高次要素を用いた 3 次元スロッシング問題の 境界要素解析

正員 井 関 俊 夫* 正員 新 開 明 二**
正員 中 武 一 明**

Boundary Element Analysis of 3-Dimensional Sloshing Problems by Using Cubic Spline Element

by Toshio Iseki, *Member* Akiji Shinkai, *Member*
Kuniharu Nakatake, *Member*

Summary

The boundary element method is extended to simulate the non-linear sloshing of liquid in a three dimensional tank. In the proposed method, higher-order element (cubic spline element) is employed for discretization of the boundary integral equation in order to improve the accuracy of numerical solutions. And, the perturbation method is introduced for the purpose of saving the computing time. The details of the boundary element technique are described in reference to formations of cubic spline element.

Several numerical examples are presented for liquid-sloshing in prismatic and spherical tanks subjected to forced oscillations, and are compared with the experimental results, furthermore, the usefulness of the proposed method is discussed.

1. 結 言

自由表面を有するタンク内液体の非定常な流動を取り扱うスロッシング問題は、その液体の流動に対してポテンシャル流れを仮定した場合、自由表面とタンク壁における境界条件および適当な初期条件のもとに Laplace の式を解く初期値境界値問題に帰着される。このような問題に対して、境界上の物理量のみに着目する境界要素法は有力な解析手段となる。

一般に、境界要素法の解析では、解析の対象となる偏微分方程式系を境界積分方程式に変換し、この積分方程式を有限要素法的な離散化手法を使って連立 1 次方程式に直して解くことになる。離散化にあたり一定要素あるいは線形要素が用いられることが多いが、これらの要素を用いた解析では、離散化誤差を防ぐ意味から、解析の対象となる現象に応じて十分な要素分割数が必要となり、計算効率が低下することがある。また、3 次元問題に対する解析では数式が複雑となり、なおかつ取り扱う変数の数が膨大となるため、実際の計算はスーパーコンピュータを用いてもか

りの計算時間を要することがある。

先年著者は、高次要素 (3 次スプライン要素) を用いた境界要素法を 2 次元スロッシング問題に適用し、タンク内液体の非線形流動を解析する数値計算法を提示した¹⁾。この手法を用いて行った種々のシミュレーション数値計算結果によれば、線形要素を用いた境界要素法に比べて計算時間の短縮の効果が大きいということとともに、タンク壁を駆け登る自由表面の波崩れ直前まで安定した解を得ることができるという結論を得た。本報ではこの 3 次スプライン要素を 3 次元問題解析のための境界要素に拡張し、摂動展開法^{2,3)}を応用した効率的な計算手法を提示する。

数値計算例として、規則的な左右揺および前後揺をする角形タンクならびに球形タンク内の液体スロッシングのシミュレーション結果を示し、角形タンクについては、模型実験結果と比較検討する。

2. 3 次元スロッシング問題の基礎式

Fig. 1 に示すような 3 次元タンク内液体 (以下流体) のスロッシング問題を考える。流体領域を V 、自由表面を S_F 、タンク内壁が S_W とする。タンクは空間に対し並進運動速度 $\vec{U}$ および角速度 $\vec{\Omega}$ の運動をしているものとする。ここに、空間に固定された座標系を $O-XYZ$ 、タンクに固定さ

* 東京商船大学

** 九州大学工学部

Fig. 1 Co-ordinate systems

れた座標系を $o-xyz$ と定義する。

タンク内流体は非粘性、非圧縮であり、流体運動は空間固定座標系からみて渦無し流れであると仮定する。またタンクは剛であると仮定すればスロッシング問題の基礎式が次のように与えられる⁴⁾。

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{in } V \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{|\nabla \Phi|^2}{2} + \vec{\Omega} \cdot (\vec{r} \times \nabla \Phi) - \vec{U} \cdot \vec{r} - gZ_T \quad \text{on } S_F \quad (2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\vec{q} \cdot \nabla (h - z) \quad \text{on } S_F \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \vec{n} \cdot (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad \text{on } S_W \quad (4)$$

