補強円筒殻の全体圧壊と有効幅の検討

正員 大坪 英臣* 正員 吉田 二郎*

Analysis of General Instability and Effective breadth of a Cylindrical Shell
Reinforced by Ring Stiffeners under External Hydrostatic Pressure

by Hideomi Ohtsubo*, Member Jiro Yoshida*, Member

Summary

Many studies have been done experimentally and theoretically for the general instability of a cylindrical shell reinforced with ring stiffeners caused by external hydrostatic pressure. In the case of shallow stiffeners, it has been found that the theoretical model has a good agreement with experimental results for a cylinder simply supported at both ends. However, these theories do not work well for the problem where the ring stiffener become large.

An effective breadth of cylindrical shell with the ring stiffener has also been studied by several researchers. However, the equations derived by them for determining the breadth do not have strong theoretical background.

In this paper, a reinforced cylindrical shell with ring stiffeners is analyzed based on the energy method, where local deformation between ring stiffeners is superposed on overall buckling mode as in the same manner as Kendrick's research. As far as the continuity conditions at the junction of the shell plate and ring stiffeners is concerned, displacement compatibility is imposed in the present paper instead of strain continuity conditions employed in the many previous researches. The present method accurately determines the critical pressure not only for shallow but also for deep ring stiffeners. Several problems are solved and compared with experimental results and the solutions by other researchers. These comparisons show that the proposed method is effective for determining the critical pressure of the reinforced cylindrical shell. The effective breadth of shell plate is also determined from the results of critical pressure.

1 序 論

本論文は環状の補強材（リング補強材）を持つ両端面外変形を単純支持した補強円筒殻の外圧による圧壊を研究する。この問題は古くから多くの研究がなされてきた。この圧壊形式は大別して2つに分かれる。一つは補強材間に生ずる殻の圧壊、他の一つは補強材を含んだ補強円筒殻全体の圧壊である。前者は現在では十分な精度で推定できるようになった。しかし後者に関しては多くの理論が提案され、実験も数多くなされているにも関わらず、(1) リング補強材間の変形、(2) 端部境界条件、(3) 初期不整、(4) 塑性化等の諸々の影響が必ずしも明確にはなっていない。古くは徳川¹⁾の研究があり、近年においては Kendrick¹⁰⁾、Kaminsky、Nash¹⁴⁾、Bodner、寺田-島本²⁾、山本³⁾、本間^{9), 9)}、横田⁵⁾らの研究が発表されている。提案された理論は浅い長方形断面

の補強材を持つ円筒殻の模型実験とは比較的良好一致を見ているが、補強材が大きくなると実験値と合わなくなることが指摘されていた。初期不整の影響に関しては横田らが検討し、圧壊圧力がかなり低下することを示した⁹⁾。

また補強材が付くときの胴板の有効幅については寺田-島本、Reynolds¹¹⁾、Pulos⁷⁾らにより各種の提案がされている。寺田-島本の有効幅は圧壊実験より逆算して求めたものであるが胴板板厚 t の1~3倍としており、初期不整による圧壊圧力の低下等も全て有効幅に含めたために小さすぎる値を与えることが指摘されている⁹⁾。一方 Pulos らは変形を軸対称と仮定して有効幅 $de = 1.56\sqrt{at}$ (a は円筒半径) としているが、その仮定故に精度に問題がある。

本研究ではエネルギー法を用いて座屈方程式を導きだし、それを解いて精度の高い圧壊圧力を算出する。座屈モードは Kendrick¹⁰⁾のものと同じものを用いるが、胴

* 東京大学工学部

Fig. 1 Coordinate system and resultant stresses

板と補強材の連続性の取り扱いを変えている。つまり胴板の中央の変位とリング補強材の付け根の変位を連続にした定式化をおこなっている。Kendrick の方法は両者の歪を連続としているが、著者らの定式化がより合理的と考えられる。また座屈時の有効幅、減少有効幅を調べるためにリング間の胴板の局部変形を考慮した座屈モードと考慮していない座屈モードによる圧壊圧力を比べ有効幅に換算し従来の有効幅の式と比較する。

