有限要素法による平面応力問題の誤差評価と 応力修正に関する研究

正員 大坪 英 臣* 北 村 充*

Investigation of a Posteriori Error Analysis for Plane Stress Problems
by the Finite Element Method and Updating Stresses

by Hideomi Ohtsubo, *Member* Mitsuru Kitamura

Summary

The estimation of discretization error in the finite element method is considered in this paper. The proposed method can estimate error of solutions obtained by the finite element method for 2-dimensional elastic problems with 4-node elements. Because quadratic term is expected to dominate the error field, an 8-node element is utilized in the estimation. Even though the 8-node element is used, the proposed method does not require a large memory or long computing time since error is estimated element by element. Not only rectangular elements but also any shape 4-node elements can be used in this method for estimating the error in the finite element computation with high accuracy. An error norm is computed in the paper which can indicate an element-wise relative error. The finite element solutions are also improved drastically by adding the estimated errors onto the original solutions. The proposed method can be utilized for any type of linear problem if an isoparametric finite element method is used.

1. 序

コンピュータの発展と共に有限要素法はこの二～三十年の間に飛躍的な進歩を遂げて来ており、工学分野を中心に多くの方面で数値計算ツールとして使われている。また、汎用ソフトなどの充実により有限要素使用人口も増加している。解析に対応する入力データさえ準備すれば解が得られるという便利さの反面、有限要素のモデリングが悪いとその解析値に十分な精度が得られないという欠点も持ち合わせている。更に、有限要素法により得られた解の正当性を判断する為には深い知識や豊かな経験が必要である。このような背景から有限要素解の信頼度解析が近年脚光を浴びて来ており、幾つかの事後誤差解析が行われている^{1)~7)}。しかし、それらは誤差評価の精度が悪かったり、正方形要素のみに適用できるというような制限がある。よって、本論文ではいかなるタイプの線形問題にも対応できる精度の高い事後誤差評価法の開発を目的とする。今回は特に 2 次元弾性問題に焦点を当ててみる。

有限要素法が誤差を生じさせる要因は幾つかあるが、そ

の中でも最も影響が大きいと考えられる離散化を取り上げる。ここで用いる離散化誤差の支配方程式は Kelly⁵⁾により提案された理論を参考にしてている。誤差の主成分は元の有限要素解析に用いられた内挿関数の次数より 1 次高いと考えられる。この点に着目し本研究の誤差解析では 1 階次数が高い要素を用いて事後誤差評価を行う。具体的に言うと、4 節点要素により得られた有限要素解の誤差を 8 節点要素で解くのである。高次要素を用いると当然の事ながら計算時間が増加する。事後誤差解析の本質から考えて元の有限要素解析の数%以下の計算量で済ませたい。実際的な問題において、ここでは誤差を要素ごとに解くことを試みる。

このような誤差解析により有限要素モデルや各要素での解の信頼度が定量的に判断できるであろう。この誤差評価で誤差が高いと判断された部分は細かく、誤差が低いところは粗くメッシュを切りなおしたりして再解析をすることができる。もう一つの応用法として有限要素解の改善が考えられる。求まった誤差を元の有限要素解に加えることにより修正することができる。この修正で解の改善が精度良く行えたなら前述の再解析は不要となる。

以下に誤差の支配方程式の導入および数値解析法について述べる。また幾つかの数値解析例により本解析法の妥当

* 東京大学工学部船舶海洋工学科

性を調査する。

2. 理 論

2.1 誤差の定式化

Fig.1 に示される様な境界 Γ に囲まれる閉領域 Ω を考える。 Γ は変位を拘束される Γ_D と表面力が与えられる Γ_F より構成される。2次元問題においてこの応力場は次の方程式により支配される。

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y = 0 \quad (2)$$

ここで σ_x, σ_y そして τ_{xy} は x, y 方向の直応力とせん断応力である。また、 f_x と f_y はそれぞれ x, y 方向の体積力である。次に、応力テンソル σ , 歪テンソル ε , 変位ベクトル u 及び体積力ベクトル f を次式で定義する。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad u = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} \quad f = \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (3)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{ \nabla u + (\nabla u)^T \} \equiv \nabla' u$$