ここに、 Φ は速度ポテンシャル、 $\vec{U} = d\vec{U}/dt$ 、 $\vec{r}$ は動座標系 $o-xyz$ に相対的な流体粒子の位置ベクトル、 $\vec{q}$ は動座標系 $o-xyz$ に対する相対速度、 g は重力加速度、 h は自由表面隆起量、 Z_T は空間固定座標系から見た自由表面上流体粒子の初期静水面からの Z 軸方向変位を表す。また、流体より外向きの法線ベクトルを $\vec{n}$ として、その法線方向微分を $\partial/\partial n$ とする。

したがって、3次元タンク内流体のスロッシング問題は Laplace 方程式(1)を境界条件(2)~(4)のもとに、適当な初期条件を与えて解く初期値境界値問題に帰着される。

3. 境界要素解析法

3次元スロッシング問題を境界要素法によって解く場合の基礎となる式は境界積分方程式である。

境界積分方程式を解くために、境界 S を N_e 個の要素に分割する。領域 V は3次元であるので、要素は領域外表面の一部であり、四角形要素からなるものとする。これらの要素を記述するために、Fig. 2 に示すように全体の座標系 $o-xyz$ から境界上で定義される局所座標系 $o-\xi_1 \xi_2 \eta$ への変換を考える。この座標交換と境界の要素分割により境界積分方程式は次のように書き表すことができる。

$$c_i \Phi_i = \sum_{j=1}^{N_e} \oint_{S_j} q \Phi^* |\vec{N}| d\xi_1 d\xi_2$$

Fig. 2 Co-ordinate for a boundary element

Fig. 3 Cubic spline element

$$-\sum_{j=1}^{N_e} \oint_{S_j} \Phi q^* |\vec{N}| d\xi_1 d\xi_2 \quad (5)$$

ただし、

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|}$$

$$\vec{N} = (n_1, n_2, n_3)$$

$$|\vec{N}| = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2}, \quad n_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial z}{\partial \xi_2} - \frac{\partial z}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \right)$$

$$n_2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} - \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial z}{\partial \xi_2} \right), \quad n_3 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi_1} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} - \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \right)$$

境界要素上での速度ポテンシャル、その流束等の値の変化は、一般に一定、線形、2次等のように任意の次数の内挿関数によって表すことができる。本報では双3次のスプライン関数を内挿関数とする、いわゆる3次元の3次スプライン要素を採用することとし、計算の高精度化および高効率化を計る(付録A参照)。

Fig. 3 に示すように、境界要素に沿って定義される無次元座標 $o-\xi_1 \xi_2$ ($-1 < \xi_1 < 1$, $-1 < \xi_2 < 1$) を導入すれば、要

素上の関数値 $f(\xi_1, \xi_2)$ (速度ポテンシャル Φ , その流束 q などの一般表示形) は, 次のような双3次スプライン補間式で表される。

$$\begin{aligned} f(\xi_1, \xi_2) = & B_{11}f_1 + B_{12}\frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} + B_{13}\frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} + B_{14}\frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ & + B_{21}f_2 + B_{22}\frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} + B_{23}\frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} + B_{24}\frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ & + B_{31}f_3 + B_{32}\frac{\partial f_3}{\partial \xi_1} + B_{33}\frac{\partial f_3}{\partial \xi_2} + B_{34}\frac{\partial^2 f_3}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \\ & + B_{41}f_4 + B_{42}\frac{\partial f_4}{\partial \xi_1} + B_{43}\frac{\partial f_4}{\partial \xi_2} + B_{44}\frac{\partial^2 f_4}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \end{aligned} \quad (6)$$

