骨組構造の崩壊シミュレーション(その1)

— 定式化および簡単な数値例 —

正員 都 井 裕* 正員 梁 洪 鐘**

Simulation of Collapse of Framed Structures (Part 1) — Formulations and Simple Numerical Examples —

by Yutaka Toi, *Member* Hong-Jong Yang, *Member*

Summary

The present study is concerned with the development of a finite element program for collapse analysis of three-dimensional framed structures under static loading, which has the following features:

(1) A linear Timoshenko beam-column element is employed with a variable location of an integration point, which is equivalent to the beam bending element including the effect of shear deformation in the RBSM (Rigid Bodies-Spring Models) family, and can be considered to be suitable to the analysis of highly nonlinear problems including crush analysis.

(2) The program is equipped with the updated Lagrangian formulation as well as the total Lagrangian formulation, the former of which is used in the crush analysis accompanied by extremely large rotations and strains, and the latter is used in the ultimate strength analysis with moderately large deformations.

(3) A formulation using generalized stresses is adopted for the derivation of incremental stiffness equations, and the yield functions expressed in terms of resultant forces are assumed in the elasto-plastic analysis, from a point of view of the generalization of the method of limit analysis.

Numerical studies for crush as well as elastica and inelastic stability problems are conducted to show the validity of the developed code. The treatment of strain-hardening and the experimental verifications for the crush analysis will be contained in a further report.

記 号 表

A : 断面積

$[^{n+1}A]$: 増分ステップ n における updated Kirchhoff 応力増分の Jaumann 微分形への変換マトリックス

$[{}^n\bar{B}_L]$: Total Lagrangian Formulation (以下, T. L. F. と略す) における線形 $[B]$ マトリックス

$[{}^n\bar{B}_{NL}]$: T. L. F. における非線形 $[B]$ マトリックス

$[{}^n\bar{B}_L]$: Updated Lagrangian Formulation (以下, U. L. F. と略す) における線形 $[B]$ マトリックス

$[{}^n\bar{B}_{NL}]$: U. L. F. における非線形 $[B]$ マトリックス

$[D^e]$: 弾性の $[D]$ マトリックス

$[D^p]$: 塑性の $[D]$ マトリックス

E : ヤング率

f : 降伏関数 (塑性ポテンシャル)

$\{^{n+1}E\}$: 増分ステップ $(n+1)$ における節点外力ベクトル

$\{{}^nF\}$: T. L. F. における節点内力ベクトル

$\{{}^nF\}$: U. L. F. における節点内力ベクトル

G : セン断弾性係数

$[{}^n\bar{S}]$: T. L. F. における一般化応力マトリックス

$[{}^n\bar{S}]$: U. L. F. における一般化応力マトリックス

I_x, I_y : 断面 2 次モーメント

K : Saint-Venant のねじり定数

$[{}^n\bar{K}_L]$: T. L. F. における増分剛性マトリックス

$[{}^n\bar{K}_{NL}]$: T. L. F. における幾何剛性マトリックス

$[{}^n\bar{K}_L]$: U. L. F. における増分剛性マトリックス

$[{}^n\bar{K}_{NL}]$: U. L. F. における幾何剛性マトリックス

nl : 増分ステップ n における要素長

N_p : 降伏軸力

M_p, M_{x_p}, M_{y_p} : 全塑性曲げモーメント

M_{z_p} : 全塑性ねじりモーメント

* 東京大学生産技術研究所

** 東京大学大学院

R_1, ϵ_1 : x 軸まわりの曲げモーメントおよび曲率変化
 R_2, ϵ_2 : y 軸まわりの曲げモーメントおよび曲率変化
 R_3, ϵ_3 : 軸力および平均軸ひずみ
 R_4, ϵ_4 : ねじりモーメントおよびねじれ率
 R_5, ϵ_5 : x 軸方向のせん断力およびせん断ひずみ
 R_6, ϵ_6 : y 軸方向のせん断力およびせん断ひずみ
 $\{\Delta_0 \bar{R}\}$: T. L. F.における一般化応力増分ベクトル
 $\{\Delta_n \bar{R}\}$: U. L. F.における一般化応力増分ベクトル
 $\{^0 \bar{R}\}$: T. L. F.の増分ステップ n における応力ベクトル
 $\{^n \bar{R}\}$: U. L. F.の増分ステップ n における応力ベクトル
 $\{\Delta \bar{R}'\}$: 応力増分の Jaumann 微分形
 $[^e T]$: 全体座標系から要素座標系への変換マトリックス
 $[^n T]$: 初期の要素座標系から増分ステップ n における要素座標系への変換マトリックス
 $[^n T]$: 前ステップにおける要素座標系から現ステップ n における要素座標系への変換マトリックス
 u_i : 節点 I における全体座標系 X 軸方向の並進変位
 v_i : 節点 I における全体座標系 Y 軸方向の並進変位
 w_i : 節点 I における全体座標系 Z 軸方向の並進変位
 θ_{xi} : 節点 I における全体座標系 X 軸まわりの回転変位
 θ_{yi} : 節点 I における全体座標系 Y 軸まわりの回転変位
 θ_{zi} : 節点 I における全体座標系 Z 軸まわりの回転変位
 $\bar{u}_i$: 節点 I における要素座標系 x 軸方向の並進変位
 $\Delta_0 \bar{u}_i$: T. L. F.における節点 I の x 軸方向並進変位増分
 $\Delta_n \bar{u}_i$: U. L. F.における節点 I の x 軸方向並進変位増分
 $^0 \bar{u}_i$: T. L. F.の増分ステップ n における節点 I の x 軸方向並進変位
 α_x, α_y : 有効せん断係数
 $^{n+1} \Gamma$: 増分ステップ $(n+1)$ における外力のなす仮想仕事
 $\{\Delta_0 \bar{\epsilon}^*\}$: T. L. F.におけるひずみ増分ベクトル
 $\{\Delta_0 \bar{\epsilon}\}$: $\{\Delta_0 \bar{\epsilon}^*\}$ の線形項
 $\{\Delta_0 \bar{\epsilon}'\}$: $\{\Delta_0 \bar{\epsilon}^*\}$ の非線形項
 $\{\Delta_n \bar{\epsilon}^*\}$: U. L. F.におけるひずみ増分ベクトル
 $\{\Delta_n \bar{\epsilon}\}$: $\{\Delta_n \bar{\epsilon}^*\}$ の線形項
 $\{\Delta_n \bar{\epsilon}'\}$: $\{\Delta_n \bar{\epsilon}^*\}$ の非線形項
 $\{^0 \bar{\epsilon}\}$: T. L. F.の増分ステップ n における全ひずみベクトル
 $\{^n \bar{\epsilon}\}$: U. L. F.の増分ステップ n における全ひずみベクトル
 ν : ポアソン比
 ξ : 要素長方向の無次元座標 ($-1 \leq \xi \leq 1$)

