疲労き裂発生モデルとモンテカルロ法による ランダム荷重下の寿命推定

正員 永井 欣一* 正員 藤本 由紀夫*
正員 富田 康光**

A Fatigue Crack Initiation Model and The Life Estimation under
Random Loading by Montecarlo Method.

by Kin-ichi Nagai, *Member* Yukio Fujimoto, *Member*
Yasumitsu Tomita, *Member*

Summary

In the previous report, authors proposed a new mechanical model for the fatigue crack initiation and investigated the fatigue life properties under variable stress amplitude.

In this study, using the montecarlo method the fatigue crack initiation lives were estimated for random loads with exponential, weibull and uniform density based on this model.

The outline of the model is as follows. In fatigue test, although great many micro fatigue damages are occurred in the material, the number of cracks which can grow up to visual length is limited, because many micro cracks among them can not penetrate the grain boundaries. Actual fatigue crack initiates from the position where the number of cycles for visual crack initiation takes the smallest value in the material.

In the model, the distribution function of the crack initiation life, N_c , is expressed as in equation(3) and(4). In the equations, $f_{\Delta N_m}(n)$ is the probability density function PDF of the number of cycles consumed by the micro crack propagation of the m -th number of transgranular, $f_{\Delta N_{m,w}}(n)$ is the PDF of the number of cycles consumed by the crack penetration of m -th number of grain boundaries. And symbol $*$ signifies the convolution integral, k is the set of the number of micro fatigue damages on the material surface.

The reliability system of the model is expressed as in Fig.2. After the PDF of $f_{\Delta N_m}(n)$ and $f_{\Delta N_{m,w}}(n)$ are determined, the montecarlo simulations are carried out in accordance with the flow chart of Fig.8.

On the above random loads, the effects of the shape parameter, the scale parameter, the maximum stress and the minimum stress amplitude of the stress frequency distributions are considered. Estimated results are a good agreement with the experimental results obtained by authors and others qualitatively.

主 な 記 号

k : 荷重の繰返しによって試料表面に初期に生ずる微視的疲労損傷箇所個数
 Δd : 塑性変形により細分化した平均結晶粒直径
 m, m^* : き裂が結晶粒内および粒界を通過する回数, 巨視き裂に成長するまでに通過する回数
 $S_a, \hat{S}_a$: 公称応力振幅, 等価応力振幅 (Appendix 1

参 照

$\overline{S_{aw_0}}$: 粒内に塑性変形が生ずる限界の応力レベル
 $S_{a,max}, S_{a,min}$: ランダム荷重の応力頻度分布における最大応力振幅, 最小応力振幅
 K_B, K_C : 応力拡大係数で表示した粒界強度分布の上下限值
 $N_{c,i}$: 巨視き裂発生寿命 (以下 $\Delta N_m, \Delta N_{m,w}, D_D, N_w$ も含めて添字 i は k 箇所中の i 要素を表わす)
 ΔN_m : m 番目の結晶粒内のき裂成長に要する繰返し

* 広島大学工学部

** 大阪大学工学部

数

$\Delta N_{m,w}$: m 番目の結晶粒界のき裂通過に要する繰返し数

N_D : N_c のうち結晶粒内のき裂成長に要する総繰返し数

N_w : N_c のうち結晶粒界のき裂通過に要する総繰返し数

$N_{c, \text{Miner}}$: 通常の Miner 則による巨視き裂発生寿命の予測値

$f_{S_a}(s)$: ランダム荷重の応力頻度分布の確率密度関数

$\phi_{N_c}(n)$: 実際の巨視き裂発生寿命の確率分布関数

$F_{N_c}(n)$: 巨視き裂発生寿命の原分布

$f_{\Delta N_m}(n)$: ΔN_m の確率密度関数

$f_{\Delta N_{m,w}}(n)$: $\Delta N_{m,w}$ の確率密度関数

$f_{X_m}(x)$: m 番目の粒界にき裂が達したときのき裂先端の最大応力 (応力拡大係数表示したもの) の確率密度関数

$f_Y(y)$: 粒界強度 (応力拡大係数表示したもの) の確率密度関数

h, τ : 応力頻度分布 (ワイブル分布) の shape parameter, scale parameter

μ_m, σ_m : ΔN_m の確率密度関数 $f_{\Delta N_m}(n)$ のパラメータ

p_1, p_n : 粒界に達したき裂が次の 1 サイクルで粒界を通過する確率, n サイクル目に通過する確率

C, b : $S_a - \bar{N}_D$ 線図の係数および指数 ((29) 式および Appendix 2 参照)

r, B_1, B_2 : 材料定数

1 緒 言

著者らは前報¹⁾で従来の疲労損傷の観察結果をもとに、新しく微視的疲労損傷から巨視き裂発生に至る力学モデルを設定した。そしてこれを確率モデルに置換えて平滑材の変動荷重下における巨視き裂発生寿命を推定し、限界累積被害値のばらつきなど従来得られている疲労特性のいくつかを説明した。ところが、確率モデルを作成する際かなりの近似を行ったため、疲労寿命の平均値がある範囲内に推定するととどまるなどの問題を生じた。

本研究では前報の確率モデルに代わって、まず設定した力学モデルにしたがっていくつかの数学的定式化を行い、それをもとにモンテカルロ法で寿命推定の数値シミュレーションを行った。対象とした変動荷重は指数分布、ワイブル分布および一様分布ランダム荷重で、応力頻度分布形状およびそのパラメータ(shape parameter, scale parameter, 応力頻度分布の最大応力振幅, 最小応力振幅)が寿命に与える影響を定性的に明らかにした。モンテカルロ法によれば任意の変動荷重に対する寿

命推定が可能である。そこで一例として二段二重のブロック荷重に対してもシミュレーションを行ってみた。

2 微視き裂発生から巨視き裂成長への力学モデル

平滑材では荷重の繰返しによりまず試料表面にすべり帯が k 個発生し、繰返しとともにそれらの一部が微視き裂すなわちすべり帯束となる。各微視き裂は後述する結晶粒内成長の条件および結晶粒界通過の条件に従って、停留、進展を繰返しつつそれぞれの速度で成長する。巨視き裂発生の定義を深さ方向へ m^* 個の結晶粒 (副結晶粒も含む) だけ成長したときとすると、実際の巨視き裂発生寿命 N_c は k 個の微視的損傷箇所のうち、所定の長さに最も少ない繰返し数で達し得たき裂で決まり、最小値分布理論を適用して求めることができる。力学モデルの詳細は前報¹⁾に述べたがその要約は次のとおりである。

(1) 荷重の繰返しにより初期に生ずる微視的疲労損傷箇所すなわちすべり帯は、試料表面の結晶粒 1 個について 1 箇所とする。すなわち、全すべり帯の個数 k は試料表面の総結晶粒個数と一致する。

(2) 個々のすべり帯は続く荷重の繰返しにより微視き裂となって粒内成長、粒界通過を繰返しつつ成長するが、この際結晶粒内では応力振幅 S_a の大きさに依存して成長速度が決まり、 S_a が $\bar{S}_{aw}$ (粒内に塑性変形が生ずる限界の応力レベル) 以上であれば粒内に疲労被害が生ずる。