ただし,

$$\begin{aligned} B_{11} &= A_1(\xi_1)A_1(\xi_2), & B_{12} &= A_2(\xi_1)A_2(\xi_2) \\ B_{13} &= A_1(\xi_1)A_2(\xi_2), & B_{14} &= A_2(\xi_1)A_2(\xi_2) \\ B_{21} &= A_3(\xi_1)A_1(\xi_2), & B_{22} &= A_4(\xi_1)A_1(\xi_2) \\ B_{23} &= A_3(\xi_1)A_2(\xi_2), & B_{24} &= A_4(\xi_1)A_2(\xi_2) \\ B_{31} &= A_3(\xi_1)A_3(\xi_2), & B_{32} &= A_4(\xi_1)A_1(\xi_2) \\ B_{33} &= A_3(\xi_1)A_4(\xi_2), & B_{34} &= A_4(\xi_1)A_4(\xi_2) \\ B_{41} &= A_1(\xi_1)A_3(\xi_2), & B_{42} &= A_2(\xi_1)A_3(\xi_2) \\ B_{43} &= A_1(\xi_1)A_4(\xi_2), & B_{44} &= A_2(\xi_1)A_4(\xi_2) \end{aligned}$$

$$A_1(\xi_n) = \frac{1}{4}(1 - \xi_n)^2(\xi_n + 2)$$

$$A_2(\xi_n) = \frac{1}{4}(1 - \xi_n)^2(\xi_n + 1)$$

$$A_3(\xi_n) = \frac{1}{4}(1 + \xi_n)^2(2 - \xi_n)$$

$$A_4(\xi_n) = \frac{1}{4}(1 + \xi_n)^2(\xi_n - 1)$$

$$(n=1, 2)$$

ここに, f_1, f_2, f_3 および f_4 は4角形要素の隅点の位置における関数値を意味する。また, この4つの関数値について, $\partial f_1/\partial \xi_1, \partial f_2/\partial \xi_1, \partial f_3/\partial \xi_1, \partial f_4/\partial \xi_1$ および $\partial f_1/\partial \xi_2, \partial f_2/\partial \xi_2, \partial f_3/\partial \xi_2, \partial f_4/\partial \xi_2$ はそれぞれ ξ_1 および ξ_2 に対する1次導関数の値を表し, $\partial^2 f_1/\partial \xi_1 \partial \xi_2, \partial^2 f_2/\partial \xi_1 \partial \xi_2, \partial^2 f_3/\partial \xi_1 \partial \xi_2, \partial^2 f_4/\partial \xi_1 \partial \xi_2$ は2次導関数の値を表す。

有限個の各境界要素ごとに, (6)を適用し, 積分方程式(5)を離散化すれば, 要素の隅点から構成される全節点について次式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_n} \left(H_{ij}^0 \Phi_j + H_{ij}^1 \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_1} + H_{ij}^2 \frac{\partial \Phi_j}{\partial \xi_2} + H_{ij}^3 \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) \\ = \sum_{j=1}^{N_n} \left(G_{ij}^1 q_j + G_{ij}^2 \frac{\partial q_j}{\partial \xi_2} + G_{ij}^3 \frac{\partial q_j}{\partial \xi_2} + G_{ij}^4 \frac{\partial^2 q_j}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし,

$$H_{ij}^n = \begin{cases} \sum_{m=1}^4 h_{ij}^{mn} & (i \neq j) \\ \sum_{m=1}^4 h_{ij}^{mn} + c_i & (i = j) \end{cases} \quad (8)$$

$$H_{ij}^n = \sum_{m=1}^4 h_{ij}^{mn} : n=2 \sim 4, \quad G_{ij}^n = \sum_{m=1}^4 g_{ij}^{mn} : n=1 \sim 4 \quad (9)$$

$$h_{ij}^{mn} = \oint_{-1}^1 \oint_{-1}^1 B_{mn} q^* |\vec{N}| d\xi_1 d\xi_2$$

$$\begin{aligned} g_{ij}^{mn} &= \oint_{-1}^1 \oint_{-1}^1 B_{mn} \Phi^* |\vec{N}| d\xi_1 d\xi_2 \\ &: m=1 \sim 4, \quad n=1 \sim 4 \end{aligned} \quad (10)$$

ここに, $\Phi_j, \partial \Phi_j/\partial \xi_1, \partial \Phi_j/\partial \xi_2$ および $\partial^2 \Phi_j/\partial \xi_1 \partial \xi_2$ は節点 j における速度ポテンシャル, 速度ポテンシャルの1次導関数および2次導関数のそれぞれの値である。また, $q_j, \partial q_j/\partial \xi_1, \partial q_j/\partial \xi_2$ および $\partial^2 q_j/\partial \xi_1 \partial \xi_2$ は節点 j における流束, 流束の1次導関数および2次導関数のそれぞれの値である。 h_{ij}^{mn} ならびに g_{ij}^{mn} を算定するための積分は数値的に行われる。

