二次元翼々面上流速分布の計算法について

——守屋の第一近似式の改良——

正員 佐藤 和 範*

Calculating Method of Velocity Distribution on 2-Dimensional Blade Surfaces

——Development of Moriya's 1st Approximate Formulae——

by Kazunori Sato, Member

Summary

Moriya's 1st approximate formulae to calculate velocity distributions on blade surfaces and the lifting force of 2-dimensional blade sections in ideal flow, are popularly used in Japan. The Fourier series in the formulae, however, diverges in the calculation of blade sections with non-zero trailing edge thickness, and converges slowly in the case of non-zero trailing edge angle.

In this paper, the formulae are progressed and re-examined in some points. The main results are as follows;

(1) Adding a logarithmic term to the mapping function, the 1st approximate formulae to calculate the velocity on surfaces of blade sections with non-zero thickness at the trailing edge, are obtained. In the case of such blade sections, assuming that the pressure at the trailing edge surface is to be same as one at infinite distance, the thrust force is disappeared.

(2) Calculating the terms concerning to trailing edge angle separately, the Fourier series converges rapidly. The logarithmic singularity, however, appears in the terms.

(3) Formulae presented here are equivalent to the Hanaoka's formulae.

(4) The effect of blade thickness on the lifting force is disappeared, due to the approximation of the formulae shown in this paper.

1. はじめに

理想流体を仮定した時の二次元翼々面上流速の計算法として、我が国では守屋の第一近似式¹⁾が広く使われている。これは、Hess & Smith 法²⁾などのパネル法に比べて計算量が少ないだけでなく、解析解なので翼面上の任意の点の流速が陽な解として得られ、平滑化や内挿などの手続きが必要であると思われる。差分法による直接解法等が注目されている昨今ではあるが、実用的には、旧くはあるが簡便な計算法も重要であろう。

しかし、守屋の式には後縁厚みが零でないとき解が発散する、後縁角が零でないとき収束が悪い、という問題点がある。本論文は、この二つの問題点について検討し、守屋の第一近似式を改良した式を示す。第2章では守屋の第一近似式とその問題点を、第3章では花岡の式³⁾の適用によ

る検討を、第4章では同じく第一近似式ではあるが守屋の式を改良した式を示す。第5章ではこれらの式を比較検討する。

2. 守屋の第一近似式の概要とその問題点

守屋の第一近似式の概要を示す。

Fig. 1(a)に示す ζ 平面 ($\zeta = \xi + i\eta$, i は虚数単位) の半径

Fig. 1 ζ -Plane & z -Plane

* 財団法人 日本造船技術センター

R の円 C_0 の外部の流れを, (b) に示す z 平面の翼型 S の外部の流れに写像する。 ζ 平面の実軸上の点 $T(\xi=R, \eta=0)$ を岐点とし, z 平面の点 T' (後縁, $x=1, y=0$) に対応させる。 $a_n(n=-1, 0, 1, 2, \dots)$ を複素係数として, 写像関数を

$$z = a_{-1}\zeta + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n} \quad (1)$$

と置く。 $n < -1$ の項が無いのは両平面の無限遠点を同じ位置にする為であり, 対数項が無いのは両平面の点を一対一に対応させる為である。

第一近似としては翼型 S を

$$x = 1/2 \cos \theta + 1/2 \quad (2)$$

$$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta \quad (3)$$

で表す。 $\theta=0, 2\pi$, $x=1$ は正背面の後縁, $\theta=\pi$, $x=0$ は前縁を表す。翼弦長 C は1である。 A_n はキャンバーライン f を, B_n は肉厚曲線 t をフーリエ積分して得られる。翼面上流速 q および揚力係数 C_L は, V, α を翼型に流入する流れの速度と流入角として, 結論のみ示すと,

$$\begin{aligned} q/V = & \left| (-1/2 + 1/2 \cos \theta - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos n\theta) \sin \alpha + (-1/2 \sin \theta + \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \sin n\theta) \cos \alpha \left| \div \right. \\ & \left. \sqrt{(-1/2 \sin \theta)^2 + (-\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \cos n\theta)^2} \right| \quad (4) \end{aligned}$$

$$C_L = 4\pi \left\{ -\left(\sum_{n=1}^{\infty} n A_n \right) \cos \alpha + \left(1/2 + \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \right) \sin \alpha \right\} \quad (5)$$