(3) したがって変動荷重下では、その応力頻度分布に $\bar{S}_{aw}$ 以上の応力振幅が含まれていれば、ある繰返しの後にき裂は必ず隣接結晶粒界に達する。なお、このときの粒内成長に要する繰返し数は線型累積被害則を用いて計算することができる。

(4) 結晶粒界では、き裂先端の最大応力が粒界強度より大きくなり、静的に粒界を引き裂くことができる場合にのみき裂は粒界を通過することができる。ここで、粒界強度はある分布を有し (本研究では二等辺三角形分布を考えた)、その分布形は応力繰返しによらず一定とする。また、き裂先端の応力集中度は主き裂のみによって支配される。

(5) 粒界通過の条件により、 k 個のすべり帯のうちには成長の途中の粒界で停留するもの、停留、進展を繰返し成長するものおよび全く停留せずに成長するものの 3 通りの場合がある。

(6) 塑性変形により細分化された平均結晶粒直径を Δd とし、 Δd ごとに粒界が存在する。巨視き裂発生は深さ方向へ m^* 個の結晶粒まで微視的き裂が成長したときと定義する。

(7) 実際のき裂発生において観察される初期のすべり帯(微視的疲労損傷)からすべり帯束(微視き裂)になる機構および、Forsythによる第一段階のき裂成長の機構²⁾は本モデルでは考えないことにする。

Fig. 1は試料表面のある微視的疲労損傷箇所に対して、上述の巨視き裂発生機構をモデル化して示したものである。上記の仮定から実際の巨視き裂発生寿命 N_c は k 個所の $N_{c,i}$ の最小値として(1)式で表わすことができる。

$$N_c = \min \{N_{c,1}, N_{c,2}, N_{c,3}, \dots, N_{c,i}, \dots, N_{c,k}\} \\ = \min_{i \in k} \left\{ \sum_{m=1}^{m^*} (\Delta N_{m,i} + \Delta N_{m,w,i}) \right\} \quad (1)$$

ここで k は資料中に含まれる微視的疲労損傷箇所の要素集合を、 $\Delta N_{m,i}$ は i 要素の m 番目の結晶粒内の成長に

Fig. 1 Visible crack initiation model under random loading

Fig. 2 Visible crack initiation model expressed by the reliability diagram

要する繰返し数を、また $\Delta N_{m,w,i}$ は i 要素の m 番目の結晶粒内の通過に要する繰返し数を表わす。

(1) 式において粒内成長に要する繰返し数と粒界通過に要する繰返し数を分離して書けば(2)式となる。

$$N_c = \min_{i \in k} \left\{ \sum_{m=1}^{m^*} \Delta N_{m,i} + \sum_{m=1}^{m^*} \Delta N_{m,w,i} \right\} \\ = \min_{i \in k} \{N_{D,i} + N_{W,i}\} \quad (2)$$

上式で $N_{D,i}$ は i 要素における巨視き裂に成長するまでの繰返し数のうち、結晶粒内の成長に要する総繰返し数を、 $N_{W,i}$ は結晶粒界の通過に要する総繰返し数をそれぞれ表わす。

提案した巨視き裂発生モデルを信頼性機能図で示すと Fig. 2 となる。すなわち、実際の巨視き裂発生寿命 N_c は、図中の k 個の要素中における最弱要素の寿命に相当することになる。また個々の要素の寿命は冗長度 $2m^* - 1$ の待機系と考えることができる。図において $\Delta N_{m,i}$ と $\Delta N_{m,w,i}$ の間および $\Delta N_{m-1,i}$ と $\Delta N_{m,i}$ の間等にはそれぞれ何らかの相関があると考えられるが、それを定量的にモデルに入力することは困難なため、本研究では一応すべて独立として取扱うこととした。その結果 N_c は信頼性的に(3)および(4)式から計算することができる。

$$\psi_{N_c}(n) = 1 - \{1 - F_{N_c}(n)\}^k \quad (3)$$

$$F_{N_c}(n) = \int_0^n f_{N_c}(n) dn \\ \left. \begin{aligned} f_{N_c}(n) &= f_{\Delta N_1}(n) * f_{\Delta N_{1,w}}(n) * f_{\Delta N_2}(n) \\ &\quad * f_{\Delta N_{2,w}}(n) * \dots * f_{\Delta N_{m^*}}(n) \\ &\quad * f_{\Delta N_{m^*,w}}(n) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

上式で $f_{\Delta N_m}(n)$ は ΔN_m の密度分布を、 $f_{\Delta N_{m,w}}(n)$ は $\Delta N_{m,w}$ の密度分布を表わす。なお、*印はたたみ込み積分を意味する。

以上から実際の巨視き裂発生寿命の分布 $\psi_{N_c}(n)$ を求めるためには、 $f_{\Delta N_m}(n)$, $f_{\Delta N_{m,w}}(n)$ の分布を $m=1$ から m^* まですべて定め、次にそれらの和である $f_{N_c}(n)$ の分布を計算し、それを(3)式に代入すればよいことになる。しかし、一般には(4)式でたたみ込み積分を行って解析的に $f_{N_c}(n)$ を求めることは非常に困難である。数値積分を行えば $f_{N_c}(n)$ の分布形を求めることができるが、短寿命側のすそ野の分布形状を精度よく求めることはむづかしく(3)式の適用は困難である。そこで本研究ではモンテカルロ法による数値シミュレーションを行って N_c を推定することにする。そのためまず、3章でシミュレーションに必要な $f_{\Delta N_{m,w}}(n)$, $f_{\Delta N_m}(n)$ の分布を考察し、4章でモンテカルロ・シミュレーションの手順を説明する。

3 粒界通過に要する繰返し数 $\Delta N_{m,w}$ と 粒内成長に要する繰返し数 ΔN_m の定式化

本章ではモンテカルロ・シミュレーションに必要な粒界通過および粒内成長に要する繰返し数 $\Delta N_{m,w}$, ΔN_m の定式化について考察する。変動荷重の例として、平均応力が零で応力振幅 S_a の密度分布が (5) 式の 3 母数ワイブル分布に従うランダム荷重の場合について検討する。

$$\left. \begin{aligned} f_{S_a}(s) &= \frac{h}{(1-Q)\tau} \left(\frac{s-S_{a,\min}}{\tau} \right)^{h-1} \\ &\times \exp \left\{ - \left(\frac{s-S_{a,\min}}{\tau} \right)^h \right\} \\ Q &= \exp \left\{ - \left(\frac{S_{a,\max}-S_{a,\min}}{\tau} \right)^h \right\} \\ S_{a,\min} &\leq s \leq S_{a,\max} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで $S_{a,\max}$, $S_{a,\min}$ は応力頻度分布の最大および最小応力振幅, h , τ は分布の shape parameter および scale parameter である。