領域全体において速度ポテンシャルが一定, 即ち一様なポテンシャルを全境界に加えた場合, 境界上の $\partial \Phi/\partial n$ の値が0になるということから, (7)に基づき対角上の係数値 H_{ii}^n は非対角要素 $H_{ij}^n [i \neq j]$ を用いて次式のように与えられる。

$$H_{ii}^1 = - \sum_{i \neq j} H_{ij}^1 \quad (11)$$

対角要素 H_{ii}^1 の中に c_i が含まれるので, 上式から c_i を求めることができる。

初期条件あるいは境界条件に基づいて, 自由表面上の N_F 個の節点においては速度ポテンシャルを与え, またタンク壁上の N_W 個の節点においては流束とその1次導関数および2次導関数を与えるものとすれば, N_n 個 (ただし, $N_n = N_F + N_W$) の連立方程式(7)の中の未知数は $(4N_n + 3N_F)$ 個となる。したがって $(3N_n + 3N_F)$ 個の方程式が不足するので, 3次スプライン関数の連続性の条件を用いて(7)の中の未知数を減らし, 係数マトリックスを圧縮する方法を考える。

境界の形状が平面あるいは球面のように曲率一定であり, なおかつ要素の寸法がすべて等しい場合, 3次スプライン関数の連続性の条件は次式となる。

$$\frac{\partial f_{j-1}}{\partial s} + 4 \frac{\partial f_j}{\partial s} + \frac{\partial f_{j+1}}{\partial s} = \frac{3}{l}(f_{j+1} - f_{j-1}) : j=2 \sim N-1 \quad (12)$$

ただし, l は ξ_1 方向あるいは ξ_2 方向の要素の長さを表し, s は ξ_1 あるいは ξ_2 を表す。また, ここでの節点番号 j は ξ_1 方向あるいは ξ_2 方向に任意に連続して並ぶ節点について付けられた便宜的な番号とする。

(12)をマトリックス表示すると以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 \\ & & & & & & & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_{n-1} \\ P_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_j \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix} \quad (13)$$

ただし,

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\partial f_2}{\partial s}, \quad d_1 = -\frac{\partial f_1}{\partial s} + \frac{3}{l}(f_3 - f_1) \\ P_j &= \frac{\partial f_{j+1}}{\partial s}, \quad d_j = \frac{3}{l}(f_{j+2} - f_j) \quad : j=2 \sim n-1 \\ P_n &= \frac{\partial f_{N-1}}{\partial s}, \quad d_n = -\frac{\partial f_N}{\partial s} + \frac{3}{l}(f_N - f_{N-2}) \\ n &= N-2 \end{aligned}$$

この連立1次方程式は Tri-diagonal-algorithm を用いて解くことが可能であり, 解は次式で与えられる。

$$P_j = (-1)^j \sum_{k=1}^n \kappa_k^j \cdot d_k \quad (14)$$

ただし,

$$\begin{aligned} \kappa_k^j &= \begin{cases} \lambda_k^j & (1 \leq k \leq j) \\ \mu_k^j & (j+1 \leq k \leq n) \end{cases} \\ \lambda_k^j &= (-1)^k \sum_{m=1}^{n-j+1} \delta_k^{j+m-1} \cdot \delta_j^{j+m-2} \\ \mu_k^j &= (-1)^k \sum_{m=1}^{n-k+1} \delta_k^{j-m} \cdot \delta_k^{j-m+1} \\ \delta_k^j &= \begin{cases} \rho_j \prod_{m=1}^{k-1} \beta_m & (1 \leq j \leq n) \\ 1 & (j > n) \end{cases} \\ \rho_j &= \prod_{k=1}^j \frac{1}{\beta_k} \\ \beta_1 &= 4, \quad \beta_j = 4 - \frac{1}{\beta_{j-1}} \end{aligned}$$