となる。また, $a_n(n=-1, 0, 1, 2, \dots)$ の第一近似値を(1)式の ζ に関する微分に代入し, $\zeta=R$ (点 T) とすると

$$[dz/d\zeta]_{\zeta=R} = \sum_{n=1}^{\infty} n B_n / R \quad (6)$$

となるので, $\sum_{n=1}^{\infty} n B_n$ が零のとき点 T では等角関係が成立せず尖った後縁になる。零でないとき, 丸い後縁になる。

以上概略を述べた守屋の第一近似式の問題点について検討するために計算例を示す。

後縁角を β_T (半角, 負), 後縁厚み (半厚) を $C \cdot t_r$ (図1(c)参照)として, 下記の3種の翼型について検討する。

翼型	β_T	t_r
0-0	0.0	0.0
8-0	-8.13°	0.0
0-2	0.0	0.02

翼型を Fig. 2 に示すが, 翼型 8-0 は NACA 4412 を若干修正して $t_r=0$ としたものの, 翼型 0-0 は更に $\beta_T=0$ としたものの, 翼型 0-2 は $t_r=0.02$ としたものである。キャンバーラインは3種の翼型で共通である。

Fig. 3 に(4)式による翼面上流速分布 ($\alpha=2^\circ$, 級数の和

Fig. 2 Profiles of Foils

は $N=10$ までとした)を示す。本図によると, 翼型 0-2 の翼面上流速分布が波打っている。また, 翼型 0-0 と翼型 8-0 では後縁付近の流速分布の傾向が異なっている。

もう少し詳しく見る為に, 級数 nA_n, nB_n の収束状況を Fig. 4-7 に示した (Fig. 6-7 の実線, 点線については後述)。Fig. 4 はキャンバーラインの, Fig. 5-7 は各々3種の翼型の肉厚曲線の級数とその $n=N$ まで部分和である。これらの図によると, nA_n は多少波打っているが速やかに零に収束している。その部分 and も速やかに零でない一定値に収束している。また, 翼型 0-0 の $nB_n, \sum_{n=1}^N nB_n$ も速やかに零に収束している。

1) しかし, 翼型 8-0 の肉厚曲線を見ると nB_n , 部分 and 共に零に収束しているように見えるが, 収束は遅い。

2) 更に, 翼型 0-2 について見ると, nB_n は零でない一定値に収束しており, その為, 部分 and は直線的に増加し収束していない。これは, 守屋の方法では写像関数に対数項が含まれておらず, $t_r \neq 0$ のような後縁で2つの値を有する翼型を表現できないことによる。

3) Fig. 5-6 を見ると, $t_r=0$ の時, 部分 and は $N \rightarrow \infty$ で零に収束している様に見える。よって, (6)式から後縁は

Fig. 3 Velocity Distributions on Foil Surface

Fig. 4 Fourier Series of Camber Line

Fig. 5 Fourier Series of Thickness Distribution.
Foil 0-0

Fig. 6 Fourier Series of Thickness Distribution.
Foil 8-0

Fig. 7 Fourier Series of Thickness Distribution.
Foil 0-2

尖った角になる。この場合、(5)式から揚力は肉厚の影響を受けない。更に、無限級数 nB_n の和が発散する時(4)、(5)式は意味を成さない。

以上が本論文で扱う守屋の第一近似式の問題点である。

3. 花岡の式の適用

花岡は基準線の上に渦層と吹き出し分布を置くことによって翼面上流速を計算する式を導いた³⁾。それは、 $x=0,1$ を前後縁として、

$$q/V = \left\{ \cos \alpha \pm \sqrt{\frac{1-x}{x}} \sin \alpha \pm \frac{\cos \alpha}{\pi} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right. \\ \times \int_0^1 \sqrt{\frac{x'}{1-x'}} \frac{df/dx'}{x-x'} dx' + \frac{df}{dx} \sin \alpha \\ \left. + \frac{\cos \alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{dt/dx'}{x-x'} dx' \pm \frac{dt}{dx} \sin \alpha \right\} \cos \beta \pm \quad (7)$$

$$\text{ここに、} \cos \beta \pm = 1 / \sqrt{1 + \left\{ \frac{d(f \pm t)}{dx} \right\}^2}$$

$\pm$ は正背面を表す

である。

本式の1行目、2行目、3行目は、各々平板、キャンバ一、肉厚による流速を表している。花岡は、本式が(4)式で $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n = 0$ と置いた式に一致することを証明している。