上式中の ∇ は勾配演算子である。弾性係数テンソルを E で表すと応力-変位の関係は次式により表現される。

$$\sigma = E \varepsilon = E \nabla' u \quad (4)$$

この表記に従うと既述の支配方程式及び境界条件は次式により表現される。

$$\nabla \cdot (E \nabla' u) + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

$$(E \nabla' u) \cdot n = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (6)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_D \quad (7)$$

仮想仕事の原理より次のように2次元応力問題の弱形式が導かれる。

$$\int_{\Omega} \nabla' v \cdot E \nabla' u d\Omega = \int_{\Omega} v \cdot f d\Omega + \int_{\Gamma_F} v \cdot \bar{q} d\Gamma \quad (8)$$

有限要素方程式は通常の方法で上式より得られる。

次に Kelly⁹⁾の理論に基づいた事後誤差評価の定式化について述べよう。有限要素法の内挿関数は変位や応力を厳密には表現できない。つまり、有限要素解は支配方程式を完全に満たしていない。有限要素法により得られた変位を $\bar{u}$ とすると要素 i において支配方程式の残差 r_i は次式で

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_D$$

$$\nabla \cdot (E \nabla' u) + f = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$(E \nabla' u) \cdot n = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_F$$

Fig. 1 Two-dimensional stress field

与えられる。

$$r_i = \nabla \cdot (E \nabla' \bar{u}) + f \quad \text{in } \Omega_i \quad (9)$$

仮想変位 v を上式に掛け領域 Ω 上でその和をとり次式を得る。

$$\sum_i \int_{\Omega_i} \nabla' v \cdot E \nabla' \bar{u} d\Omega = \sum_i \left[\int_{\Omega_i} v \cdot f d\Omega - \int_{\Omega_i} v \cdot r_i d\Omega + \int_{\Gamma_i} v \cdot (E \nabla' \bar{u}) \cdot n d\Gamma \right] \quad (10)$$

ここで Ω_i と Γ_i はそれぞれ要素 i の領域、要素 i の境界を表している。

C^0 要素を用いて得られた応力は一般に要素境界上で不連続となる。このため(10)式の右辺最終項はこの不連続性によりキャンセルされずに残る。この応力の不連続量を ρ_{ij} で表現すると(10)式は次式のように書き改められる。

$$\int_{\Omega} \nabla' v \cdot E \nabla' \bar{u} d\Omega = \int_{\Omega} v \cdot f d\Omega - \int_{\Omega} v \cdot r d\Omega + \int_{\Gamma_F} v \cdot \bar{q} d\Omega + \sum_{ij} \int_{\Gamma_{ij}} v \cdot \rho_{ij} d\Omega \quad (11)$$

ここで Γ_{ij} は要素 ij 間の要素境界を表している。要素境界の左側にある要素の番号 i が右側の要素番号 j より小さくなるように Γ_{ij} の方向を定め、 Γ_F の正方向を反時計回りとした時、 ρ_{ij} は次のように定義される。

$$\rho_{ij} = \hat{\sigma}_i \cdot n_i + \hat{\sigma}_j \cdot n_j = (\hat{\sigma}_i - \hat{\sigma}_j) \cdot n_i \quad \text{on } \Gamma_{ij} \quad (12)$$

$$\rho_{ij} = \hat{\sigma}_i \cdot n_i - \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (13)$$

上式中で $\hat{\sigma}$ は有限要素法により得られた応力である。

ここまでに仮想仕事の原理により導かれた2つの式の差をとり、つまり(8)-(11), 誤差 e を $e = u - \bar{u}$ で定義すると全領域における事後誤差の支配方程式が導かれる。

$$\int_{\Omega} \nabla' v \cdot E \nabla' e d\Omega = \int_{\Omega} v \cdot r d\Omega - \sum_{ij} \int_{\Gamma_{ij}} v \cdot \rho_{ij} d\Gamma \quad (14)$$