1. 序

本研究は、海洋構造物、鉄塔、格子形鋼製砂防ダムなど

に代表される空間骨組構造物の強非線形解析、すなわち、単純な塑性崩壊から超大変形を伴う座屈後のクラッシュ挙動に至る、広範な非線形崩壊挙動の数値シミュレーションのための、効率的な有限要素プログラムを開発し、多数の数値例によりその有用性を検証することを目的としている。

本プログラムでは、次数低減積分法（1点積分法）によるチモシェンコはり要素¹⁾を一般の3次元変形問題に拡張した低次梁柱要素を用いている。本要素は、極限解析用の離散化モデルである剛体・ばねモデル中の、せん断変形を考慮したはりの曲げ要素²⁾と等価であり、積分点の位置を変えることにより、要素内における任意の位置に塑性関節を発生させることができる³⁾。低次要素であるため、線形あるいは弱非線形問題に対しては必ずしも効率的な離散化モデルとは言えないが、塑性崩壊、クラッシュ、弾塑性波動伝播、破砕などの不連続性が卓越する強非線形現象のシミュレーション、あるいは石造柱、石造アーチの安定などの不連続体解析を主目的とした場合は、極めて効果的な離散化モデルである。

非線形解析のための増分理論として、一般には Total Lagrangian Formulation あるいは Updated Lagrangian Formulation が使用されている⁴⁾。適切な構成関係を用いれば、両者は同じ解を与えるが⁵⁾、本研究では主として計算効率の観点より、塑性安定解析などの最終耐力解析には前者を、クラッシュ解析などの座屈後挙動解析には後者を使用することを念頭に、両者を採用した。Updated Lagrangian Formulation による定式化においては、要素回転とともに移動する要素座標系を仮定しており、各増分ステップにおいて計算された updated Kirchhoff 応力増分は Euler 応力の Jaumann 微分形に変換される。

弾塑性解析に対しては、曲げ問題における塑性関節法の一般化の観点より、曲げモーメント、ねじりモーメント、軸力などの一般化応力と、曲率変化、ねじり角、平均軸ひずみなどの一般化ひずみを用いて、定式化を行なっており、降伏関数もこれらの断面力成分を用いて表示した。本報では、ひずみ硬化を伴わない完全塑性体材料のみを仮定しており、 R_{min} 法⁶⁾により、各要素の初期降伏の際に、応力成分が正確に降伏曲面上に位置するように配慮した。

続く2章で、Total Lagrangian Formulation および Updated Lagrangian Formulation に基づく解析アルゴリズムの詳細を述べ、3章および4章でそれぞれの定式化による解析例を示す。最後の5章は結言である。

2. 空間骨組構造の崩壊解析アルゴリズム

本章では、線形梁柱要素に対し、Total Lagrangian Formulation (以下、T. L. F.と表記する) および Updated Lagrangian Formulation (以下、U. L. F.と表記する) に基づく非線形解析アルゴリズムを記述する。本要素による

有限変形・平面骨組解析アルゴリズムおよび微小変形・立体骨組解析アルゴリズムは、すでに文献3)において、数値例とともに示されているので、合せて参照されたい。

いずれの増分理論も、区分的線形化の概念に基づいており、以下では、増分ステップ n における諸状態量がすべて既知であると仮定し、増分ステップ $(n+1)$ における諸量を計算するためのアルゴリズムを記述する。

2.1 要素および座標系

次数低減積分法による線形チモシェンコはり要素を一般の3次元変形問題に拡張した線形梁柱要素を Fig. 1 に示す。両端部節点に要素座標系を参照する6自由度($\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{\theta}_x$, $\bar{\theta}_y$, $\bar{\theta}_z$)を有する。

定式化において参照される座標系は、要素の空間的な位置および全体剛性方程式において節点変位を定義するための全体座標系、一般化ひずみと一般化応力(断面力)を定義するための要素座標系、および要素内における積分点の位置を指定するための ξ 座標軸の3座標系である。T. L. F.においては、要素座標系は初期状態における定義が保存されるが、U. L. F.においては、要素回転とともに、時々刻々その向きを変えるものとする。