3.1 粒界通過に要する繰返し数 $\Delta N_{m,w}$ の分布

微視き裂が粒界を通過できる条件は 2 章の仮定 (4) により、き裂先端の最大応力が粒界強度に打ち勝つことで決まる。き裂先端が丁度 m 番目の粒界に達したときのき裂先端の最大応力を応力拡大係数表示して (6) 式で近似する¹⁾。

$$K = S_a \sqrt{m\pi\Delta d} \quad (6)$$

ここで Δd は平均結晶粒 (副結晶粒も含む) 直径である。上式において S_a は確率変数であるから K 値も確率変数となる。 K 値を表わす確率変数を X_m (添字 m は m 番目の粒界を表わす) とおくと、その密度分布 $f_{X_m}(x)$ は (7) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} f_{X_m}(x) &= \frac{h}{(1-Q)\tau t_m} \left(\frac{x-S_{a,\min}t_m}{\tau t_m} \right)^{h-1} \\ &\times \exp \left\{ - \left(\frac{x-S_{a,\min}t_m}{\tau t_m} \right)^h \right\} \\ t_m &= \sqrt{m\pi\Delta d} \quad S_{a,\min}t_m \leq x \leq S_{a,\max}t_m \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

一方粒界強度を応力拡大係数で表示したものを確率変数 Y とおき、前報と同様にその密度分布を二等辺三角形分布で近似し (8) 式のように表わす*。

$$\left. \begin{aligned} K_C &\leq y < K_m \text{ の場合;} \\ f_Y(y) &= \frac{4}{(K_B-K_C)^2} (y-K_C), \\ K_m &\leq y \leq K_B \text{ の場合;} \\ f_Y(y) &= \frac{4}{(K_B-K_C)^2} (K_B-y), \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

* 前報¹⁾ で一様分布と二等辺三角形分布による結果を比較して示したが、巨視き裂に成長できる確率は両分布でほとんど差がみられなかった。

Fig. 3 Probability density function of the strength of grain boundary and PDF of the maximum stress at the crack tip using the expression of the stress intensity factor

ここで K_B , K_C はそれぞれ粒界強度の上限値および下限値である。また $K_m = (K_B + K_C)/2$ である。

(7) 式のき裂先端の K 値分布および (8) 式の粒界強度分布から、き裂が m 番目の粒界通過に要する繰返し数 $\Delta N_{m,w}$ の分布は次のようにして求めることができる。いま粒界強度が Fig. 3 の斜線部 A にある確率は $f_Y(y)dy$ である。この条件下で、き裂が粒界を抵抗なく通過する確率 p_1 は (9) 式で表わせる。

$$\left. \begin{aligned} y < S_{a,\max}t_m \text{ の場合,} \\ p_1 &= P\{X_m > Y | Y = y\} = \int_y^{S_{a,\max}t_m} f_{X_m}(x) dx \\ &= \frac{1}{(1-Q)} \left[\exp \left\{ - \left(\frac{y-S_{a,\min}t_m}{\tau t_m} \right)^h \right\} - Q \right] \\ y \geq S_{a,\max}t_m \text{ の場合,} \\ p_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

次にき裂先端が粒界に達した後 n サイクル目に通過する確率 p_n は、 $(n-1)$ サイクル目までは通過できず ($X_m < Y$)、 n サイクル目で通過する ($X_m > Y$) 確率であるから (10) 式となる。

$$\begin{aligned} p_n &= P\{X_m > Y \text{ at } \Delta N_{m,w} = n\} \\ &\cap \{X_m < Y \text{ at } \Delta N_{m,w} < n | Y = y\} \\ &= (1-p_1)^{n-1} \cdot p_1 \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式は n に対していわゆる waiting time を表わす幾何分布をしており、書き換えれば (11) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} f_{\Delta N_{m,w}}(n | Y = y) &= (1-p_1)^{n-1} \cdot p_1 \\ n &= 1, 2, 3, \dots, \infty \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上式は $p_1 > 0$ の場合であり、 $p_1 = 0$ の場合には $\Delta N_{m,w}$

の密度分布とはならない。

$Y=y$ の条件下で $\Delta N_{m,w}$ の平均および分散は (12) 式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} E\{\Delta N_{m,w}|Y=y\} &= 1/p_1 \\ \sigma^2\{\Delta N_{m,w}|Y=y\} &= (1-p_1)/p_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また (11) 式の累積分布関数は (13) 式となる。

$$F_{\Delta N_{m,w}}(n|Y=y) = \sum_{j=1}^n p_j = 1 - (1-p_1)^n \quad (13)$$

ところで確率変数 Y は $K_C \leq Y \leq K_B$ の範囲の値をとるため、 $\Delta N_{m,w}$ の密度分布は (11) 式の条件付確率密度をすべての $f_Y(y)dy$ の確率で加え合せた周辺分布として (14) 式で表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} f_{\Delta N_{m,w}}(n) &= \int_{K_C}^{K_B} f_{\Delta N_{m,w}}(n|Y=y) \cdot f_Y(y) dy \\ &= \int_{K_C}^{K_B} p_1 \cdot (1-p_1)^{n-1} f_Y(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$n=1, 2, 3, \dots, \infty$

$\Delta N_{m,w}$ の平均、分散は (15) 式となる。

$$\left. \begin{aligned} E\{\Delta N_{m,w}\} &= \int_{K_C}^{K_B} \frac{1}{p_1} f_Y(y) dy \\ \sigma^2\{\Delta N_{m,w}\} &= \int_{K_C}^{K_B} \frac{(2-p_1)}{p_1^2} \\ &\quad \times f_Y(y) dy - \left\{ \int_{K_C}^{K_B} \frac{1}{p_1} f_Y(y) dy \right\}^2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

ただし (14) 式、(15) 式は $S_{a,\max} t_m \geq K_B$ 、すなわち p_1 が y のすべての積分範囲で $p_1 > 0$ の場合の密度分布と平均、分散であり、 $S_{a,\max} t_m < K_B$ の場合すなわち p_1 が y の積分範囲の一部で $p_1 = 0$ となる場合には、 $\Delta N_{m,w}$ の密度分布は (16) 式の混合分布となる。

$$\left. \begin{aligned} f_{\Delta N_{m,w}}(n) &= \int_{K_C}^{S_{a,\max} t_m} p_1 (1-p_1)^{n-1} f_Y(y) dy \\ &\quad + \delta(n - N_\infty) \int_{S_{a,\max} t_m}^{K_B} f_Y(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$n=1, 2, 3, \dots, \infty$

上式で δ はディラックのデルタ関数で、 N_∞ は N が ∞ を表わす。(16) 式の右辺第一項は有限の繰返し数でき裂が粒界を通過する場合の確率密度を表わし、第二項は $\Delta N_{m,w} = \infty$ すなわち粒界を通過できず停留する確率が $\int_{S_{a,\max} t_m}^{K_B} f_Y(y) dy$ であることを表わす。なお (16) 式は平均 $E\{\Delta N_{m,w}\}$ 、分散 $\sigma^2\{\Delta N_{m,w}\}$ がともに存在しない分布である。(16) 式の第一項のみの密度分布は (17) 式で与えられるが、この分布も平均、分散は存在しない。

$$\left. \begin{aligned} f_{\Delta N_{m,w}}(n) \\ = \int_{K_C}^{S_{a,\max} t_m} p_1 (1-p_1)^{n-1} f_Y(y) dy / \int_{K_C}^{S_{a,\max} t_m} f_Y(y) dy \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