2 両端単純支持された補強円筒殻の圧壊圧力の算出

エネルギー法を用いて両端単純支持された補強円筒殻の外圧による全体圧壊圧力算出法の概略を示す。

両端単純支持された補強円筒殻の胴板の座屈前後のポテンシャルエネルギーの変化を調べる。Fig. 1 に示される座標系および変位成分を考える。ここで (u_1, v_1, w_1) は座屈前後における変位の変分である。座屈前後のポテンシャルエネルギーの第二変分 $\delta^2 \Pi$ は歪エネルギーの第二変分 $\delta^2 U$ と外力ポテンシャル第二変分 $\delta^2 \Omega$ の和となる。

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \delta^2 \Omega \quad (1)$$

$\delta^2 U$ と $\delta^2 \Omega$ は各々胴板の成分と補強材の成分との和である。

$$\begin{aligned} \delta^2 U &= \delta^2 U_{(S)} + \delta^2 U_{(R)} \\ \delta^2 \Omega &= \delta^2 \Omega_{(S)} + \delta^2 \Omega_{(R)} \end{aligned} \quad (2)$$

添え字 (S) は胴板を、(R) はリング補強材を示す。

胴板のポテンシャルエネルギーの第二変分

最初に胴板に関する第二変分を考える。

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{(S)} &= a \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ (u_{1,x})^2 + \left(\frac{v_{1,\theta} + w_1}{a} \right)^2 \right. \\ &\quad + 2\nu u_{1,x} \frac{v_{1,\theta} + w_1}{a} + \frac{1-\nu}{2} \left(v_{1,x} + \frac{u_{1,\theta}}{a} \right)^2 \Big\} dx d\theta \\ &\quad + a \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ N_{x0} w_{1,x}^2 + N_{\theta0} \left(\frac{v_1 - w_{1,\theta}}{a} \right)^2 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad - 2N_{x\theta0} w_{1,x} \left(\frac{v_1 - w_{1,\theta}}{a} \right) \Big\} dx d\theta \\ &\quad + a \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ w_{1,x}^2 + \frac{(v_{1,\theta} - w_{1,\theta\theta})^2}{a^4} \right. \\ &\quad - 2\nu w_{1,x} \frac{(v_{1,\theta} - w_{1,\theta\theta})}{a^2} \\ &\quad + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{2} \frac{v_{1,x} - 2w_{1,x\theta}}{a} \right)^2 \Big\} dx d\theta \quad (3a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \Omega_{(S)} &= \frac{1}{2} q \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} (v_1^2 - v_1 w_{1,\theta} \\ &\quad + v_{1,\theta} w_1 + w_1^2) dx d\theta \end{aligned} \quad (3b)$$

ここで

$$C = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

N_{x0} , $N_{\theta0}$, $N_{x\theta0}$ は座屈直前の面内力である。また圧力 q は外向きを正にしている。ここでは軸力が発生しないとして

$$\left. \begin{aligned} N_{x0} &= 0, \quad N_{\theta0} = \frac{qa}{(1 + A_s/dt \cdot a_s/a)} \equiv \frac{qa}{k}, \\ N_{x\theta0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

a_s はリング補強材の中立軸半径を意味する。

$\Omega_{(S)}$ は外圧によるポテンシャルエネルギーを表わすもので、ここでは静水外圧を考えているので座屈前後でその方向が変わり $\delta^2 \Omega_{(S)}$ が生じる。

胴板の変位は局部変形を考慮して次式で与える。これは Kendrick¹⁰⁾ が与えたものと等価である。

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= (A_2 \sin \bar{m}x + A_3 \sin \bar{l}x) \cos n\theta \\ v_1 &= (B_2 \cos \bar{m}x + B_3 \cos \bar{l}x + B_4) \sin n\theta \\ w_1 &= (C_2 \cos \bar{m}x + C_3 \cos \bar{l}x + C_4) \cos n\theta \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ただし $\bar{l} = \pi/L$, $\bar{m} = 2\pi/d$