有限要素法などを(14)式に適用すると厳密解不明の場合でも誤差 e を解くことができる。しかし、全領域上で得られた誤差の剛性マトリックスを解くことは誤差評価の経済性の観点から見て不合理である。特に誤差の主成分は基の有限要素の内挿関数より1次高いため4節点要素を用いた解析解の誤差は少なくとも8節点要素で解く必要がある。このように次数を上げた要素を用いて全領域の誤差を解くと剛性マトリックスのサイズは数倍にも膨れ上がる。従って、ここでは(16)式で表される境界条件を満足しながら(15)式を要素ごとに解析する事を考える。

$$\nabla \cdot (E \nabla' e) + r_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \quad (15)$$

$$(E \nabla' e) \cdot n = -\bar{\rho}_i \quad \text{on } \Gamma_i \quad (16)$$

本来は要素境界上で e の連続性を満足させなければならないが、ここではこれを無視している。この場合これらの式は(14)式と同値になる⁹⁾⁸⁾。このことにより後述のように誤差は領域全体としては高めの値を与えることになる。8

節点要素を要素 i に適用すると次式を得る。

$$[K]_i \{e\}_i = \{F\}_i \quad (17)$$

要素マトリックス K と要素荷重ベクトル F は次式により与えられる。

$$[K]_i = \int_{\Omega_i} B^T E B d\Omega \quad (18)$$

$$\{F\}_i = \int_{\Omega_i} N r_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} N \bar{\rho}_i d\Gamma \quad (19)$$

上式中の N と B はそれぞれ形状関数ベクトルおよびその勾配演算子マトリックスである。これを合成せずに解くと要素 i 上の誤差が得られる。(16)(19)式中の $\bar{\rho}_i$ は(12)(13)式で定義される ρ_{ij} とは異なる量であることに注意をされたい。 $\bar{\rho}_i$ は次の制約条件下で決定される量である。

- (a) $\bar{\rho}_i$ は要素境界 Γ_{ij} 上の不連続量 ρ_{ij} の一部で要素 i に関連する部分である。
- (b) $\bar{\rho}_i$ は r_i と共に自平衡条件を満たさなければならない。

上記の条件(a)を満たすために応力不連続量 ρ_{ij} は次のように隣接要素 i と j に分配される必要がある。

$$\rho_{ij} = \bar{\rho}_i + \bar{\rho}_j \quad (20)$$

不連続量の分配は真の応力及び有限要素法による応力の分布に依存する。本研究では実際の応力が隣接要素上で線形分布しているという仮定をし、応力不連続量をその要素境界からそれぞれの要素重心までの距離の比により分配する。(Fig.2 参照)

Fig. 2 Linear stress distribution assumption in two consecutive elements and separation of ρ_{ij}

$$\bar{\rho}_i = \frac{l_i}{l_i + l_j} \rho_{ij} \quad \bar{\rho}_j = \frac{l_j}{l_i + l_j} \rho_{ij} \quad (21)$$

ここで l_i と l_j はそれぞれ要素 i と j の重心からこれらの要素境界の中心までの距離である。次の2式で与えられる自平衡条件(b)を満足するように $\bar{\rho}_i$ に修正を加える必要がある。

$$\int_{\Omega_i} r_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} \bar{\rho}_i d\Gamma = 0 \quad (22)$$

$$\int_{\Omega_i} r_i \times (x - x_0) d\Omega - \int_{\Gamma_i} \bar{\rho}_i \times (x - x_0) d\Gamma = 0 \quad (23)$$

ここでは誤差解析に使用する要素(8節点要素)の形状関数を利用して自平衡が得られるように $\bar{\rho}_i$ の修正を行った。この時点で(17)式は解析可能となり誤差 e が得られる。

さて、誤差の大小を示すエネルギーノルムを次式で定義する。

$$\|e\|^2 = \sum_i \|e\|_i^2 \quad (24)$$

$$\|e\|_i^2 = \int_{\Omega_i} \nabla' e \cdot E \nabla' e d\Omega \quad (25)$$

隣接要素間で誤差の連続性を無視しているため(24)式で与えられる全領域での誤差のエネルギーノルムは真のそれより大きめとなる。これがコンプリメンタリエネルギー最小の原理から導ける。ただし、この上界の前提として $\bar{\rho}_i$ が(20), (22), (23)式を完全に満足している事が要求される。本方法では(20)式が完全には満たされない。このような誤差の上界性は解析者を安全側に立たせるため重要な意味を持つ。このようにして得られた誤差のエネルギーノルムがどの程度の上界値を有するのか、また、各要素での誤差の精度はどの程度であるのか後の数値計算例で検討してみよう。