以上 (14) 式あるいは (16) 式から種々の応力頻度分布に対して $\Delta N_{m,w}$ の分布を計算することができる。

Fig. 4 Probability density function of $\Delta N_{m,w}$ consumed by the crack penetration of grain boundaries

Fig. 5 Probability density function of $\Delta N_{m,w}$ consumed by the crack penetration of grain boundaries

Fig. 4 は一例として $S_{a,\max} = \infty$, $S_{a,\min} = 0$, $\tau = 10.0$, $h = 1.0$ の指数分布に対して (14) 式から計算した $\Delta N_{1,w}$ ($m=1$) の分布を示したものである。図中のヒストグラムはモンテカルロ法によるシミュレーションの結果で、両者はよく一致していることがわかる (シミュレーションでは粒界強度乱数 Y をまず 1 個発生させる。次に (7) 式からき裂先端の K 値を表わす乱数 X_m を順次逆関数法によって発生させ、 $X_m > Y$ となるまでに発生させた X_m の個数すなわち $\Delta N_{1,w}$ を求める。これを繰り返して $\Delta N_{1,w}$ を 2000 個求めヒストグラムに示した)。Fig. 5 は $S_{a,\min}$, τ , h は Fig. 4 と同じで、 $S_{a,\max}$ を 40 kg/mm^2 に設定した場合について、(16) 式から得られる $\Delta N_{m,w}$ の分布を示したもので、当然のことではあるがシミュレーションの結果とよく一致している。なお、Fig. 4, Fig. 5 はともに $m=1$ の場合の例であり、他の m の場合についても t_m を変化させることによって

同様の方法で $\Delta N_{m,w}$ の分布を求めることができる。計算に用いた材料定数 $\Delta d, K_C, K_B$ の値は後述の Table 1 に示す。

一定応力振幅下では (9) 式の p_1 は $Y < S_a t_m$ の場合には $p_1=1$ となり、 $Y \geq S_a t_m$ の場合には $p_1=0$ となる。したがって一定応力振幅下では (11) 式は次のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} y < S_a t_m \text{ の場合,} \\ f_{\Delta N_{m,w}}(n|Y=y) = \delta(n-1) \\ y \geq S_a t_m \text{ の場合,} \\ f_{\Delta N_{m,w}}(n|Y=y) = \delta(n-N_\infty) \end{array} \right\} \quad (18)$$

周辺分布を計算すると $\Delta N_{m,w}$ の密度関数は (19) 式となる。

$$f_{\Delta N_{m,w}}(n) = \delta(n-1) \cdot \int_{K_C}^{S_a t_m} f_Y(y) dy + \delta(n-N_\infty) \int_{S_a t_m}^{K_B} f_Y(y) dy \quad (19)$$

すなわち一定応力振幅下では粒界をき裂が第 1 サイクルで通過できる確率は $\int_{K_C}^{S_a t_m} f_Y(y) dy$ で、また第 1 サイクルで通過できない確率は $\int_{S_a t_m}^{K_B} f_Y(y) dy$ で与えられ、この場合には最後までその粒界でき裂は停留しつづけることになる。

3.2 粒内成長に要する繰返し数 ΔN_m の分布

次に変動荷重下における ΔN_m の分布について考察する。 ΔN_m は粒内強度のばらつきにより、一定応力振幅下でもある確率分布をする。本研究では一定応力振幅下において、ある応力振幅 S_a に対する ΔN_m の分布 ($\Delta N_1 \sim \Delta N_{m^*}$) を次のように定めた。 S_a が粒内に疲労被害が生ずる限界の応力レベル S_{aw_0} 以上であれば、 ΔN_m はすべて対数正規分布すると仮定する。変動荷重下の ΔN_m の分布は 2 章の仮定 (3) により、き裂の粒内成長に対しては線型累積被害則が適用できることから、Appendix 1 に示す方法で等価応力振幅 $\hat{S}_a$ を求め、その $\hat{S}_a$ に対する一定応力振幅下の ΔN_m の分布を用いればよいことになる。なお、 $\hat{S}_a$ は各 ΔN_m ($m=1 \sim m^*$) について必ずしも同じではないが、 ΔN_m の値がある程度大きければ $\hat{S}_a$ のばらつきは小さくなるはずであり、本研究では $\hat{S}_a$ は一定と仮定した。

$$f_{\Delta N_m}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_m n} \exp\left\{-\frac{(\ln n - \mu_m)^2}{2\sigma_m^2}\right\} \quad (20)$$

ΔN_m の平均 $\overline{\Delta N_m}$ 、分散 $\sigma_{\Delta N_m}^2$ および変動係数 $V_{\Delta N_m}$ はそれぞれ (21) 式、(22) 式および (23) 式で与えられる。

$$\overline{\Delta N_m} = \exp(\mu_m + \sigma_m^2/2) \quad (21)$$

$$\sigma_{\Delta N_m}^2 = \exp(2\mu_m + \sigma_m^2) \cdot \{\exp(\sigma_m^2) - 1\} \quad (22)$$

$$V_{\Delta N_m} = \sigma_{\Delta N_m} / \mu_m = \sqrt{\exp(\sigma_m^2) - 1} \quad (23)$$

ΔN_m の分布を決定するには (20) 式のパラメータ μ_m 、

σ_m を種々の応力振幅 S_a および m に対して決めることが必要で、本研究ではこれを次の手順で決定した。まず σ_m は S_a および m に依存しない定数と仮定する。

$$\sigma_m = \text{Const.} = \sigma \quad (24)$$

すなわち $V_{\Delta N_m}$ は (23) 式より S_a および m に依存しない一定値となる。

また、 μ_m は次のように考えることにする。き裂長さが長くなるほどき裂先端の応力集中度が増加するため、粒内の成長速度は速くなる。したがって、 ΔN_m の平均 $\overline{\Delta N_m}$ は m が大となるほど小さくなると考えられる。この程度については明らでないが、本研究では一応 (25) 式に示すように指数関数的に $\overline{\Delta N_m}$ は減少するとして取扱うこととする。

$$\overline{\Delta N_m} = \overline{\Delta N_1} \exp\{-r(m-1)\} \quad \left\{ \begin{array}{l} m=1, 2, 3, \dots, m^* \end{array} \right\} \quad (25)$$