前述したように、曲げ変形に関し、本要素は、剛体・ばねモデル中のせん断変形を考慮したはり曲げ要素と等価である³⁾。すなわち、本有限要素モデルにおける剛性評価のた

めの数値積分点を Fig. 1 における ξ の位置に設定すれば、本要素は、 $-\xi$ の位置に折れ曲り点(塑性関節点)を設定した剛体・ばねモデルと完全に等価となる。これをより具体的に説明すれば、Fig. 2 に示ようになる。すなわち、本要素における数値積分点を $\xi=0$ の位置に取れば、塑性関節は要素中央部に発生し、数値積分点を要素端部($\xi=-1$ あるいは $\xi=1$)に取れば、塑性関節は反対側の要素端部($\xi=1$ あるいは $\xi=-1$)に発生することになる。この性質を活用すれば、積分点の位置を入力データとして指定することにより、要素内の任意の位置に塑性関節を発生させることが可能となる。特に、集中荷重点直下あるいは部材結合部などに正確に塑性関節を発生させることができ、少数の要素で塑性崩壊荷重を精確に算定することが可能となる。

なお、次節以後の記述では、要素座標系を参照していることを特に示す場合には、変数に上付きバーを付すことにする。

2.2 一般化ひずみ増分と節点変位増分の関係

増分ステップ n から増分ステップ $(n+1)$ の間における一般化ひずみ(以下では適宜単に「ひずみ」と表記する)と節点変位の増分関係式は、T. L. F.においては(1)式、U. L. F.においては(2)式により与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta_0 \bar{\epsilon}_1^* \\ \Delta_0 \bar{\epsilon}_2^* \\ \Delta_0 \bar{\epsilon}_3^* \\ \Delta_0 \bar{\epsilon}_4^* \\ \Delta_0 \bar{\epsilon}_5^* \\ \Delta_0 \bar{\epsilon}_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\Delta_0 \bar{\theta}_{x_i} - \Delta_0 \bar{\theta}_{x_j})/{}^0l \\ (\Delta_0 \bar{\theta}_{y_i} - \Delta_0 \bar{\theta}_{y_j})/{}^0l \\ (\Delta_0 \bar{w}_j - \Delta_0 \bar{w}_i)/{}^0l + ({}^0\bar{u}_j - {}^0\bar{u}_i) \cdot (\Delta_0 \bar{u}_j - \Delta_0 \bar{u}_i)/({}^0l)^2 \\ \quad + ({}^0\bar{v}_j - {}^0\bar{v}_i) \cdot (\Delta_0 \bar{v}_j - \Delta_0 \bar{v}_i)/({}^0l)^2 \\ (\Delta_0 \bar{\theta}_{z_i} - \Delta_0 \bar{\theta}_{z_j})/{}^0l \\ (\Delta_0 \bar{u}_j - \Delta_0 \bar{u}_i)/{}^0l - \Delta_0 \bar{\theta}_{y_i} \cdot (1-\xi)/2 - \Delta_0 \bar{\theta}_{y_j} \cdot (1+\xi)/2 \\ (\Delta_0 \bar{v}_j - \Delta_0 \bar{v}_i)/{}^0l + \Delta_0 \bar{\theta}_{x_i} \cdot (1-\xi)/2 + \Delta_0 \bar{\theta}_{x_j} \cdot (1+\xi)/2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ (\Delta_0 \bar{u}_j - \Delta_0 \bar{u}_i)^2/2({}^0l)^2 + (\Delta_0 \bar{v}_j - \Delta_0 \bar{v}_i)^2/2({}^0l)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta_n \bar{\epsilon}_1^* \\ \Delta_n \bar{\epsilon}_2^* \\ \Delta_n \bar{\epsilon}_3^* \\ \Delta_n \bar{\epsilon}_4^* \\ \Delta_n \bar{\epsilon}_5^* \\ \Delta_n \bar{\epsilon}_6^* \end{Bmatrix} = \quad (1)$$

Fig. 1 Linear beam-column element

Fig. 2 Relations between locations of integration points and plastic hinges

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Delta_n \bar{\theta}_{x_i} - \Delta_n \bar{\theta}_{x_i})/{}^n l \\ (\Delta_n \bar{\theta}_{y_i} - \Delta_n \bar{\theta}_{y_i})/{}^n l \\ (\Delta_n \bar{w}_j - \Delta_n \bar{w}_j)/{}^n l \\ (\Delta_n \bar{\theta}_{z_i} - \Delta_n \bar{\theta}_{z_i})/{}^n l \\ (\Delta_n \bar{u}_j - \Delta_n \bar{u}_i)/{}^n l - \Delta_n \bar{\theta}_{y_i} \cdot (1 - \xi)/2 - \Delta_n \bar{\theta}_{y_j} \cdot (1 + \xi)/2 \\ (\Delta_n \bar{v}_j - \Delta_n \bar{v}_i)/{}^n l + \Delta_n \bar{\theta}_{x_i} \cdot (1 - \xi)/2 + \Delta_n \bar{\theta}_{x_j} \cdot (1 + \xi)/2 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ (\Delta_n \bar{u}_j - \Delta_n \bar{u}_i)^2/2({}^n l)^2 + (\Delta_n \bar{v}_j - \Delta_n \bar{v}_i)^2/2({}^n l)^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (2)$$

(1)式における節点変位増分は、初期の要素座標系を基準としたものであり、(2)式における変位増分は増分ステップ n における要素座標系を参照していることに注意されたい。T. L. F.における一般化ひずみ成分は、初期の長さを基準に算定されており、いわゆる Green ひずみ増分に相当し、U. L. F.における一般化ひずみ成分は、増分ステップ n における要素長を基準としており、Updated Green ひずみ増分に相当する。また、(1)式における $\bar{u}$ および $\bar{v}$ は増分ステップ n における節点変位である。