3. 予測誤差による有限要素解の修正

このようにして予測された有限要素解の誤差をどのように利用したら良いだろうか。(24)(25)式により定義された誤差のエネルギーノルムより有限要素解析の信頼度が分かるであろう。続いて誤差の高い部分をアダプティブ・メッシュ法などによりモデルに改良を加え詳細な有限要素解析を行うことが可能である。この結果、より精度の高い解を効率よく得ることができる。もう1つの応用法として予測された誤差の解に足し込むことにより再解析せずに解の精度を向上することが考えられる。もし誤差成分の精度が十分なら次式により応力値の修正が可能である。

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma} + \Delta\sigma \quad (26)$$

$$\Delta\sigma = E \Delta\epsilon = E \nabla' (u - \bar{u}) = -E \nabla' e \quad (27)$$

ここで $\Delta\sigma$ は予測された応力の増分、 $\bar{\sigma}$ は修正された応力である。

4. 数値解析例

ここでは上記の理論に基づいて著者により作成されたプログラム“ERRAND-FEM”(ERROR ANALYSIS

Fig. 3 Thick cylinder subjected to internal and external pressures

DEPENDENT ON F.E.M.) を用いて幾つかの例題を解き本解析法の真価を見よう。まず、厳密解が分かっている簡単な問題として内外圧を受ける厚肉円筒問題を平面歪条件で解析する。次に、より実用的な問題として引張り応力を受ける円孔を有する正方形板を平面応力条件で解析する。

4.1 内圧外圧を受ける厚肉円筒

Fig.3にあるように内径 a 外径 b の厚肉円筒が内圧 P_i 外圧 P_o を受けている。この問題の応力の厳密解は次の2式により与えられる。

$$\sigma_r = \frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \quad (28)$$

$$\sigma_\theta = -\frac{a^2 b^2 (p_e - p_i)}{(b^2 - a^2) r^2} + \frac{p_i a^2 - p_e b^2}{b^2 - a^2} \quad (29)$$

また数値パラメータは次のように設定した。

$$\begin{aligned} a &= 0.2 & P_i &= 10 & E &= 10000 \\ b &= 1.0 & P_e &= 50 & \nu &= 0.3 \end{aligned} \quad (30)$$

Fig.4にある有限要素モデル (MESH-A) を用いてこの2次元応力問題を解く。4節点要素を使用して得られた応

48 Elements
63 Nodes

Fig. 4 Finite element model for a thick cylinder problem (MESH-A)

力分布は Fig.5 上に“×”の印をもって示される。続いて、8節点要素を用いて事後誤差評価を行いどの程度の誤差があるか、つまり有限要素解の信頼度を調べる。ここでは次のような式を用いて相対誤差を表現しよう。

$$\text{全領域における相対誤差} = \|e\|/\|u\| \quad (31)$$

Fig. 5 Stress distribution

要素 i における相対誤差 $= \|e\|_i / \|u\|_i$ (32)

ここで $\|u\|$ と $\|u\|_i$ は全領域および要素 i 上での変位 u によるエネルギーノルム, つまり歪エネルギーの2倍量の平方根である。この有限要素モデルの真の相対誤差と予測された相対誤差を Fig.6 に示す。真の相対誤差の最大値は円筒内側要素で生ずる 22.3% である。一方, 予測された相対誤差は 22.8% となっており極めて精度良く誤差評価されている。ここで相対誤差の意味をより明白にするために $\sqrt{J_2}$ の誤差分布を Fig.7 に示そう。Fig.6 と 7 の比較より (32) 式で定義された相対誤差と $\sqrt{J_2}$ 中の誤差とはほぼ同値であることが分かる。つまり, この相対誤差は応力中の誤差とみなすことができる。次に予想された相対誤差と真の相対誤差との比 θ_i の分布を Fig.8 にプロットする。もし全ての要素上で θ_i が 1.0 となるならばこの誤差評価はエネルギーノルムの観点において完璧となる。Fig.8 より全