(5)式における胴板の各変位の第2項と第3項は円筒殻の全体的な変形であり、第1項がリング補強材間の局

Fig. 2 Cylindrical shell reinforced by ring stiffeners

部変形となる。また端部境界条件として $v_1=0, w_1=0$ を考えると

$$\left. \begin{aligned} B_4 &= \pm B_2 \\ C_4 &= \pm C_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

の関係がある。ここで $+$ は等間隔リングが偶数の場合、 $-$ は奇数の場合である。

リング補強材のポテンシャルエネルギー

補強材のポテンシャルエネルギーの第二変分 $\delta^2 U_{(R)} + \delta^2 \Omega_{(R)}$ は以下ようになる。補強材は横倒れの変形を考慮しないと仮定している。リング補強材の変位 ($0, v_{1(R)}, w_{1(R)}$) をリング補強材単独の中立軸で定義すると

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{(R)} &= \frac{1}{2a_s} \int_0^{2\pi} EA_s (v_{1(R),\theta} + w_{1(R)})^2 d\theta \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} N_{\theta 0(R)} \left(\frac{v_{1(R)} - w_{1(R),\theta}}{a_s} \right)^2 a_s d\theta \\ &+ \frac{EI_s}{2a_s^3} \int_0^{2\pi} (v_{1(R),\theta} - w_{1(R),\theta\theta})^2 d\theta \\ \delta^2 \Omega_{(R)} &= \frac{1}{2} qb \int_0^{2\pi} \{v_{1(R)}^2 - v_{1(R)}w_{1(R),\theta} \\ &+ v_{1(R),\theta}w_{1(R)} + w_{1(R)}^2\} d\theta \end{aligned} \quad (7)$$

ここで

$$N_{\theta 0(R)} = \frac{qa}{(1 + A_s/dt \cdot a_s/a) \cdot t/A_s} = qa \frac{A_s}{t} \frac{1}{k}$$

A_s, I_s はリング補強材単独の断面積と断面二次モーメントである。

胴板と補強材の連続性

リング補強材との結合部で変位の連続性を考えると胴板の板厚中央の変位とリング補強材の変位増分が等しいとして、次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} v_{1(R)} &= \frac{a_s}{a} \left\{ v_1 - \left(1 - \frac{a}{a_s} \right) w_{1,\theta} \right\} \\ w_{1(R)} &= w_1 \end{aligned} \quad (8)$$

本解析では (8) 式を用いている

Kendrick は歪が連続であるとして胴板と補強材を結合して、以下の関係式を用いている。

胴板の中央面での歪は

$$\epsilon_{(s)\theta} = \frac{v_{1,\theta} + w_1}{a} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_1 - w_{1,\theta}}{a} \right)^2$$

リング補強材の取り付け部の歪は

$$\begin{aligned} \epsilon_{(R)\theta} &= \frac{v_{1(R),\theta} + w_{1(R)}}{a_s} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_{1(R)} - w_{1(R),\theta}}{a_s} \right)^2 \\ &- (a_s - a) \left(\frac{v_{1(R),\theta} - w_{1(R),\theta\theta}}{a_s^2} \right) \end{aligned}$$

ここで $\epsilon_{(s)\theta}$ と $\epsilon_{(R)\theta}$ を二乗の項を無視して、等しいとすると次式が得られる。

$$v_{1(R),\theta} = \left(\frac{a_s}{a} \right)^2 \left\{ v_{1,\theta} + \left(1 - \frac{a}{a_s} \right) \left(w_1 - \frac{a}{a_s} w_{1,\theta\theta} \right) \right\} \quad (9)$$

歪の連続条件を用いるより、変位の連続条件を用いる

Fig. 3 Superposition of buckling mode

Fig. 4 Critical pressure as a function of height of ring stiffener ($t=7.5\text{mm}$)

方が合理的であると考えられる。また解析結果の比較により一般にリング補強材が高くなり $n=2$ のときは前者が後者より大きな座屈圧力を算出し、 $n=3, 4$ では多少低い値を与える。