ひずみ増分を線形項と非線形項に分離し、マトリックス形で表示すると、T. L. F.においては

$$\{\Delta_0 \bar{\epsilon}^*\} = \{\Delta_0 \bar{\epsilon}\} + \{\Delta_0 \bar{\epsilon}'\} \quad (3)$$

$$\{\Delta_0 \bar{\epsilon}\} = [{}^0 \bar{B}_L] \cdot \{\Delta_0 \bar{u}\} \quad (4)$$

$$\{\Delta_0 \bar{u}\} = [{}^0 T] \cdot \{\Delta u\} \quad (5)$$

となり、U. L. F.においては次式を得る。

$$\{\Delta_n \bar{\epsilon}^*\} = \{\Delta_n \bar{\epsilon}\} + \{\Delta_n \bar{\epsilon}'\} \quad (6)$$

$$\{\Delta_n \bar{\epsilon}\} = [{}^n \bar{B}_L] \cdot \{\Delta_n \bar{u}\} \quad (7)$$

$$\{\Delta_n \bar{u}\} = [{}^n T] \cdot [{}^0 T] \cdot \{\Delta u\} \quad (8)$$

ここに、

$$\{\Delta u\}^T = [\Delta u_i, \Delta v_i, \Delta w_i, \Delta \theta_{x_i}, \Delta \theta_{y_i}, \Delta \theta_{z_i}, \Delta u_j, \Delta v_j, \Delta w_j, \Delta \theta_{x_j}, \Delta \theta_{y_j}, \Delta \theta_{z_j}] \quad (9)$$

(8)式における $[{}^0 T]$ は全体座標系から初期の要素座標系への変換マトリックス、 $[{}^n T]$ は初期の要素座標系から増分ステップ n における要素座標系への、節点変位成分の座標変換マトリックスである。 $[{}^0 T]$ は、Fig. 1 に示す参考節点 K を用いて簡単に正確に求められるが、 $[{}^n T]$ を求める際には参考節点 K が利用できず、節点変位成分のみを用いて算定しなければならない。この変換マトリックスの求め方には、2種類の方法が考えられる。すなわち、初期の要素座標系を基準にして増分ステップ n における要素座標系への変換マトリックスを直接算定する方法¹⁰⁾と、次式による逐次算定法である。

$$[{}^n T] = [{}^n T] \cdot [{}^{n-1} T] \cdot [{}^{n-2} T] \cdots [{}^3 T] \cdot [{}^2 T] \cdot [{}^1 T] \quad (10)$$

ここに $[{}^n T]$ は増分ステップ $(n-1)$ における要素座標系から増分ステップ n における要素座標系への変換マトリックスである。

通常は直接算定法が用いられるようであるが、要素回転のあまり大きくない最終耐力解析では使用に耐えても、クラッシュ解析のような超大変形解析においては誤差の累積が大きくなる。よって、本解析では(10)式の逐次算定法を採用することとした。(10)式におけるマトリックス $[{}^n T]$ は、具体的には以下のように計算される。

$$[{}^n T] = \begin{bmatrix} {}^n T^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^n T^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^n T^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^n T^* \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} [{}^n T^*] &= [{}^n T^r] \cdot [{}^n T^\beta] \cdot [{}^n T^\alpha] \\ &= \begin{bmatrix} \cos({}^n \gamma) & \sin({}^n \gamma) & 0 \\ -\sin({}^n \gamma) & \cos({}^n \gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \cos({}^n \beta) & 0 & -\sin({}^n \beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin({}^n \beta) & 0 & \cos({}^n \beta) \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos({}^n \alpha) & \sin({}^n \alpha) \\ 0 & -\sin({}^n \alpha) & \cos({}^n \alpha) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

増分ステップ $(n-1)$ から増分ステップ n の間の、増分ステップ $(n-1)$ における要素座標系を参照した節点変位増分を $\Delta_{n-1} \bar{u}_i$, $\Delta_{n-1} \bar{v}_i$, $\Delta_{n-1} \bar{w}_i$, $\dots$, $\Delta_{n-1} \bar{\theta}_{x_i}$, $\Delta_{n-1} \bar{\theta}_{y_i}$, $\Delta_{n-1} \bar{\theta}_{z_i}$ とすれば、(12)式における $\cos({}^n \alpha)$, $\sin({}^n \beta)$ および ${}^n \gamma$ は次式のように計算される。

$$\begin{aligned} \cos({}^n \alpha) &= {}^{n-1} l + (\Delta_{n-1} \bar{w}_j - \Delta_{n-1} \bar{w}_i) / [({}^{n-1} l \\ &\quad + (\Delta_{n-1} \bar{w}_j - \Delta_{n-1} \bar{w}_i))^2 \\ &\quad + (\Delta_{n-1} \bar{v}_j - \Delta_{n-1} \bar{v}_i)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \sin({}^n \beta) &= (\Delta_{n-1} \bar{u}_j - \Delta_{n-1} \bar{u}_i) / [({}^{n-1} l \\ &\quad + (\Delta_{n-1} \bar{w}_j - \Delta_{n-1} \bar{w}_i))^2 \\ &\quad + (\Delta_{n-1} \bar{v}_j - \Delta_{n-1} \bar{v}_i)^2 \\ &\quad + (\Delta_{n-1} \bar{u}_j - \Delta_{n-1} \bar{u}_i)^2]^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

$${}^n \gamma = (\Delta_{n-1} \bar{\theta}_{z_i} + \Delta_{n-1} \bar{\theta}_{z_j}) / 2 \quad (15)$$

