実験値と比較して Table 3 に示す。この表は thinness factor λ の順にならべてあ

り、その番号が Fig. 6 にも記入してある。この表から λ の小さい範囲では実験値と計算値はかなりよく一致するが、 λ が大きく、かつ初期たわみのある場合には計算値が実験値をかなり下まわる場合がある。この原因としてはすでに述べたように計算に用いた初期たわみは周方向に n 個の波数をもち、実際のものより胴板座屈に与える影響が大きいこと、 λ が大きい模型はスパンが長くなるが、初期たわみを与える金具 (Fig. 3) の形状の関係からスパン全長にわたって初期たわみを与えることができず、この点でも計算の方が悪い条件となっている、などが考えられる。

5 む す び

両端に大きな補強リングをもつ1スパンの模型 59 個の実験を行うとともにそれに対する有限要素法による解析を行った結果つぎの知見を得た。

1) 作成した円筒殻の非軸対称弾塑性変形解析プログラムにより初期たわみをもつ円筒殻の胴板座屈圧力を予測できるものと思われる。

2) 初期たわみの胴板座屈圧力に対する影響は円筒殻の形状によって異なるが、thinness factor $\lambda=1.0$ の場合に、板厚の 1/2 から板厚と同程度の最大初期たわみ量に対し、座屈圧力の低下量は 30~40% である。補強リングの寸法がこの研究で用いた模型より小さい場合には初期たわみの影響は大きくなると思われる。

3) 両端に大きな補強リングをもつ1スパンの円筒殻は初期たわみが存在すると胴板座屈圧力の他に最高圧力を有する。thinness factor λ が小さい場合 ($\lambda < 0.9$) には、この最高圧力は初期たわみのない円筒殻の胴板座屈圧力とほとんど等しい。

実際に製作される円筒殻は本研究の模型と異なり、多数の補強リングをもつ構造となっており、胴板座屈は補強リング間に生じる。その場合には補強リングのたわみと回転を考慮しなければならない。この研究につづいて

そのような場合について実験と計算をすすめている。

胴板座屈圧力に対する初期たわみの影響は材料の降伏点により異なると考えられる。また、本研究では初期たわみの無次元化に板厚との比を用いているが、これは必ずしも適切とは思われず他の表現法を考える必要があろう。これらの問題についても数値計算によって明らかにしたい。

円筒殻模型の製作にあたって東京農工大学工学部機械工場小室技官の御指導を頂いたことを感謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 本間：外圧を受ける円筒殻の胴板座屈．日本造船学会誌，第 533 号，昭和 48 年 11 月，p. 575~585.
- 2) 有限要素法ハンドブック，I 基礎編，培風館，昭和 56 年 9 月，p. 292~294，p. 234~237 および p. 263~265.
- 3) 上田他：圧縮を受ける正方形板の最終強度に関する研究（第 1 報），日本造船学会論文集，第 137 号，昭和 50 年 6 月，p. 210~221.
- 4) 本間：外圧を受ける円筒殻の軸対称圧潰強度（その 2），日本造船学会論文集，第 154 号，昭和 58 年 11 月，p. 407~415.
- 5) 本間他：局所的な分布荷重を受ける長方形板の強度，日本造船学会論文集，第 150 号，昭和 56 年 11 月，p. 439~447.