この解から得られる $\partial f / \partial s$ と f の関係を用いて(7)中の未知数の数を減らすことができ, $h_{10}^2, h_{10}^3, h_{10}^4$ および $g_{10}^2, g_{10}^3, g_{10}^4$ の係数を消去することによりマトリックスの圧縮が完了する。なお, この圧縮されたマトリックスのサイズは, 線形要素を用いた場合の係数マトリックスのサイズと同じとなる。

実際の計算手順は次の通りである。任意の時刻 t について成立する N_n 元の連立1次方程式を解き, 境界上の各節点における速度ポテンシャルとその1次および2次導関数あるいは流束とその1次および2次導関数が求まれば, これらの解の値を(2)に代入し, 自由表面上節点位置の速度ポテンシャルの時間増分を求め, 次の時刻 $t + \Delta t$ (Δt : 時間間隔)における値を計算できる。同様に, これらの解の値を(3)に代入し, 自由表面隆起量の時間増分を求め, 次の時刻 $t + \Delta t$ における値を計算できる。同じ手順を繰り返すことにより逐次各時刻における値を計算できる。

自由表面 S_F は時間とともに変動するので, 境界要素上の積分(10)の計算を各時間ステップごとに行う必要があり, 計算量が膨大となる。そこで実際の計算では, 計算時間の短縮を計るために摂動展開法を導入し^{2,3)}, 2次の非線形解までを求めることにした。

4. 数値計算例および考察

角形タンクおよび球形タンクが, 静止状態から規則的な前後揺および左右揺を受ける場合について数値シミュレ-

ーション計算を行った。なお, 角形タンクについては模型実験を行い, 数値計算結果の有効性を検証した。

実験に用いた角形タンクの内部の寸法は, 長さ 300 mm, 幅 200 mm, 深さ 400 mm であり, 板厚 10 mm および 5 mm のアクリル平板を用いて制作した。加振条件として, 前後揺および左右揺の振幅を 0.005 m とし, それぞれの周期および位相を種々変化させるものとした。なお, タンクの長さ方向の1次の固有周期は 0.70 秒, 幅方向の1次の固有周期は 0.53 秒である。

数値計算における要素分割数は, タンクの長さ方向に12分割, 幅方向に8分割, 深さ方向に4分割としており, 全要素数は352, 全節点数は2重節点および3重節点を含めて454となる。また, 時間間隔はいずれも, $\Delta t = 0.01$ 秒として計算している。

Fig.4 および Fig.5 に, 前後揺の加振周期および左右揺の加振周期を長さ方向の1次のスロッピング固有周期 $T = 0.70$ 秒とした場合の模型実験結果および数値計算結果を示す。なお, 前後揺については位相を 90° 遅らせている。Fig.4 には, 模型実験において撮影した写真から読み取った自由表面隆起量と数値計算によって得られた自由表面隆起量の時刻歴との比較を示している。なお, 数値計算結果については線形解および2次の非線形解をそれぞれ破線および実線により示している。本計算法による2次の非線形解は模型実験結果とよく一致している。また, 2次の非線形解の谷の部分で生じている小さな山は, 模型実験では観察されない現象であり, 数値計算においてさらに高次の項を考慮すれば無くなるものと考えられる。Fig.5 には, 加振開始後 1.77 秒および 2.87 秒経過時の自由表面形状を比較したものを示している。模型実験の加振開始直後においては,

Fig. 4 Time histories of free surface elevation ($L=0.3$ m, $B=0.2$ m, $d=0.1$ m, $T=0.7$ sec)

Fig. 5 Comparisons of free surface configurations [surge+sway] ($L=0.3$ m, $B=0.2$ m, $d=0.1$ m, $T=0.7$ sec)

$R=5.0\text{ (m)}, R_p=0.5\text{ (m)}, 50\% \text{ depth}$
 NO. OF ELEMENTS: 324
 NO. OF NODES: 360