ここで $\overline{\Delta N_1}$ は $m=1$ の場合の ΔN_m の平均値、 r は正の定数である。すると ΔN_m が $m=1$ から $m=m^*$ で独立であることより、(2) 式の粒内のき裂成長に要する総繰返し数 N_D の平均 $\overline{N_D}$ 、分散 $\sigma_{N_D}^2$ および変動係数 V_{N_D} はそれぞれ (26) 式、(27) 式および (28) 式となる。

$$\overline{N_D} = \sum_{m=1}^{m^*} \overline{\Delta N_m} = B_1 \overline{\Delta N_1} \quad (26)$$

$$\sigma_{N_D}^2 = \sum_{m=1}^{m^*} \sigma_{\Delta N_m}^2 = \{\exp(\sigma^2) - 1\} \cdot B_2 \overline{\Delta N_1}^2 \quad (27)$$

$$V_{N_D} = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1} \cdot \frac{\sqrt{B_2}}{B_1} \quad (28)$$

$$\text{ここで } B_1 = \sum_{m=1}^{m^*} \exp\{-r(m-1)\}$$

$$B_2 = \sum_{m=1}^{m^*} \exp\{-2r(m-1)\}$$

上式で B_1, B_2 および σ は定数であるから V_{N_D} も定数となる。すなわち N_D の分布の変動係数は S_a に依存しないことになる。

次に前報りと同様に S_a と $\overline{N_D}$ の関係を (29) 式で与えることにする (Appendix 2 参照)。

$$\overline{N_D} = (S_a/C)^{-b}, \quad S_a \geq S_{aw_0} \text{ の場合} \quad (29)$$

(21) 式と (25) 式を等置すれば μ_m は (30) 式となる。

$$\mu_m = \ln[\overline{\Delta N_1} \exp\{-r(m-1)\}] - \frac{\sigma^2}{2} \quad (30)$$

(26) 式と (29) 式を等しく置いて $\overline{\Delta N_1}$ を求め、これを (30) 式に代入すると μ_m は (31) 式となる。

$$\mu_m = \ln\left[\frac{(S_a/C)^{-b}}{B_1} \cdot \exp\{-r(m-1)\}\right] - \frac{\sigma^2}{2} \quad (31)$$

以上、(24) 式および (31) 式から ΔN_m の分布のパラメータ σ_m, μ_m が任意の S_a に対して決定され ΔN_m の分布が確定された。

Fig. 6 は一例として $S_a=25 \text{ kg/mm}^2$ における ΔN_m

の密度分布を $m=1, 5, 10, 15$ および 20 の場合について示したものである。 $V_{\Delta N_m}$ が一定であることから、 $\log \Delta N_m$ 尺で描くと各分布形状は同じとなる。

Fig. 7 には $S_a=25 \text{ kg/mm}^2$ における N_D の分布を示す。 N_D の分布は解析的に求め得ないため、(20) 式を用いて $\Delta N_m (m=1 \sim m^*)$ を乱数を発生させて求め、その和として $N_D (= \sum_{m=1}^{m^*} \Delta N_m)$ を計算し、これを 30000 回繰り返して N_D のヒストグラムで示した。なお、これらの計算に用いた r, B_1, B_2, σ, C および b の各値は一括して後述の Table 1 に示す。

Fig. 6 Probability density function of ΔN_m . ($S_a=25 \text{ kg/mm}^2$)

Fig. 7 Probability density function of N_D ($S_a=25 \text{ kg/mm}^2$)

4 モンテカルロ・シミュレーション

前章で求めた $\Delta N_{m,w}$ の分布および仮定した ΔN_m の分布をもとに、モンテカルロ法で巨視き裂発生寿命の推定シミュレーションを行った。シミュレーションには、粒内成長に要する繰返し数 ΔN_m を求めるため、粒界強度分布 Y を求めるためおよび粒界通過に要する繰返し数 $\Delta N_{m,w}$ を求めるための計 3 種類の $[0, 1]$ 一様乱数列を用意した。計算のフローチャートを Fig. 8 に示す。その手順は次のとおりである。

- (1) ランダム荷重の応力頻度分布 ($S_{a,\max}, S_{a,\min}, \tau, h$) を入力する。
- (2) Appendix 1 の方法に従って線型累積被害則で等価な応力振幅 $\hat{S}_a$ を計算する。
- (3) ある微視的疲労損傷箇所 ($i=1$) について、 $m=1$ に対する μ_1 を (31) 式から計算し、それを (20) 式に代入して ΔN_1 の密度分布を決定する。 $[0, 1]$ の一様乱数をボックス・ミュラー法で ΔN_1 の対数正規乱数に変換し $\Delta N_{1,t}$ を 1 個取出す。
- (4) 別の $[0, 1]$ 一様乱数列から (8) 式の粒界強度を表わす乱数 Y を逆関数法で 1 個発生させる。
- (5) き裂先端に生じる K 値の最大値 $K_{\max} = S_{a,\max} \cdot t_1$ が Y より小さければ $\Delta N_{1,w,t}$ は無限大となるため、それ以上き裂は成長できず寿命 $N_{c,t}$ は無限大となる。
- (6) $S_{a,\max} \cdot t_1 > Y$ の場合には (9) 式より p_1 を

Fig. 8 Flow chart of the monte carlo simulation

計算し、それを (11) 式に代入して $\Delta N_{1,w,t}$ の条件付確率密度関数を決定する。そしてもう一つの $[0, 1]$ 一様乱数列から逆関数法で $\Delta N_{1,w,t}$ を 1 個取出す。

(7) m が 2 から m^* までは (3)~(6) の操作を繰り返す。途中で $S_{a,\max} \cdot t_m < Y$ になると、その箇所の $N_{c,t}$ は無限大となる。 m が 1 から m^* で $\Delta N_{m,w,t}$ がすべて有限であった場合には $N_{c,t}$ は次のようになる。

(8) $N_{c,t} = \sum_{m=1}^{m^*} (\Delta N_{m,t} + \Delta N_{m,w,t})$ として $N_{c,t}$ ($i=1$) を計算する。

(9) (3)~(8) の操作を資料表面の微視的損傷箇所 (k 箇所) すべてについて行って $N_{c,t}$ ($i=1 \sim k$) を求め、この中の最小の $N_{c,t}$ を実際の巨視き裂発生寿命の推定値とする。

以上のシミュレーションの手順において、本来は $\Delta N_{m,w}$ を (14) 式あるいは (16) 式から逆関数法などによって発生させることができれば、粒界強度乱数 Y を発生させる必要も、また $S_{a,\max} \cdot t_m$ と Y との比較の必要もなくなる。しかし、(14) および (16) 式は複雑な形をしており乱数発生に適していない。また、(14) および (16) 式について簡単で精度のよい近似分布を得ることは現在のところ困難である。そこで本シミュレーションでは別に粒界強度乱数 Y を発生させて、 $Y=y$ の条件付確率密度関数 (11) 式から $\Delta N_{m,w}$ の値を求めた。

なお、一定応力振幅のシミュレーションを行う場合には、以上の手順のうち、(2) の等価応力振幅 $\bar{S}_a$ の計算と、(6) の $\Delta N_{m,w,t}$ の計算が省略できる (一定応力振幅下では、き裂が粒界で一度停留すると、以降それ以上の S_a が負荷されないため最後まで停留を続け、その箇所の $\Delta N_{m,w,t}$ は無限大となる)。