後縁角 β_r や後縁厚み t_r が零でない翼型の翼面上流速を求める式を導くため、肉厚曲線 t を $t_r=0, \beta_r=0$ の曲線 t_1 と $\beta_r \neq 0, t_r=0$ の曲線 t_2 に分離する。 t_2 を β_r と t_r によって予め定められた曲線とし、任意の形状を有する t が与えられたら $t_1 = t - t_2$ によって $\beta_r=0, t_r=0$ の肉厚曲線 t_1 を求める。(7)式の分子は、 t に関して線型なので、3行目を $t_1, t_2 (t = t_1 + t_2)$ に分離し、

$$\left\{ \frac{\cos \alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{dt_1/dx'}{x-x'} dx' \pm \frac{dt_1}{dx} \sin \alpha \right. \\ \left. + \frac{\cos \alpha}{\pi} \int_0^1 \frac{dt_2/dx'}{x-x'} dx' \pm \frac{dt_2}{dx} \sin \alpha \right\} \cos \beta \pm \quad (8)$$

とすることが出来る。

(8)式の2行目を解析的に求めるため曲線 t_2 を定める。

x は(2)式と同一の表現とし、 t_2 は、

$$\left. \begin{array}{ll} \theta=0 & \text{で } dt_2/dx = \beta_r \\ \theta=\pi & \text{で } dt_2/dx = 0 \\ \theta=2\pi & \text{で } dt_2/dx = -\beta_r \end{array} \right\} \quad (9)$$

となる関数として $\beta_r \cos 1/2\theta$ を、 $\theta=0, \pi, 2\pi$ で零となる関数として $\sin \theta$ をとることにして、

$$dt_2/dx = A \sin \theta + \beta_r \cos 1/2\theta \quad (10)$$

とおく。係数 A を、

$$\left. \begin{array}{ll} \theta=0 & \text{で } t_2 = t_r \\ \theta=\pi & \text{で } t_2 = 0 \\ \theta=2\pi & \text{で } t_2 = -t_r \end{array} \right\} \quad (11)$$

なる条件から定めると、結局、 t_2 は

$$t_2 = \frac{\beta_r}{6\pi} \left(3\pi \cos 1/2\theta + \pi \cos \frac{3}{2}\theta - 4\pi + 4\theta \right. \\ \left. - 2 \sin 2\theta \right) + \frac{t_r}{\pi} \left(\pi - \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \quad (12)$$

となる。(2)式を用いて(12)式の θ を x に変え、 x で微分すると、

$$\frac{dt_2}{dx} = \frac{8t_r}{\pi} \sqrt{x(1-x)} + \beta_r \left\{ \sqrt{x} - \frac{16}{3\pi} \sqrt{x(1-x)} \right\} \quad (13)$$

となる。これを(8)式の2行目に代入すると、 t_2 による翼面上流速 q_{t2} は、

$$q_{t2}/V = \left[\left\{ \frac{8t_r}{\pi} \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{\beta_r}{\pi} \left(\frac{2}{3} - \frac{16}{3}x \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sqrt{x} \log \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right\} \cos \alpha \pm \left\{ \frac{8t_r}{\pi} (\sqrt{x(1-x)}) \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_r \left(\sqrt{x} - \frac{16\sqrt{x(1-x)}}{3\pi} \right) \right\} \sin \alpha \right] \\ \div \sqrt{1 + \left\{ \frac{d(f \pm t_1)}{dx} \pm \frac{8t_r}{\pi} \sqrt{x(1-x)} * \right.} \\ \left. * \pm \beta_r \left(\sqrt{x} - \frac{16\sqrt{x(1-x)}}{3\pi} \right) \right\}^2} \quad (14)$$

となる。

Fig. 8 に、 t_2 の肉厚曲線を表す(12)式、吹き出し分布を表す(13)式、および翼面上流速を表す(14)式の分子の $\cos \alpha$ の項の関数形を、 β_r と t_r に分離し、実線、点線、破線で示す。

$\beta_r \neq 0$ の時、吹き出しは後縁 ($x=1$) において不連続になっている。そのため流速を表す式が、後縁において対数特異性を有している。また、(14)式に於いて $x=1-0$ とすると、

Fig. 8 Thickness Distribution etc
 — Thickness Distribution
 Source Distribution
 — Term of $\cos \alpha$ of Equation (14)

$$q_{t2}/V = \left[\left\{ \frac{4t_r}{\pi} + \frac{\beta_r}{\pi} \left(-\frac{14}{3} + \log \frac{2}{1-\sqrt{x}} \right) \right\} \cos \alpha \right. \\ \left. \pm \beta_r \sin \alpha \right] \div \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx} \pm \beta_r \right)^2}, \quad x=1-0 \quad (15)$$

となることから、 $\beta_r \neq 0$ の時、 $\alpha=0$ かつ後縁で $(df/dx)=0$ でない限り後縁の正背面の流速は同じにならず、kutta の条件が満たされていない。これらのことは、(7)式は、 $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n=0$ のとき守屋の第一近似式(4)式と同等であること、および $t_r=0$ の時 $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n=0$ であることから、守屋の第一近似式にも隠されているはずである。