Fig. 6 Boundary element mesh

動揺台およびタンク内液体の慣性の影響のために、サーボモータが定常回転に達するまでには僅かに時間を要する傾向がある。したがって、模型実験の計測時刻よりも早い時刻における数値計算結果を参考のために合わせて示している。図からわかるように、 $t=1.77$ 秒における模型実験の結果と数値計算結果はよい一致を示している。 $t=2.87$ 秒における結果では、非線形性が強いために、実験の自由表面形状と数値計算による自由表面形状はやや異なる。即ち、模型実験による結果では山から谷へ至る自由表面の形状が一様に下に突となっているのに対し、数値計算結果ではS字を描いた自由表面形状となっている。

次に、パイプタワー付き球形のタンクについての計算結果を示す。タンクの寸法として、タンクの直径を 10 m 、パイプタワーの半径を 0.5 m とし、 50% 水位の状態を想定した。要素分割は、タンクの半径方向に 9 要素、円周方向に 12 要素および深さ方向に 9 要素としており、全要素数は 324 、全節点数は 2 重節点を含めて 360 となる。要素分割した境界の外形を Fig. 6 に示す。

Fig. 7 は、加振周期 $T=4.0$ 秒、加振振幅 0.2 m の左右揺によって加振された場合の結果であり、加振開始後 $t=7.6$ 秒および $t=8.6$ 秒の自由表面形状を示している。タンクが加振されることによって、タンク内流体が左右に揺れ動くとともに、自由表面の中央付近およびタンク壁付近が交互に盛上がる様子がシミュレートされている。パイプタワーが存在することによる自由表面形状への影響はパイプタワー周辺部に限られており、流速が速い所で沈下し、遅い所で隆起している。Fig. 8 には、加振周期 $T=4.0$ 秒、加振振幅 0.2 m の左右揺および前後揺によって加振した場合について、加振開始後 $t=8.0$ 秒から $t=8.6$ 秒までの自由表面形状を 0.2 秒間隔で示している。なお、前後揺については 90° 位相を遅らせているので、タンクは半径 0.2 m の円を描いて運動していることになる。図からわかるように、自由表面の隆起する場所もタンクの運動と同様に円を描いて移動しており、さらにパイプタワーから出た自由表面のくぼみが螺旋状に広がっている。パイプタワー周辺の自由表

$t = 7.60\text{ (sec)}$

$t = 8.60\text{ (sec)}$

Fig. 7 Perspective view of free surface configuration in spherical tank [sway]

面形状は Fig. 8 と類似の形状であり、強い非線形性を示していることがわかる。本計算法では、自由表面条件の 2 次の非線形項まで考慮して解析を行っているが、このように強い非線形性を示す現象については、さらに高次の非線形項まで考慮する必要があると考える。

5. 結 言

3 次スプライン要素に基づく境界要素解析法を 3 次元スロッシング問題に拡張して応用する方法を提示した。さらに、複数の加振を受けるタンク内スロッシングの数値計算結果を示し、模型実験結果と比較した。計算結果は実際の現象を良くシミュレートしており、3 次元スロッシング問題の解析に対して有効であることがわかった。本計算法が有効な範囲はタンク内に生じる波の隆起が比較的小さい場合に限られるが、大振幅の波が生じる場合や球形タンクのパイプタワー付近の流れのように、強い非線形性を示す現象に対しては、摂動展開においてさらに高次の非線形項を考慮する必要がある。

本研究の遂行に協力された九州大学工学部岩本才次助手ならびに九州大学大学院生岩下卓司氏、矢頭康彦氏、山口悟氏に謝意を表します。なお、本研究の一部は文部省科学研究費の援助によるものであり、本計算はすべて九州大学

Fig. 8 Perspective view of free surface configuration in spherical tank [surge+sway]

大型計算機センター FACOM M 780/20, VP-200, OS IV/F4 によるものであることを記して関係各位に感謝します。

参 考 文 献

- 1) 井関俊夫, 新開明二: 高次要素を用いた境界要素法による非線形スロッシング問題の解析, 日本造船学会論文集, 第 163 号 (1988), p.285~293.
- 2) 新開明二, 野津康生, 山口賢二, 福田淳一: 3 次元スロッシング問題の数値解析, 西部造船会会報, 第 64 号 (1982), p.103~115.
- 3) 新開明二, 山口賢二, 福田淳一: 3 次元スロッシング問題の数値解析 (続), 西部造船会会報, 第 66 号 (1983), p.25~35.
- 4) Y. K. Lou, T. C. Su and John F. Flipse: A Non-linear Analysis of Liquid Sloshing in Rigid Containers, Ocean Engineering Program Texas A & M University College Station, Report No. MA-RD-940-80092 (1980).