ここに、 ${}^{n-1} l$ は増分ステップ $(n-1)$ における要素長である。

2.3 一般化応力増分と一般化ひずみ増分の関係

一般化応力（以下では適宜単に「応力」と表記する）と一般化ひずみの増分関係式は、T. L. F.では、

$$\{\Delta_0 \bar{R}\} = [D] \cdot \{\Delta_0 \bar{\epsilon}\} \quad (16)$$

U. L. F.では、

$$\{\Delta_n \bar{R}\} = [D] \cdot \{\Delta_n \bar{\epsilon}\} \quad (17)$$

と表わされる。ここに、応力マトリックス $[D]$ は、弾性状態では

$$[D] = [D^e] \quad (18)$$

塑性状態では

$$[D]=[D^p] \quad (19)$$

なる値をとるものとする。

T. L. F.における一般化応力増分は、いわゆる Kirchhoff 応力増分に相当し、U. L. F.における一般化応力増分は、updated Kirchhoff 応力増分に相当する。すなわち、T. L. F. と U. L. F.においては、応力増分、ひずみ増分ともに定義が異なり、したがって必然的に、同一材料に対しても(16)式と(17)式における応力マトリックスは、それぞれの応力およびひずみ成分の定義に対応した異なる値をとる。しかしながら、本研究では、T. L. F.の使用は、変形のあまり大きくない領域における最終耐力評価に限定しており、その場合は、U. L. F.において用いられる応力・ひずみ関係を T. L. F.に転用しても、無視し得る程度の誤差しか生じない。したがって本節では、応力マトリックスは両者に共通のものとして与えている。

弾性状態の応力マトリックス $[D^e]$ の具体形は

$$[D^e] = \begin{bmatrix} EI_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GK & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_x GA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_y GA \end{bmatrix} \quad (20)$$

であり、ここに、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 A は断面積、 K は Saint-Venant のねじり定数、 I_x および I_y は断面 2 次モーメント、 α_x および α_y は有効せん断係数である。また、塑性状態における応力マトリックス $[D^p]$ は塑性ポテンシャルを f として次式で与えられる。

$$[D^p] = [D^e] - \frac{[D^e] \cdot \{\partial f / \partial \bar{R}\} \cdot \{\partial f / \partial \bar{R}\} \cdot [D^e]}{[\partial f / \partial \bar{R}] \cdot [D^e] \cdot \{\partial f / \partial \bar{R}\}} \quad (21)$$

本解析では、降伏関数(すなわち塑性ポテンシャル) f として、平面骨組に対しては(22)式あるいは(23)式、空間骨組に対しては(24)式を用いている。

$$f = (\bar{M}/M_p) + (\bar{R}_3/N_p)^2 - 1 \quad (22)$$

$$f = (\bar{M}/M_p)^2 + (\bar{R}_3/N_p)^2 - 1 \quad (23)$$

$$f = (\bar{R}_1/M_{xp})^2 + (\bar{R}_2/M_{yp})^2 + (\bar{R}_3/N_p)^2 + (\bar{R}_4/M_{zp})^2 - 1 \quad (24)$$

ここで、(22)式あるいは(23)式における $\bar{M}$ は曲げモーメントであり、座標軸の選択により前述の $\bar{R}_1$ あるいは $\bar{R}_2$ に相当する。また、 $\bar{R}_1$ 、 $\bar{R}_2$ 、 $\bar{R}_3$ および $\bar{R}_4$ は、T. L. F.においても U. L. F.においても、考えている増分ステップにおける全応力レベルである。なお、 N_p は降伏軸力、 M_p 、 M_{xp} 、 M_{yp} は全塑性曲げモーメント、 M_{zp} は全塑性ねじりモーメントである。

増分ステップ $(n+1)$ におけるひずみおよび応力は、T. L. F.では、

$$\{\epsilon^{n+1}_0\} = \{\epsilon^n_0\} + \{\Delta \epsilon_0\} \quad (25)$$

$$\{\bar{R}^{n+1}_0\} = \{\bar{R}^n_0\} + \{\Delta \bar{R}_0\} \quad (26)$$

と計算されるが、U. L. F.では、(17)式により計算された

Fig. 3 Definitions of resultant forces of the Jaumann type

updated Kirchhoff 応力増分を Jaumann 微分形(Fig. 3 を参照)に変換する必要がある(一般化応力におけるこの変換は、単に 3 次元のベクトル変換である)。すなわち、

$$\{\epsilon^{n+1}_n\} = \{\epsilon^n_n\} + \{\Delta \epsilon_n\} \quad (27)$$

$$[\Delta \bar{R}'] = [{}^{n+1}A] \{\Delta \bar{R}\} \quad (28)$$

$$\{\bar{R}^{n+1}_n\} = \{\bar{R}^n_n\} + \{\Delta \bar{R}'\} \quad (29)$$

となり、変換マトリックス $[{}^{n+1}A]$ の具体形は次式により与えられる。

$$[{}^{n+1}A] = \begin{bmatrix} {}^{n+1}T_{11}^* & {}^{n+1}T_{12}^* & 0 & {}^{n+1}T_{13}^* & 0 & 0 \\ {}^{n+1}T_{21}^* & {}^{n+1}T_{22}^* & 0 & {}^{n+1}T_{23}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{n+1}T_{33}^* & 0 & {}^{n+1}T_{31}^* & {}^{n+1}T_{32}^* \\ {}^{n+1}T_{31}^* & {}^{n+1}T_{32}^* & 0 & {}^{n+1}T_{33}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & {}^{n+1}T_{13}^* & 0 & {}^{n+1}T_{11}^* & {}^{n+1}T_{12}^* \\ 0 & 0 & {}^{n+1}T_{23}^* & 0 & {}^{n+1}T_{21}^* & {}^{n+1}T_{22}^* \end{bmatrix} \quad (30)$$