なお Nash¹⁴⁾ は変位連続条件を適用し、両端固定された補強円筒殻の問題を解いている。

全体圧壊圧力の算出

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U + \delta^2 \Omega = 0 \quad (10)$$

(10) 式は $\delta^2 \Pi$ を各係数 ($A_2, A_3, B_2, B_3, B_4, C_2, C_3, C_4$) で偏微分し、0 とおくことで表わされ、各係数に関する座屈圧力をパラメータとする斉次方程式、固有値問題が得られ、これにより座屈圧力が得られる。

なお、スティアフナ間の局所変形を考慮しない場合は

$$A_2 = B_2 = C_2 = B_4 = C_4 = 0 \quad (11)$$

となり、座屈方程式の係数は A_3, B_3, C_3 の3つで表わされ、計算が単純化されることとなる。

3 解析結果

Fig. 2 に示される補強円筒殻を計算モデルとして以下の寸法、及び材料定数を用いて計算を行った。その主要

Fig. 5 Critical pressure against shell plate thickness ($a=500$ mm, $h \times b=38$ mm $\times$ 8.2 mm)

寸法及び材料定数は以下の値を標準とする。

$$a=500 \text{ mm}, d=163 \text{ mm}, L=1548.5 \text{ mm},$$

$$A_s=h \times b=38 \text{ mm} \times 8.2 \text{ mm}, t=7.5 \text{ mm},$$

$\nu=0.3$, $E=20,000 \text{ kgf/mm}^2$, リング本数 $N=9$ 本

(1) リング補強材の高さを変化させたときの圧壊圧力

Fig. 4 にエネルギー法による局部変形を考慮しているものとしてないもの、また参考に山本の式による有効幅を考慮しないときの理論値を圧壊モード別に載せている。

山本はリング間の局部変形を除いて、たわみ w_1 に対

して (5) 式の第 2 項のみを仮定し、面内力の分布はこのたわみ w_1 に Airy の応力関数として適合するように定め、 w_1 の係数 C_3 はエネルギー法にて算出している。

Fig. 4 から分かることはリング補強材の高さが比較的低く $h \leq 3t$ まではエネルギー法の二つの結果も山本の結果と比較すると違いが 2% 未満の非常に近い値を取っていることが分かる。しかし $h \geq 4t$ の範囲になると局部変形を考慮したものが局部変形を考慮していないものや山本の式の値と比べて低い値になることがわかる。補強材が高くなると胴板の局部変形モードの圧壊圧力に対する影響が大きくなっていく。これはリング間の変形がリングの変形に比べて相対的に大きくなるためである。圧壊モードは $h=3t$ 近傍を境に、補強材の背が低いときに $n=4$, 高くなると $n=3$ となる。

(2) 胴板の板厚を変化させたときの圧壊圧力

リング補強材の断面積及び形状を変化させないで、胴板板厚を変えたときの圧壊圧力を山本の解析結果と本エネルギー法による結果を Fig. 5 に示す。なお図中の t は標準値 7.5 mm を意味する。

局部変形を無視した結果は山本の結果と一致しているが、両者は胴板の特に薄い $t/3$ のとき局部変形を考慮した圧壊圧力との差は 30% 近くもある。また胴板の板厚を厚くして行くと局部変形を考慮したときと考慮しなかったときの圧壊圧力は徐々に近くなっていく。

(3) 横田⁹⁾の実験値及び解析解との比較

文献 5) において実験値と理論値を比較しているが、これに本解析値と参考のための山本の解を載せたのが Fig. 6 である。本解析値と山本の理論値どうしを比べると局部変形の影響はあまり大きくないことが分かる。た