要素上で θ_i は 1.0 近辺の値を示していることが分かる。

Fig.6 と 8 の相対誤差の比較および θ_i より誤差解析は極めて良い精度で行われていると考えられる。また, 全領域における予測相対誤差 $\|e\|^{est}$ と真の相対誤差 $\|e\|^{ex}$ はそれぞれ 2.46% と 2.33% となった。これより θ , つまり $\|e\|^{est}$ と $\|e\|^{ex}$ との比は 1.06 となり予測誤差の上界寄与はこの数値計算例では高精度で保たれていることが分かる。

次に (26) (27) 式に従って応力分布の修正を試みる。修正された応力分布は Fig.5 上の印“○”により与えられる。このように有限要素解で見られた σ_r の不連続性は著しく改善されており, アダプティブ・メッシュ等による再解析は不要である。この厳密解の判明している例題により本誤差解析法の正当性が証明された。

4.2 引張り応力を受ける円孔を有する正方形板

Fig.9 にあるように半径 a の円孔を有する正方形板がそ

Fig. 6 Exact and estimated distribution of relative errors for a thick cylinder problem

Fig. 7 Estimated distribution of $\sqrt{J_2(\Delta\sigma)} / \sqrt{J_2(\sigma)}$ for a thick cylinder problem

Fig. 8 Ratio of estimated relative errors to exact relative error, θ_i

Fig. 9 Square plate with a hole under tensile stress

Fig. 10 Finite element model for a plate with a hole (MESH-B)

の 1 辺に一樣張力 p を受けている。ここで数値パラメータは次のように設定する。

$$\begin{aligned} a &= 99 & E &= 10000 & P &= 10 \\ b &= 369 & \nu &= 0.3 \end{aligned} \quad (33)$$

Fig.10 に示される 4 節点要素で構成される有限要素モデル (MESH-B) により数値解析を行う。この問題では円孔近辺に応力集中が起こると予想されるため Fig.11 に有限要素モデルの円孔沿いにおける σ_θ , σ_r および $\tau_{r\theta}$ を実線でプロットする。これらの応力値は 2×2 のガウス積分点での応力から各節点に要素ごとに補間したものである。円孔縁は自由境界なので σ_r と $\tau_{r\theta}$ は理論的にゼロとなる。

予測された相対誤差, 誤差のエネルギーノルム及び変位のエネルギーノルムの分布を Fig.12 に示そう。ここでは単位面積当りのノルムが示されている。予想通りに円孔近辺

で著しい誤差が評価されている。 y 軸付近の相対誤差が x 軸付近のものより大きいのは, 分母となる変位のエネルギーノルムが小さいためである。また, 全領域上の相対誤差は 11.24% (Table 1 参照) となっている。

Fig. 11 上の破線は予測された誤差を元の有限要素解に足し込み修正された応力を表している。この修正により σ_θ の連続性は増し σ_r と $\tau_{r\theta}$ の平均値はゼロに近付いている。しかし, 隣接要素間の σ_r と $\tau_{r\theta}$ の不連続性が悪化してしまった。そこで修正された応力分布の誤差解析を行い 2 度目の応力値の改善を試みる。Fig.13 の破線は新たに修正された応力分布を表している。これらのプロットより σ_r と $\tau_{r\theta}$ がほぼ消滅している, つまり正解に近付いていることが分かる。また, Table 1 で示されるように全領域上の相対誤差は減少しており応力値修正により解の信頼性が増加してい

Table 1 Estimated energy norm of error for a square plate problem

$ e ^{est}$	$ \hat{u} $	$\frac{ e ^{est}}{ \hat{u} }$	updating
5.526	49.18	11.24%	original
1.951	48.96	3.98%	1st
1.429	49.63	2.88%	2nd

Fig. 11 Stress distribution

Fig. 12 Relative error and energy norms of 'e' and 'u' per unit area

Table 2 Locally estimated energy norm of error for a square plate problem in the element containing point A and σ_θ at point A

$ e _i^{est} *$	$ \hat{u} _i *$	$\frac{ e _i^{est}}{ \hat{u} _i} *$	updating	$\sigma_\theta **$
1.490	10.64	14.0%	original	29.53
0.658	10.29	6.4%	1st	30.45
0.468	10.25	4.6%	2nd	30.68

* Element i is the one which includes point A .