ここに、 ${}^{n+1}T_{ij}^*$ は(12)式におけるマトリックス $[{}^{n+1}T^*]$ の $(i$ 行、 j 列)成分である。

2.4 増分形仮想仕事式

本節では、増分ステップ n を基準として増分ステップ $(n+1)$ に対する増分形仮想仕事式を記述し、すでに説明した諸関係式を用いて、増分形の要素剛性方程式を誘導する。

各要素に対する仮想仕事式は、T. L. F.では、

$$\int_{o_l} [{}^{n+1}\bar{R}] [\delta {}^{n+1}\bar{\epsilon}^*] dl = {}^{n+1}\Gamma \quad (31)$$

U. L. F.では、

$$\int_{n_l} [{}^{n+1}\bar{R}] [\delta {}^{n+1}\bar{\epsilon}^*] dl = {}^{n+1}\Gamma \quad (32)$$

と表現される。ここに、 δ は変分を意味し、 ${}^{n+1}\Gamma$ は増分ステップ($n+1$)における外力のなす仮想仕事である。

T. L. F.においては、(31)式、(3)式、(25)式および(26)式を代入して、次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{o_l} [\Delta_0 \bar{R}] [\delta \Delta_0 \bar{\epsilon}] dl + \int_{o_l} [\bar{S} \bar{R}] [\delta \Delta_0 \bar{\epsilon}] dl = \\ {}^{n+1}\Gamma - \int_{n_l} [\bar{S} \bar{R}] [\delta \Delta_0 \bar{\epsilon}] dl \end{aligned} \quad (33)$$

また、U. L. F.においては、updated Kirchhoff 応力増分および updated Green ひずみ増分に相当する諸量による次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{n_l} [\Delta_n \bar{R}] [\delta \Delta_n \bar{\epsilon}] dl + \int_{n_l} [\bar{R}] [\delta \Delta_n \bar{\epsilon}] dl = \\ {}^{n+1}\Gamma - \int_{n_l} [\bar{R}] [\delta \Delta_n \bar{\epsilon}] dl \end{aligned} \quad (34)$$

上記の両仮想仕事式とも区分的線形化の概念に基づいており、これに起因する誤差は、Newton-Raphson 反復計算により適宜補正する。

(33)式に、(4)式、(5)式および(16)式を代入すると、T. L. F.における次式の増分形要素剛性方程式を得る。

$$([\bar{K}_L] + [\bar{K}_{NL}]) \cdot \{\Delta u\} = \{{}^{n+1}E\} - \{{}^n F\} \quad (35)$$

ここに、 $\{{}^{n+1}E\}$ は増分ステップ($n+1$)における節点外力ベクトルであり、 $[\bar{K}_L]$ 、 $[\bar{K}_{NL}]$ および $\{{}^n F\}$ は次式のように計算される。

$$[\bar{K}_L] = \int_{o_l} [{}^0 T]^T \cdot [\bar{B}_L]^T \cdot [D] \cdot [\bar{B}_L] \cdot [{}^0 T] dl \quad (36)$$

$$[\bar{K}_{NL}] = \int_{o_l} [{}^0 T]^T \cdot [\bar{B}_{NL}]^T \cdot [\bar{S}] \cdot [\bar{B}_{NL}] \cdot [{}^0 T] dl \quad (37)$$

$$\{{}^n F\} = \int_{o_l} [{}^0 T]^T \cdot [\bar{B}_L]^T \cdot \{{}^n \bar{R}\} dl \quad (38)$$

また、U. L. F.では、(34)式に(7)式、(8)式および(17)式を代入することにより、次式の増分形要素剛性方程式を得る。

$$([\bar{K}_L] + [\bar{K}_{NL}]) \cdot \{\Delta u\} = \{{}^{n+1}E\} - \{{}^n F\} \quad (39)$$

ここに、

$$[\bar{K}_L] = \int_{n_l} [{}^u T]^T \cdot [{}^0 T]^T \cdot [\bar{B}_L]^T \cdot [D] \cdot [\bar{B}_L] \cdot [{}^0 T] \cdot [{}^u T] dl \quad (40)$$

$$[\bar{K}_{NL}] = \int_{n_l} [{}^u T]^T \cdot [{}^0 T]^T \cdot [\bar{B}_{NL}]^T \cdot [\bar{S}] \cdot [\bar{B}_{NL}] \cdot [{}^0 T] \cdot [{}^u T] dl \quad (41)$$

$$\{{}^n F\} = \int_{n_l} [{}^u T]^T \cdot [{}^0 T]^T \cdot [\bar{B}_L]^T \cdot \{{}^n \bar{R}\} dl \quad (42)$$

一般化応力を用いた解析では部材断面積の変化を把握する

ことはできない。また、数値実験の結果、要素長の変化もほとんど生じないため、U. L. F.における積分領域として、 ${}^0 l$ または ${}^n l$ のいずれを用いても解析結果に大きな影響は現れない。

なお、上式中における $[\bar{B}_{NL}]$ 、 $[\bar{S}]$ 、 $[\bar{B}_{NL}]$ および $[\bar{S}]$ の具体形は以下のとおりである。

$$[\bar{B}_{NL}] = \begin{bmatrix} -1/{}^0 l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/{}^0 l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/{}^0 l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/{}^0 l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} {}^0 \bar{R}_3 & 0 \\ 0 & {}^0 \bar{R}_3 \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$[\bar{B}_{NL}] = \begin{bmatrix} -1/{}^n l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/{}^n l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/{}^n l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/{}^n l & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$[\bar{S}] = \begin{bmatrix} {}^n \bar{R}_3 & 0 \\ 0 & {}^n \bar{R}_3 \end{bmatrix} \quad (46)$$