$t_r \neq 0$ の時、吹き出し分布の合計は零にならない。よって、翼型は後縁で閉じていないが、 $\beta_r=0$ である限り数値計算上の問題は無い。

4. 守屋の第一近似式の改良

守屋の第一近似式を改良する。計算の過程は、基本的には守屋の第一近似式を導く過程¹⁾と同じである。

4.1 写像関数、翼面上流速、揚力

z 平面の半径 R の円 C_0 を z 平面の翼弦長 C の翼型 S に写像する関数としては、後縁における厚みを表す為に対数項を省略せず、

$$z = a_{-1}\zeta + a_0 + a_r \log \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \zeta^{-n} \quad (16)$$

$$a_r = P_r + iQ_r$$

$$a_n = P_n + iQ_n \quad n = -1, 0, 1, 2, \dots$$

$$\zeta = \xi + i\eta$$

$$z = x + iy$$

とする。Fig. 1(c) に示すように z 平面の点 T を z 平面の 2 点 T_B, T_F に写像する。よって、後縁面は写像されない。

以下の諸式は、 $a_r=0, t_r=0$ と置くと守屋の第一近似式に一致する。

(16)式に円 $\zeta = Re^{i\theta}$ を代入し、対数は主値をとって、実部と虚部に分けると、

$$x = P_{-1}R \cos \theta - Q_{-1}R \sin \theta + P_0 + P_r \log R \\ - Q_r \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{P_n}{R^n} \cos n\theta + \frac{Q_n}{R^n} \sin n\theta \right) \quad (17)$$

$$y = Q_{-1}R \cos \theta + P_{-1}R \sin \theta + Q_0 + Q_r \log R \\ + P_r \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{Q_n}{R^n} \cos n\theta - \frac{P_n}{R^n} \sin n\theta \right) \quad (18)$$

となる。後縁 $\theta=0, 2\pi$ の条件

$$[x]_{\theta=0} - [x]_{\theta=2\pi} = 0 \quad (19)$$

$$[y]_{\theta=0} - [y]_{\theta=2\pi} = 2Ct_r \quad (20)$$

に(17), (18)式を代入すると、

$$P_r = -Ct_r/\pi \quad (21)$$

$$Q_r = 0 \quad (22)$$

となる。

翼面上 S の流速 q としては、円上の流速を写像して

$$q/V = \left| \{-2Q_{-1}R(\cos \theta - 1) - 2P_{-1}R \sin \theta\} \cos \alpha \right. \\ \left. + \{2P_{-1}R(\cos \theta - 1) - 2Q_{-1}R \sin \theta\} \sin \alpha \right| \\ \div \sqrt{(dx/d\theta)^2 + (dy/d\theta)^2} \quad (23)$$

が得られる。対数項があっても、無限遠では $(d \log \zeta / d\zeta) = 0$ なので、(23)式は、形式上は守屋の式と同じである。

次に、揚力の式を導く。無限遠の圧力を P_0 、正背面 BF に働く圧力を P 、総圧を E とすると

$$E = P_0 + 1/2\rho V^2 = P + 1/2\rho q^2 \quad (24)$$

となる。次に、写像されない後縁面に働く力を求めるために、Kirchhoff の流れに垂直に置かれた平板の後流における死水域の仮定と同じく、後縁面に働く圧力 P_r が P_0 に等しい仮定とすると、(24)式から

$$P_r = P_0 = E - 1/2\rho V^2 \quad (25)$$

となる。複素ポテンシャルを W とすると、以上の二式から Blasius の第一公式により、翼に働く力 F_x, F_y は、

$$F_x - iF_y = 1/2i\rho \int_{BF} (dW/dz)^2 dz + \rho V^2 Ct_r \quad (26)$$

となる。積分を z 平面の積分 $\int_{C_0} (dW/d\zeta)^2 (d\zeta/dz) d\zeta$ に変え留数の定理を用いると

$$F_x = -2\pi\rho V^2 \left(2P_{-1}R \sin \alpha - 2Q_{-1}R \cos \alpha \right. \\ \left. - \frac{Ct_r}{\pi} \sin \alpha \right) \sin \alpha \quad (27)$$

$$F_y = 2\pi\rho V^2 \left(2P_{-1}R \sin \alpha - 2Q_{-1}R \cos \alpha \right. \\ \left. - \frac{Ct_r}{\pi} \sin \alpha \right) \cos \alpha \quad (28)$$