付録 A. 境界要素の次数と数値計算の効率

0 次～3 次要素および 3 次スプライン要素に基づく境界要素法の数値計算精度の検証を行うために, 線形解析解が得られている前後揺をする 2 次元矩形タンク内の線形スロ

ッシング問題について計算を行った。

計算条件として, 矩形タンクの長さ 1 m, 水深 0.3 m, 前後揺の振幅 0.005 m とし, タンクの長さ方向の要素分割数 N_L は, $N_L=3, 5, 10, 15, 20, 30, 40$, 深さ方向の要素分割数 N_D は 3 とした。計算精度の表示法としては, 静止水面とタンク壁の交点にある節点 (0 次要素についてはタンク壁に最も近い静止水面上の節点) 位置における速度ポテンシャルの線形解析解を時々刻々求め, そのピーク時における数値計算誤差をパーセンテージで表し, 10 秒間のシミュレーション計算における値を平均して示すこととした。

また, 線形スロッシング問題については, 静止水面上に節点を配置して解析することができるので, 影響係数の計算とシミュレーション計算とは別々に行った。

Fig. A-1 に, 前後揺の周期 $T=0.66$ 秒で加振した場合の, 時刻 $t=7.0$ 秒における自由表面形状を示す。図は 0 次～3 次要素および 3 次スプライン要素を用いて計算した $N_L=20$ の場合の結果であり, 線形解析解を破線により表している。また, 図中には, 10 秒間のシミュレーション計算に要した電子計算機の計算時間と数値計算誤差のパーセンテージを示している。0 次要素から 3 次要素へと高次の要素になるに従って, 数値計算誤差は低下していくが, そ

れと同時に電子計算機の計算時間も増加していくのがわかる。この傾向は、同じ要素数であっても高次の要素は低次の要素に比べて多くの節点を有し、解析する際の連立方程式の元数が多くなることに起因する。一方、3次スプライン要素を用いた計算では、高次の要素を用いた解析ではあるが連立方程式の元数は1次要素と同じであるので、1次要素とほぼ同じ計算時間で2次要素に次ぐ計算精度が得られていることがわかる。

Table A-1 に、境界の分割の精粗に対する電子計算機の計算時間および数値計算誤差の関係の一部を示す。前後揺の周期は $T=1.3$ 秒である。全般的に、要素分割数が増えるに従って数値計算精度が向上する傾向のあることがわかる。また、ある一定の精度を得ようとした場合の電子計算機の計算時間に着目すると、3次スプライン要素を用いた計算結果が計算時間の最も短い場合が多く、効率的な境界要素であることがわかる。

Fig. A-1 Free surface configurations calculated with constant, linear, quadratic, cubic and cubic spline element

Table A-1 Comparisons of CPU time(sec) and error

TYPE OF ELEMENT	NL=3	NL=5	NL=10	NL=15	NL=20	NL=30	NL=40
CONSTANT ELEMENT			1.55 (1.48%)	2.21 (1.74%)	2.77 (2.13%)	3.81 (2.78%)	4.80 (3.22%)
LINEAR ELEMENT			1.89 (0.75%)	2.30 (0.52%)	3.02 (0.25%)	3.99 (0.22%)	5.02 (0.28%)
QUADRATIC ELEMENT	1.94 (0.68%)	2.23 (0.34%)	3.32 (0.22%)	4.35 (0.13%)	5.36 (0.13%)	7.62 (0.12%)	10.07 (0.12%)
CUBIC ELEMENT	2.48 (0.52%)	3.07 (0.31%)	4.57 (0.12%)	6.13 (0.13%)	7.82 (0.13%)		
CUBIC SPLINE ELEMENT	1.25 (9.88%)	1.41 (3.92%)	1.98 (0.80%)	2.41 (0.23%)	3.18 (0.08%)	4.30 (0.09%)	5.48 (0.12%)