3. Total Lagrangian Formulation による解析例

本章では、T. L. F.による2、3の数値例を示す。前章の定式化からも明かなように、T. L. F.では、要素座標系の更新、応力変換、積分領域の変更などが不要であるため、T. L. F.に基づく解析は、過度に大きな回転あるいはひずみを伴わない最終耐力問題には好都合である。

いずれの解析例においても、完全弾塑性材料を仮定し、降伏関数として、平面骨組に対しては(22)式、立体骨組に対しては(24)式を用いた。他の解析例と比較するため、3.1節の平面骨組および3.2節の空間骨組の解析例では、微小変形を仮定し、有限変形項を省いて計算した。

要素分割はいずれも等分割であるが、荷重点および部材端部に塑性関節が発生し得るように、積分点の位置を制御した(2.1節の記述を参照)。この点に関しては、続く4章の解析例でも、同様な処理を施している。

3.1 集中荷重を受ける門形フレームの塑性崩壊

中央集中荷重を受ける門形フレームの塑性崩壊挙動(微

Fig. 4 Plastic collapse of a portal frame subjected to a concentrated loading

小変形を仮定)の解析結果を, Fig. 4 に示す。材料定数として, ヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, ポアソン比 $\nu=0.3$, 降伏応力 $\sigma_v=30 \text{ kg/mm}^2$ を仮定した。部材長は $L=1000 \text{ mm}$ であり, 全塑性モーメント, 塑性軸力としてそれぞれ $M_{vp}=3.0 \times 10^7 \text{ kg}\cdot\text{mm}$, $N_p=6.0 \times 10^5 \text{ kg}$ と仮定した。この解析結果から, 粗い要素分割でも, 塑性関節の発生位置が正しく考慮されている限り, 塑性崩壊荷重は正確に算定されることが確認される。

3.2 繰り返し荷重を受ける門形フレームの漸増崩壊

繰り返し荷重を受ける門形フレームの漸増崩壊挙動の解析結果を, Fig. 5 に示す。荷重は鉛直荷重 V および水平荷重 H より成り, $H=V$ の場合の塑性崩壊荷重を P_p として, Table 1 に示すような順序で H および V を繰り返し載荷した。材料定数は前節と同様であり, 部材長として $L=250 \text{ mm}$, 全塑性モーメント, 塑性軸力としてそれぞれ, $M_{vp}=5000 \text{ kg}\cdot\text{mm}$, $N_p=2356.2 \text{ kg}$ を仮定した。各部材を 8 要素に等分割して得た解析結果は, 文献 7) の解析結果と弾性領域の勾配において若干の相違があるが, これは要素数不足に起因する。なお, 図中の δ_H は荷重 H の作用点における水平変位である。

Fig. 5 Incremental collapse of a portal frame under repeated loading

Table 1 Loading sequence for a portal frame

	H / P_p	V / P_p
1	0.97	0.97
2	0	0
3	0.97	0
4	0	0
5	0.97	0.97
6	0	0
7	0.97	0
8	0	0

3.3 水平荷重を受ける立体骨組の塑性崩壊

水平荷重を受ける立体骨組の塑性崩壊挙動の解析結果を Fig. 6 に示す。諸定数として, ヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, ポアソン比 $\nu=0.3$, $EI_x=EI_y=9.08 \times 10^9 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$, $GK=6.98 \times 10^9 \text{ kg}\cdot\text{mm}^2$, $M_{xp}=M_{yp}=6.43 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{mm}$, $M_{zp}=5.04 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{mm}$ を仮定した。部材長はすべて $L=710 \text{ mm}$ であり, 各部材を 5 要素に等分割した。文献 7) では, 次式を降伏関数として用いており, Fig. 6 に見られる崩壊荷重の若干の相違はこの点に起因する。

$$f = (\bar{R}_1/M_{xp})^2 + (\bar{R}_2/M_{yp})^2 + (\bar{R}_4/M_{zp})^2 - 1 \quad (47)$$

なお, 図中の δ は荷重点における荷重方向の変位である。

3.4 繰り返し荷重を受ける帯板の弾塑性有限変形解析

繰り返し集中荷重を受ける帯板の弾塑性有限変形解析結果を Fig. 7 に示す。材料定数として, ヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$, 降伏応力 $\sigma_v=63.0 \text{ kg/mm}^2$ であり, 部材寸法は $L=200 \text{ mm}$, 断面の幅 $b=20 \text{ mm}$, 厚み $t=4 \text{ mm}$ である。1/2 スパンを 5 要素に等分割して解析した結果は, Fig. 7 に示すように, 他の解析結果および実験結果とほぼ良好に対応している。なお, 図中の δ は荷重点のたわみ, P_p は全塑性軸力である。

Fig. 6 Plastic collapse of a space frame subjected to a horizontal loading

Fig. 7 Elasto-plastic, large-deformation analysis of a fixed strip bar under repeated loading

4. Updated Lagrangian Formulation

による解析例

本章では、2章に示した増分理論のもう一方の定式化 U. L. F. による 2, 3 の数値例を示す。

4.1 軸圧縮荷重を受ける柱の座屈後挙動

定式化の妥当性を確認するため、弾性および完全塑性体材料を仮定し、軸圧縮荷重を受ける柱の座屈後挙動を解析した。

弾性柱の座屈後大変形問題はエラスティカ問題として知られており、厳密解が知られている⁹⁾。ヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、柱長 $L=950 \text{ mm}$ 、直径 $D=20 \text{ mm}$ の丸棒に対する解析結果 (20 要素等分割) を、厳密解と比較して Fig. 8 に示す。図中、 P_{cr} は弾性座屈荷重 (Euler load) である。本数値解は厳密解とほぼ完全に一致しており、前章に示した応力変換を含む超大変形解析アルゴリズムが検証された。