Fig. 6 Critical pressure as a function of height of ring stiffener

だし初期撓みの小さい機械加工をした M1, M2 において局部変形を考慮した理論値は実験値と比べ M1 で 6% 程度, M2 で 20% 程度小さくなっている。この原因としては実験では端部に厚板を機械加工にて削り出しているため, 単純支持と固定端の間にあること, また軸方向変位の円周方向の変化が端部で拘束されているためと考えられる。つまり単純支持の理論に対して実験値は高くなるのが当然であると考えられる。溶接加工された W1 に対しても同様なことが言えるが, W1 の場合は初期不整のために圧壊圧力が低下して単純支持の理論値と偶然合っていると考えられる。文献 5) の Fig. 17 にも示されているとおり, 板厚の 2 割程度の初期撓みで十数%の圧力低下となることを考えると実験の条件に対応する初期不整無しの理論値は 10~20% かさ上げが必要となろう。なお補強材高さが高くなると塑性化の影響がでてくる。

4 有効幅

リングにより補強された補強円筒殻の座屈時の有効幅 (effective breadth) を検討するためリング間の局部変形を考慮したときと, しないときの座屈値を比較する。リング間の局部変形が無いとして有効幅を考慮して座屈圧力を計算し, これと局部変形を考慮したときの座屈圧力が等しくなるように有効幅を決める。局部変形を無視するときの積分を (3a) 式の銅板のひずみエネルギーの第 2 変分のうち周方向のエネルギー項に関する積分をリング間の幅 d の代わりに有効幅 $d_e = \alpha d$ とする。つまり次のエネルギー第 2 変分 $\delta^2 U_{(s)}$ を (3a) 式の代わりに用いる。

$$\begin{aligned} \delta^2 U_{(s)} = & a \frac{C}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ (u_{1,x})^2 + \alpha^2 \left(\frac{v_{1,\theta} + w_1}{a} \right)^2 \right. \\ & + (1+\alpha) \nu u_{1,x} \frac{v_{1,\theta} + w_1}{a} + \frac{1-\nu}{2} \left(v_{1,x} + \frac{u_{1,\theta}}{a} \right)^2 \left. \right\} dx d\theta \\ & + a \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ N_{x0} w_{1,x}^2 + N_{\theta 0} \left(\frac{v_1 - w_{1,\theta}}{a} \right)^2 \right. \\ & - 2 N_{x0} w_{1,x} \left(\frac{v_1 - w_{1,\theta}}{a} \right) \left. \right\} dx d\theta \\ & + a \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left\{ w_{1,x}^2 + \alpha^2 \frac{(v_{1,\theta} - w_{1,\theta\theta})^2}{a^4} \right. \\ & - (1+\alpha) \nu w_{1,x} \frac{(v_{1,\theta} - w_{1,\theta\theta})}{a^2} \\ & \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{1}{2} \frac{v_{1,x} - 2w_{1,x\theta}}{a} \right)^2 \right\} dx d\theta \quad (12) \end{aligned}$$

他のエネルギー項は変えない。

Fig. 7 に本解析で求めた α と有効幅に関しては現在よく使用されている Pulosらの提案式を示す。横軸に $\sqrt{at}$ をとり, 縦軸に α を示すが, Pulos らが提案した式 $d_e = 1.56\sqrt{at}$ は補強材の断面積及び断面二次モーメントに関与せず一意的に定まっているのは本解析の結果から判断すると不合理である。Fig. 8 に $\sqrt{at}/\sqrt{I_s/A_s}$ に対する

Fig. 7 Effective breadth factor α against $\sqrt{at}$

Fig. 8 $d_e/\sqrt{at}$ vs. $\sqrt{at}/\sqrt{I_s/A_s}$ for parameters a, d, h and t

Fig. 9 Effective breadth factor α against $\sqrt{at}/\sqrt{I_s/A_s}$

$d_e/\sqrt{at}$ を示すと h, t, d, a の増加に対して図のように変化を示す。この図から Pulos の有効幅の決め方は妥当でないことが明らかになる。

縦軸に α をとり, リング補強材の断面形状を考慮して横軸に無次元数 $\sqrt{at}/\sqrt{I_s/A_s}$ をとって解析結果を整理し

Fig. 10 Critical pressure considering local deformation vs. estimated critical pressure based on eq. (13)