5 シミュレーション結果とその考察

計算に用いた材料定数、係数および指数を一括して Table 1 に示す。前報と同じ軟鋼平滑丸棒試験片を対象とし、一定応力振幅、変動応力振幅のいずれの場合も平均応力が零の軸力両振り荷重について計算を行った。塑性変形により細分化した平均結晶粒径 Δd を 0.01 mm と仮定し、20 結晶粒 ($m^*=20$) 内部に成長したときを巨視き裂発生 (き裂深さ 0.2 mm) と定義する。Fig. 9 に示した平滑丸棒の試料表面積中の総結晶粒の個数 k は、結晶粒を 0.035 mm $\times$ 0.035 mm の正方形と仮定すれば約 $k=5 \times 10^5$ 個である。Table 1 の K_C , K_B , K_m , $\bar{S}_{aw}$ は前報と同じ値である。 C , b は Appendix 2 に示す方法で求めた。 σ および r については現状では資料がないので、実際に適当な値を与えて ΔN_m , N_D の分布を計算し、ほぼ妥当な分布形となるように決めた。

Table 1 Material constants, coefficients and exponents used in the simulation.

$k = 5 \times 10^5$	eq.(1)
$\Delta d = 0.01 \text{ mm}$	eq.(6)
$m^* = 20$	eq.(1)
$K_C = 2.23 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$	
$K_B = 16.64 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$	eq.(8)
$K_m = (K_C + K_B)/2 = 9.44 \text{ kg} \cdot \text{mm}^{-3/2}$	
$\bar{S}_{aw} = 12.6 \text{ kg/mm}^2$	eq.(29)
$\sigma = 1.8$	eq.(24)
$r = 0.1$	eq.(25)
$B_1 = \sum_{m=1}^{m^*} \exp\{-r(m-1)\} = 9.09$	eq.(28)
$B_2 = \sum_{m=1}^{m^*} \exp\{-2r(m-1)\} = 5.42$	
$C = 106.65$	eq.(29)
$b = 9.0$

Fig. 9 Model of the fatigue specimen which is chosen as the subject to the montecarlo simulation

Table 2 Contents of the simulation for random loading

Stress frequency distribution	Shape parameter h	Scale parameter τ	$S_{a,max}$ (kg/mm ²)	$S_{a,min}$ (kg/mm ²)		
Exponential	1.0	1.5	4 0	0 ~ 35	Effect of τ and $S_{a,min}$	
		2.0				
		2.5				
		3.0				
		4.0				
----- Uniform		10.0				
		1000				
Weibull	0.8	2.0	4 0	0 ~ 35	Effect of h	
		3.0				
		4.0				
Weibull	1.2	2.0	4 0	0 ~ 35		
		3.0				
		4.0				
Exponential	1.0	2.0	∞	0 ~ 35	Effect of $S_{a,max}$	
		3.0				
		2.0	4 5	0 ~ 35		
		3.0				
		2.0	3 5	0 ~ 32.5		
		3.0				

シミュレーションの対象とした変動荷重を一括して Table 2 に示す。一定応力振幅では S_a を疲労限付近から 40 kg/mm^2 まで種々変え、各応力レベルについて5点ずつ計算した。変動荷重としては shape parameter h が 1.0 の指数分布と h が 0.8 と 1.2 のワイブル分布ランダム荷重について行い、scale parameter τ は 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 4.0, 10.0 および 1000 の7通りとした。また応力頻度分布の最大応力 $S_{a,\max}$ としては、 40 kg/mm^2 の場合を主として計算し、一部 $S_{a,\max} = \infty$, 45 および 35 kg/mm^2 の場合の計算も行った。最小応力振幅 $S_{a,\min}$ は 0 から $32.5, 35 \text{ kg/mm}^2$ までの範囲において 2.5 kg/mm^2 ずつ増加させて変えた。なお $\tau = 1000$ の指数分布は $S_{a,\max}$ を 40 kg/mm^2 で打切った場合はほとんど一様分布と見なすことができ、以後この分布は一様分布とよぶこととする。

5.1 一定応力振幅の場合

シミュレーションによって求めた一定応力振幅の S_a と N_c の関係を Fig. 10 に●印で示す。図において疲労限付近の矢印のついたプロットは、シミュレーションで巨視き裂が発生しなかったもので矢印の数はその個数を表す。図中の実線はこれらのプロットのほぼ中央を通るように引いたもので、 $S_a = 25 \text{ kg/mm}^2$ を境に折れ曲る2本の直線で近似した。(32) 式はその $S_a - N_c$ 線図を表わしたものである。

$$\left. \begin{aligned} S_a &\geq 25 \text{ kg/mm}^2 \text{ の場合,} \\ N_c &= (S_a / 70.24)^{-10.9} \\ 25 > S_a &\geq 21 \text{ kg/mm}^2 \text{ の場合,} \\ N_c &= (S_a / 50.63)^{-16.0} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

またシミュレーションで得られた疲労限 S_{aw} は約 21 kg/mm^2 である。図中の破線は軟鋼平滑材の実験値^{3),4)}

Fig. 10 $S_a - N_c$ curves for constant stress amplitude obtained by the monte-carlo simulation.

Fig. 11 (a) $S_{a,\min} - N_c$ curves for random loading obtained by the monte-carlo simulation

 Fig. 11 (b) $S_{a,min}-N_c$ curves for random loading obtained by the monteclaro simulation

 Fig. 11 (c) $S_{a,min}-N_c$ curves for random loading obtained by the monteclaro simulation

のほぼ中央を通るように引いた S_a-N_c 線図で、シミュレーションの結果とよく一致している。後述の Miner 則による寿命 $N_{c,Miner}$ の計算には (32) 式を用いた。

5.2 変動応力振幅の場合

Fig. 11 に変動応力振幅の $S_{a,min}-N_c$ 線図 (応力振幅 S_a の代表値として最小応力振幅 $S_{a,min}$ を用いて表わした) の一例を示す。最大応力振幅 $S_{a,max}$ はすべて 40 kg/mm^2 で、Fig. 11 (a) は $h=1.0$ の指数分布ランダム荷重の場合を、(b) は $h=1.2$ 、(c) は $h=0.8$ のワイブル分布ランダム荷重の場合を示している。 τ はそれぞれ 2.0, 3.0 および 4.0 について示した。なお、Fig. 11 (a) には○印で一様分布ランダム荷重の結果が併記してある。

Fig. 12 に $S_{a,max}=40 \text{ kg/mm}^2$, $h=1.0$ の指数分布ランダム荷重について、シミュレーションで求めた巨視き裂発生寿命 N_c と、通常の Miner 則で計算した寿命 $N_{c,Miner}$ の比 $N_c/N_{c,Miner}$ と $S_{a,min}$ の関係を τ をバ

 Fig. 12 Simulated crack initiation life for random loading of exponential density (Effect of the scale parameter τ and $S_{a,min}$)