** Analytical value of σ_θ at $A = 33.5$ (from Reference [9]).

Fig. 13 Secondary updated stress distribution

ることが分かる。

この例題では Fig.9 中の A で示される点での σ_θ が最も注目されるため、その数値を Table 2 に示そう。モデルの相対誤差は応力改善の繰り返しにより減少しているものの、文献⁹⁾で与えられる参考値となるような σ_θ の改善は得られない。本研究では応力不連続量の分配の際、隣接要素上で応力の線形分布を仮定した。しかし、円孔付近では急激な応力変化つまり応力集中があるためこの仮定が大幅に乱されていると思われる。また、元の有限要素解が与えた σ_θ と $\tau_{r\theta}$ 中の大きな誤差の影響もあろう。

5. 結論と考察

本論文では有限要素法における離散化誤差について研究してきた。有限要素解の誤差の主成分は基の解析に用いた要素の形状関数の次数より 1 階高いと考えられるため、ここでは 4 節点要素により得られた有限要素解の事後誤差評価を 8 節点要素を用いて要素ごとに解析した。

本解析法より誤差のエネルギノルムと応力成分の誤差が算出される。これらより次の 2 つのことが考えられる。まず、誤差が高いと判断された部分をアダプティブ・メッシュ等により細かなメッシュに切り直して詳細な再解析を行い、より信頼性のある解を得ることができる。また、予測された応力成分中の誤差を基の応力値に加えて再解析をせずに解の改善が行える。

本解析法の正当性及び有効性を検討するために 2 つの数値解析例が示された。まず最初に、厳密解の判明している厚肉円筒問題を取り上げて予測誤差のエネルギノルム及び改善された応力の精度をチェックした。厳密解との比較より全領域だけでなく各要素レベルでも十分な精度を持って事後誤差評価が行われていることが証明された。また、予測誤差の足し込みにより応力値もかなり良好に改善されている。続いて、より一般的な問題として円孔を有する平板問題を解析した。誤差解析による応力修正により各要素境界で見られた不連続性は取り除かれ、また自由境界である円孔際の表面力はほぼ消滅した。

ここで提案されている誤差解析法は一般的であり、今後その適用分野の拡張が期待される。著者らにより高次要素の誤差解析並びに 3 次元要素、板殻要素における誤差解析も進行中である。

参考文献

- 1) I. Babuska and W.C. Rheinbold, 'A Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method', Int. J. Num. Meth. Engng., 12, 1597-1615, 1978.
- 2) I. Babuska and W.C. Rheinbold, 'Adaptive Approaches and Reliability Estimation in Finite Element Analysis', Comp. Meths. Appl. Mech.

- Engng., 17/18, 519-540, 1979.
- 3) D. W. Kelly, J. Gago, O. C. Zienkiewicz and I. Babuska, 'A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part I -Error Analysis', Int. J. Num. Meth. Engng. 19, 1593-1619, 1983.
 - 4) O. C. Zienkiewicz, J. Gago and D. W. Kelly, 'The Hierarchical Concept in Finite Element Analysis', Comput. Structures, 16, 53-65, 1983.
 - 5) D. W. Kelly, 'The Self-equilibration of Residuals and Complementary a Posteriori Error Estimation in the Finite Element Method', Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 20, 1491-1506, 1984.
 - 6) N. Kikuchi, 'Adaptive Grid Design for Finite Element Analysis', 2nd Joint ASCE/ASME Mechanics Conference, June 23-26, 1985, Univ. of New Mexico, Albuquerque, NM.
 - 7) J. Gago, D. W. Kelly and O. C. Zienkiewicz, 'A Posteriori Error Analysis and Adaptive Processes in the Finite Element Method: Part II -Adaptive Mesh Refinement', Int. J. Num. Meth. Engng. 19, 1621-1656, 1983.
 - 8) J. T. Oden and J. N. Reddy, 'Variational Methods in Theoretical Mechanics', Springer Verlag, Berlin and New York, 1976.
 - 9) Von H. Hengst 'Beitrag zur Beurteilung des Spannungszustandes einer gelochten Scheibe', Zeitschr. Angew. Math. und Mech., 18-1, 44-48, 1938.