たものが Fig. 9 である。多少バラついてはいるが一つの式で表現できそうである。ここでは次式を有効幅を表わす近似式として提案する

$$\alpha = 1 - \frac{1.2}{\sqrt{at} \sqrt{I_s} / A_s} \quad (13)$$

逆に Fig. 10 に補強材間の変形を無視して代わりに (13) 式の有効幅の近似を用いて得られた座屈圧力の推定値 q_{est} を横軸にとり、局部変形を含めた圧壊圧力計算値 q_{cr} を縦軸にとった対応関係を示す。両者は非常に近い値をとり、最大のずれ量は 4% 程度であった。

5 結 論

本解析はリング補強材で外側から補強された円筒殻の全体圧壊問題に対し、エネルギー法を用いて局部変形を考慮した座屈方程式を導き出し、それを解いて精度の高い圧壊圧力を算出することができた。特に胴板とリング補強材との結合条件として変位の連続性を考えることにより深い補強材の場合にも精度の高い結果が得られた。

有効幅に関しては局部変形を考慮しない胴板の幅に係数 α を掛け合わせたものと局部変形を考慮したものとの圧壊圧力を等しくなるように α の値を求め有効幅を算出した。この結果 Pulos らの有効幅の式のようにリング補強材の形状に依らないとするのは不合理であることがわかり、リング補強材の断面形状に関与した新たな (13) 式を提案した。

謝辞

本研究の計算の一部は広岡 哲、高麗義和、両氏の卒論で実施されたものである。両氏に謝意を表します。

なおこの研究の一部は、文部省科学研究費一般研究 (B) の補助を受けている。

参 考 文 献

- 1) Tokugawa, T: 「均等外圧に働かれる薄肉円筒、円錐及び球形殻の圧壊圧力近似計算法」造船協会雑誌, 92 号, Paper No. 651, 昭和 4 年。
- 2) 寺田 明, 島本参之助: 「補強材を有する薄肉円筒殻の圧壊に関する研究」, 造船協会論文集第 108 号, 昭和 35 年。
- 3) 山本善之: 「補強円筒殻の外圧による全体圧壊の研究」造船協会論文集第 113 号, 昭和 38 年。
- 4) 杉村 卓: 「外圧を受ける補強円筒殻の全体圧壊」, 造船協会論文集第 118 号, 昭和 40 年。
- 5) 横田公男, 難波直愛, 山内 祐, 浦部吉雄, 馬場金司: 「一様外圧を受ける耐圧補強円筒殻の全体圧壊強度に関する検討 (第 1 報)」, 造船学会論文集第 158 号, 1985。
- 6) Brush and Almoth: "Buckling of bars, plates and shells", McGraw-Hill, 1975。
- 7) Pulos, J. G., et al.: "Axisymmetric Elastic Deformations and Stresses in a Ring-Stiffened, Perfectly Circular Cylindrical Shell under External Hydrostatic Pressure", David Taylor Model Basin Report 1497, September 1961。
- 8) 本間康之: 「外圧を受ける円筒殻の軸対称圧潰強度 (その 1)」造船学会論文集第 147 号, 1980。
- 9) 本間康之: 「外圧を受ける円筒殻の軸対称圧潰強度 (その 2)」造船学会論文集第 154 号, 1983。
- 10) Kendrick, S.: "The Buckling Under External Pressure of Ring Stiffened Circular Cylinders", Trans. RINA, Vol. 107, 1965。
- 11) Reynolds, T. E., et al.: "General Instability of Ring-Stiffened Cylindrical Shells Subject to External Hydrostatic Pressure", DTMB. Report No. 1324, June 1959。
- 12) Ross, C. T. F.: "The Collapse of Ring-reinforced Cylinders under Uniform External Pressure", Trans. RINA, Vol. 107, 1965。
- 13) Ross, C. T. F.: "General Instability of Ring-reinforced Circular Cylinders under External Pressure", Trans. RINA, Vol. 113, 1971。
- 14) A. Nash, "General Instability of Ring-Reinforced Cylindrical shells subject to Hydrostatic Pressure", Journal of Applied Mechanics. Vol. 20, No. 4, 1953。