さらに弾塑性解析アルゴリズムを検証するために、文献 9) において繰り返し荷重による座屈試験の行なわれた矩形断面・供試体 1 本について、弾塑性座屈解析を行い、文献 9) による実験結果および簡易解析解と比較した。材料定数は、ヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ 、降伏応力 $\sigma_y=29.75 \text{ kg/mm}^2$ であり、供試体寸法は、柱長 $L=1000 \text{ mm}$ 、断面幅 $B=45.8 \text{ mm}$ 、深さ $H=36.95 \text{ mm}$ である。初期たわみとしては、 $W_0=0.02H$ を仮定した。

文献 9) においては、降伏後の接線係数として $E_t=0.0125E$ が仮定されているが、本解析 (10 要素等分割) では完全塑性体材料を仮定した。本解析結果は、Fig. 9 に示すように、文献 9) における簡易解析解とほぼ完全に一致して

(a) deformed configuration (b) load-deflection curve

Fig. 8 Elastic post-buckling of an axially compressed column

いる。これは、この簡易解析解が、弾性理論解と塑性関節の概念を用いた剛塑性理論解の結合であることを考えれば、当然の帰結であろう。

4.2 曲がりよりのエラスティカ

空間骨組構造解析においては、3次元の変形における固有の変形因子であるねじり変形に対する解の検証が重要である。自由端に集中荷重を受ける片持ち曲りよりのエラスティカ問題に対する解析結果 (10 要素等分割) を、Fig. 10 で他の数値解¹⁰⁾と比較した。極めて良好な結果が得られていることがわかる。

4.3 空間骨組のクラッシュ解析

Fig. 11(a) に示すような、鉛直方向から若干傾斜した集

(a) column under repeated loading

(b) load-deflection curve

Fig. 9 Elasto-plastic buckling of a column under repeated loading

(a) deformed configuration

(b) load-deflection curve

Fig. 10 Elastic large-deformation analysis of a curved beam

(a) space frame under a concentrated loading

(b) load-deflection curve with a sequence of plastic hinge formations

(c) load-deflection curve with deformed configurations

Fig. 11 Crush analysis of a space frame subjected to a concentrated loading

中荷重を受ける立体骨組のクラッシュ解析結果を Fig. 11 (b) および 11 (c) に示す。図中の δ は荷重 P の作用点における荷重方向の変位である。完全塑性体材料を仮定し、降伏関数としては (24) 式を用いた。材料定数は、ヤング率 $E=2.1 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$ 、ポアソン比 $\nu=0.25$ 、降伏応力 $\sigma_y=30 \text{ kg/mm}^2$ であり、部材すべて、長さ 300 mm、外径 21.7 mm、厚さ 3.7 mm の円筒パイプである。

Fig. 11 (b) および 11 (c) はいずれも、荷重・変位曲線であるが、荷重方向変位 δ のオーダが大きく異なることに注意されたい。Fig. 11 (b) は、最高荷重に至る前後の塑性関節の発生状況を示しており、Fig. 11 (c) は、最終耐力後の超大変形を伴う転倒過程を示している。

本解析結果は、定性的には妥当と思われるが、この種のクラッシュ問題に対する実験結果との定量的な比較は、次報以降で行ないたい。

5. 結 言

本研究は、剛体・ばねモデルと等価な低次元有限梁柱要素モデルによる効率的な空間骨組構造の崩壊解析コードの開発とその検証を目的としており、本論文では、一般化応力表示による Total Lagrangian Formulation および Updated Lagrangian Formulation の詳細、およびその検証のためのいくつかの数値例を示した。本論文の成果を要約すると、以下のとおりである。

(1) 一般化応力表示による Total Lagrangian Formulation により、線形チモシェンコはり要素を一般の 3 次元弾塑性有限変形問題に拡張した。2, 3 の数値例により、本手法が過度の要素回転を伴わない最終耐力問題において効率的であることが確認された。特に、積分点位置の変更による塑性関節発生位置の制御は、粗い要素分割による解析において効果的である。

(2) 同じく一般化応力表示による、Updated Lagrangian Formulation により、線形チモシェンコはり要素を 3 次元クラッシュ問題に拡張した。2, 3 の数値例を通じ、効率的かつ合理的なクラッシュ・シミュレーションを行なえる見とおしを得たが、ひずみ硬化あるいは局部座屈などの考慮、また、空間骨組構造のクラッシュ解析結果の実験的検証などについては、次報以降で述べたい。

参 考 文 献

- 1) T. J. R. Hughes et al: A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 11, (1977), 1529.
- 2) 川井忠彦, 陳 長鈕: A Discrete Element Analysis of Beam Bending Problems Including the Effects of Shear Deformation, 生産研究, 第 30 巻, 第 5 号, (1978), 165.
- 3) 都井 裕: 骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析, 日本造船学会論文集, 第 147 号, (1980), 329.
- 4) K. Washizu: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd Ed., Pergamon Press, (1982).
- 5) K. J. Bathe: Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice-Hall, (1982).
- 6) 山田嘉明: 塑性・粘弾性, 培風館, (1980).
- 7) 成岡昌夫, 服部 正, 加藤 進, 後藤 茂夫, 上田 幸雄: 骨組構造解析, 培風館, (1970).
- 8) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd Ed., McGraw-Hill, (1961).
- 9) 藤田 譲, 野本敏治, 弓削和徳: 圧縮および引張荷重を受ける構造要素の変形挙動 (第一報: 繰返し荷重を受ける柱の変形挙動), 日本造船学会論文集, 第 156 号, (1984), 346.
- 10) K. Bathe and S. Bolourchi: Large Displacement Analysis of Three-dimensional Beam Structures, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 14, (1979), 961.