ラメータとして示す。図より τ が同じである場合、 $N_c/N_{c,Miner}$ は $S_{a,min}$ が小さくなるにつれて減少しており、ある程度 $S_{a,min}$ が小さくなると $N_c/N_{c,Miner}$ は一定値に落着く傾向がうかがえる。scale parameter の τ 影響をみると、 τ の小さい分布ほど $N_c/N_{c,Miner}$ の値は小さくなるのがわかる。また、 $N_c/N_{c,Miner}$ のばらつきは τ が小さいほど小さく、ランダム荷重下の寿命のばらつきは τ が小さい分布ではあまり大きくないことがわかる⁴⁾。図中の実線はシミュレーション結果のほぼ中央を通るように引いたもので、その定性的傾向は前報¹⁾で示した結果とよく一致している。

Fig. 13 は $S_{a,max}$ が 40 kg/mm^2 で τ が 2.0, 3.0 および 4.0 の場合について shape parameter h の影響を示したものである。図中の実線は Fig. 12 の指数分布ランダム荷重 ($h=1.0$) の結果で、破線は $h=0.8$,

Fig. 13 Simulated crack initiation life for random loading of weibull density (Effect of the shape parameter, h)

Fig. 14 Simulated crack initiation life for random loading of uniform density

1.2 のワイブル分布ランダム荷重のシミュレーション結果を示すプロットの中央を通るように描いたものである。図より同一 τ の場合、shape parameter $h=1.2$ における $N_c/N_{c,Miner}$ の値が最も小さく、ついで $h=1.0$, 0.8 の順に大きくなっている。また τ が小さくなるにつれて $N_c/N_{c,Miner}$ の値が減少する傾向はいずれのワイブル分布についても言えるようである。

Fig. 14 は $S_{a,max}=40 \text{ kg/mm}^2$ の一様分布ランダム荷重の結果を示したもので、 $N_c/N_{c,Miner}$ のばらつきは大きく、ほぼ 0.75 から 1.1 の範囲にある。なお、 $S_{a,min}$ の影響はあまり顕著でない。

Fig. 15 は $h=1.0$ の指数分布ランダム荷重について、応力頻度分布の最大応力振幅 $S_{a,max}$ の影響をみたものである。計算は $S_{a,max}$ を ∞ (最大応力振幅の制限を設けない場合)、45 および 35 kg/mm^2 について行い、

Fig. 15 Simulated crack initiation life for random loading (Effect of the maximum stress amplitude, $S_{a,max}$)

Fig. 16 An example of the probability density function of $N_{w,i}$, $N_{D,i}$ and $N_{c,i}$

図中に実線で示す $S_{a,max}=40 \text{ kg/mm}^2$ の結果と比較した。scale parameter τ は 2.0, 3.0 の 2 種類についてのみ行っているが、いずれの τ の場合も $S_{a,max}$ の影響はそれほど顕著に表われていない。

5.3 考 察

Fig. 16 は $\tau=2.0$, $S_{a,max}=40 \text{ kg/mm}^2$, $S_{a,min}=10 \text{ kg/mm}^2$ の指数分布ランダム荷重について、 k 箇所 ($k=5 \times 10^5$) の微視的疲労損傷箇所のうち、巨視き裂に成長できる箇所 (この場合には 50591 箇所であった) の $N_{D,i}$ と $N_{W,i}$ の分布を一例として示したものである。また図中に $N_{c,i}$ が最小となる箇所の N_D と N_W を示した。粒界通過に要する総繰返し数 N_W は N_c に比べて小さく、ここで行ったシミュレーションのほとんどの場合 $N_W \leq 0.2 N_c$ であった。すなわち、巨視き裂発生寿命 N_c の大半は粒内のき裂成長の繰返し数によって占められている。

本モデルを用いた場合、ランダム荷重下の推定寿命 N_c は、Miner 則による寿命 $N_{c,Miner}$ よりもほとんどの場合小さくなっている。また、 $S_{a,max}$ 近くの応力振幅が頻繁に負荷される一様分布や、 τ の大きい指数分布、ワイブル分布では $N_c/N_{c,Miner}$ は 1.0 に近く、 $S_{a,max}$ 付近の応力振幅がまれにしか負荷されない τ の小さい指数分布、ワイブル分布ランダム荷重では、 $N_c/N_{c,Miner}$ は 1.0 よりもかなり小さくなっている。この小さくなる理由は、資料中の微視的疲労損傷箇所のう

ち、一定応力振幅下ではき裂が粒界で停留する箇所でも、ランダム荷重下では巨視き裂に成長しうる可能性を生じ、その結果最小値分布理論によって推定した $N_{c,i}$ の最小値は、通常の Miner 則による寿命より小さくなるためである。なお、本モデルにおける N_c には、通常の Miner 則において加味されていない N_W が加わっているが、上述したように N_c の中で N_W の占める割合は小さいため、これは結果にあまり影響しない。

以上述べたように、ランダム荷重下における $N_c/N_{c,Miner}$ の値は 1.0 より小さくなったが、他の変動荷重についてすべてこのようなことが言えるとは限らない。Fig. 17 は一例として二段二重のブロック荷重に対して本モデルを適用してシミュレーションを行った結果を示したものである。 S_{aH} , S_{aL} , n_H , n_L の値は図に示したとおりであり、 N_{cH} は S_{aH} を単独に負荷しつづけた場合の N_c を、 N_{cL} は S_{aL} を単独に負荷しつづけた場合の N_c をそれぞれ表す。計算は応力振幅上昇と応力振幅下降の両者について、応力振幅を切替えるまでの繰返し数を種々変えて行った。

二段二重ブロック荷重下では、応力振幅下降の場合、 S_{aH} の応力下でき裂が停留すれば、それ以上の応力は以後負荷されないために最後までその粒界でき裂は停留をつづける。一方応力振幅上昇の場合は、 S_{aL} の応力下で停留してもその後に S_{aH} の応力が負荷されれば再びき裂が粒界を通過できる可能性を生じる。同図において $N_c/N_{c,Miner}$ は応力振幅上昇の場合には 1 より大となり、応力振幅下降の場合には 1 より小となっている。また応力振幅の段差が大きい場合ほどその傾向は顕著である。応力振幅下降の場合 $N_c/N_{c,Miner} < 1$ となるのは、初期に負荷される S_{aH} で微視き裂がある長さにまで成長していれば、応力が S_{aL} に切替った後も成長を続ける可能性があり、最初から S_{aL} を負荷した場合に比べて、巨視き裂に成長できる可能性が大となるためである。また応力振幅上昇の場合 $N_c/N_{c,Miner} > 1$ となるのは、初期の S_{aL} の応力下で微視き裂がある長さに成長した箇所よりも、 S_{aL} の間はほとんど成長しなくて、 S_{aH} に切り換わった後に成長を始める箇所が実際の巨視き裂の発生源となるため、初期の S_{aL} の繰返し数は粒界通過に要する繰返し数として余分に加わるためである。

以上、変動荷重下のシミュレーション結果について考察したが、一様分布および指数分布ランダム荷重の推定結果は著者らの行った実験結果と定性的によく一致している^{1),5),6)}。また二段二重のブロック荷重に対する推定結果も文献 7), 8) に示されている実験結果などと定性的に一致している。なお、ワイブル分布については今後実験を行って比較検討する予定である。

Fig. 17 Simulated results of $N_c/N_{c,Miner}$ for low-to-high and high-to-low block loading

6 結 言

本研究では変動荷重下の疲労寿命を推定するために、設定した力学モデルに従っていくつかの数学的定式化を行い、それをもとにモンテカルロ法で数値シミュレーションを行った。計算には一定応力振幅と、指数分布、ワイブル分布および一様分布のランダム荷重を対象とし、分布のパラメータ τ , h および分布の最大応力振幅 $S_{a,\max}$, 最小応力振幅 $S_{a,\min}$ が寿命に及ぼす影響を検討した。その計算結果は著者らおよび他の研究者の実験結果と定性的にはほぼ一致し、本力学モデルおよび数学的定式化の妥当性を明らかにすることができた。

モンテカルロ法を用いれば、上述のランダム荷重だけでなく、他の応力頻度分布のランダム荷重さらには任意のブロック荷重に対しても寿命推定が可能である。すなわち、ブロック荷重に対しては試料表面の k 個の微視的疲労損傷箇所それぞれについて、負荷される応力の変動に合せつつ ΔN_m の計算と粒界通過の判断および $\Delta N_{m,w}$ の計算を $m=1 \sim m^*$ まで行う。この計算を k 箇所すべてについて繰り返して行い $N_{c,i}$ ($i=1 \sim k$) を求め、その中の最小値を N_c とすれば推定が可能となる。

将来さらに、種々の変動荷重下の疲労試験を行って本モデルの適用性を確かめるとともに、提案した力学モデルの改良も行いう予定である。

計算には広島大学総合情報処理センターの HITAC-M-200 H を用いた。ランダム荷重の 1 点のシミュレーションに要した計算時間は約 60 秒であった。

謝 辞

本研究を行うにあたり多くの御助言、御討論をいただいた大阪大学工学部 八木順吉教授に心からお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 永井欣一, 藤本由紀夫, 富田康光: 変動応力振幅下の疲労強度に関する確率論的考察, 日本造船学会論文集, 第156号(1984), p.493~503.
- 2) Forsyth, P. J. E.: Fatigue Damage and Crack Growth in Aluminium Alloys, ACTA Metallurgica, Vol.11, July (1963), p.703~715.
- 3) 永井欣一, 藤本由紀夫, 花崎博文: 軟鋼 SS 41 の変動応力振幅下における応力-歪応答と疲労強度について, 日本造船学会論文集, 第155号(1984), p.334~341.
- 4) 八木順吉, 富田康光, 長田元宏, 浅田雅文, 橋本聖史: ランダム荷重下での疲労挙動に関する研究(第一報), 日本造船学会論文集, 第152号(1983), p.361~371.
- 5) 永井欣一, 藤本由紀夫, 花崎博文: 軟鋼の変動応力振幅下における材料応答と疲労被害について, 日本造船学会論文集, 第158号(1985), 投稿中.

- 6) 八木順吉, 富田康光: ランダム荷重下での疲労挙動に関する研究(第三報), 日本造船学会論文集, 第158号(1985), 投稿中.
- 7) たとえば堀川武, 中村宏: 変動荷重下の疲労挙動, 材料, 第23巻, 第244号(1974), p.46~51.
- 8) たとえば河本実: 金属の疲れと設計, コロナ社(1974), p.106 および p.142.

Appendix 1 等価応力振幅 $\hat{S}_a$ の計算

応力頻度分布が(5)式のワイブル分布で与えられ、 $S_a - \bar{N}_D$ 線図が(29)式である場合、線型累積被害則による等価応力振幅 $\hat{S}_a$ は次のようになる。線型累積被害則より(A-1)式が成り立つ。

$$f_{cr}=1.0=\sum_{i=1}^j \frac{n_i}{\bar{N}_{D,i}} \\ = \int_{S_{a,\min}}^{S_{a,\max}} \frac{\hat{N}_D f_{S_a}(s)}{(s/C)^{-b}} ds \quad (A-1)$$

ただし、 $S_{a,\min} < \bar{S}_{aw0}$ の場合には積分範囲の下限 $S_{a,\min}$ は $\bar{S}_{aw0}$ となる。(29)式の $S_a - \bar{N}_D$ 線図より等価応力振幅 $\hat{S}_a$ と $\hat{N}_D$ の間には(A-2)式が成り立つ。

$$\hat{N}_D = (\hat{S}_a/C)^{-b} \quad (A-2)$$

上式を(A-1)式へ代入すると(A-3)式を得る。

$$1.0 = \int_{S_{a,\min}}^{S_{a,\max}} \frac{(\hat{S}_a/C)^{-b}}{(s/C)^{-b}} \cdot f_{S_a}(s) ds \quad (A-3)$$

(A-3)式の $f_{S_a}(s)$ に(5)式を代入した後 $\hat{S}_a$ について解くと(A-4)式となる。

$$\left. \begin{aligned} \hat{S}_a &= (1-Q)^{-1/b} \left[\int_{u_1}^{u_2} (u^{1/h} \tau + S_{a,\min})^b \right. \\ &\quad \times \exp(-u) du \left. \right]^{1/b} \\ \text{ここで } u_2 &= \left(\frac{S_{a,\max} - S_{a,\min}}{\tau} \right)^h \\ u_1 &\text{は } S_{a,\min} \geq \bar{S}_{aw0} \text{ のとき } u_1=0 \\ &\quad S_{a,\min} < \bar{S}_{aw0} \text{ のとき} \\ u_1 &= \left(\frac{\bar{S}_{aw0} - S_{a,\min}}{\tau} \right)^h \end{aligned} \right\} \quad (A-4)$$

変動応力振幅下では(A-4)式の等価応力振幅 $\hat{S}_a$ を S_a の代わりに(31)式に代入して μ_m を計算する。

Appendix 2 $S_a - \bar{N}_D$ 線図

前報¹⁾では N_D の分布として3母数ワイブル分布を仮定した。

$$\left. \begin{aligned} f_{N_D}(n) &= \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{n - N_0}{\alpha} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{n - N_0}{\alpha} \right)^{\beta} \right\} \\ \alpha &= (S_a/108.0)^{-9.0}, N_0 = (S_a/65.0)^{-9.0} \\ \beta &= 3.0 \end{aligned} \right\} \quad (A-5)$$

N_D の平均 $\bar{N}_D$ は(A-6)式となる。

$$\begin{aligned} \bar{N}_D &= \alpha \Gamma(1+1/\beta) + N_0 \\ &= (S_a/108.0)^{-9.0} \cdot 0.893 + N_0 \end{aligned} \quad (A-6)$$

ここで $\Gamma(\cdot)$ は完全ガンマ関数。

上式で N_0 は第一項に比べて十分小さいため無視すると $\bar{N}_D$ は(A-7)式となる。本研究ではこの関係式を用いた。

$$\bar{N}_D \doteq (S_a/106.65)^{-9.0} \quad (A-7)$$