となる。この二式から、 $F_y/F_x = -\cot \alpha$ となるので、後縁厚みが有るときでも、後縁面の圧力を無限遠のそれに等しいと仮定すると、合力の向きは流入速度の向き α に垂直となり前進力は生じない。

以上の結果から、 P_{-1}, Q_{-1} が求まると翼面上流速や揚力を計算することができる。

共役フーリエ級数を用いて(17), (18)式から $P_n, Q_n (n=0, 1, \dots)$ を消去するために、 θ をフーリエ級数

$$\theta = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\theta}{n}, \quad \theta \neq 2m\pi \quad m: \text{整数} \quad (29)$$

で表す。これは、Fig. 9 に示すように、対数項に起因する無限個の翼を、1 個の翼にすることに対応する。

(21), (22)式を(17), (18)に代入し、その共役フーリエ級数 x^*, y^* を用いて $X = x + y^*, Y = y - x^*$ なる関数を作ると、その θ に関する微分は

$$\frac{dX}{d\theta} = -2Q_{-1}R \cos \theta - 2P_{-1}R \sin \theta \\ - \frac{2Ct_r}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta \quad (30)$$

$$\frac{dY}{d\theta} = 2P_{-1}R \cos \theta - 2Q_{-1}R \sin \theta$$

Fig. 9 Foils Mapped by $(\pi - \theta)$ and its Fourier Series

$$+ \frac{2Ct_r}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta \quad (31)$$

となる。(30), (31)式の無限級数は、通常の意味では収束しない級数であるが、Cesàroの総和法⁴⁾などによって総和を求めることができ、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta = 1/2 \cot 1/2\theta, \quad \theta \neq 2m\pi \quad (32)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta = -1/2, \quad \theta \neq 2m\pi \quad (33)$$

となる。但し、これらの式は $\theta = 2m\pi$ に於いて不連続になるので、 θ の値の取り得る範囲を $0 < \theta < 2\pi$ に限定する。よって、次に(30), (31)式の $\theta = 0$ に於ける値を用いて後で必要となる式を導く訳であるが、この場合、 $\theta = +0$ で値を評価する。尚、 $\theta = +0$ の代わりに $\theta = 2\pi - 0$ としても以下の結論は変わらない。

(30), (31)式の $\theta = +0$ に於ける値を用いて、

$$2P_{-1}R = \left[\frac{dY}{d\theta} \right]_{\theta=+0} + \frac{Ct_r}{\pi} \quad (34)$$

$$2Q_{-1}R = - \left[\frac{dX}{d\theta} \right]_{\theta=+0} - \frac{Ct_r}{\pi} [\cot 1/2\theta]_{\theta=+0} \quad (35)$$

$$2P_{-1}R(\cos \theta - 1) - 2Q_{-1}R \sin \theta = \frac{dY}{d\theta} - \left[\frac{dY}{d\theta} \right]_{\theta=+0} \quad (36)$$

$$-2Q_{-1}R(\cos \theta - 1) - 2P_{-1}R \sin \theta = \frac{dX}{d\theta} - \left[\frac{dX}{d\theta} \right]_{\theta=+0} + \frac{Ct_r}{\pi} \cot 1/2\theta - \frac{Ct_r}{\pi} [\cot 1/2\theta]_{\theta=+0} \quad (37)$$

を得る。 $\cot 1/2\theta$ は $\theta \rightarrow 0$ で無限大になるが、次節で述べる第一近似式においては $\cot 1/2\theta$, $[\cot 1/2\theta]_{\theta=+0}$ なる項は消えるので、このままの形にしておく。

4.2 第一近似式

第一近似式においては、前章と同じく、肉厚曲線 t を後

縁角 β_r 、後縁厚さ t_r が共に零の肉厚曲線 t_1 と、そうでない肉厚曲線 t_2 に分離する。 t_2 の関数形は前章と同じにする。後縁厚みの項を分離したのは、(35), (37)式の $\cot 1/2\theta$ の項を消す為であり、後縁角の項を分離したのは、後縁付近で収束の遅い級数を別途計算することによって、肉厚に関するフーリエ級数の収束を速くするためである。 $\beta_r = 0$, $t_r = 0$ と置くと、以下の諸式は守屋の第一近似式に一致する。 x の表式は、(2)式と同じである。翼弦長 C は1である。(3)式を

$$y = f + t_1 + t_2 \quad (38)$$

$$f = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta$$

$$t_1 = \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \sin n\theta$$

$$t_2 = \frac{\beta_r}{6\pi} \left\{ 3\pi \cos \frac{1}{2}\theta + \pi \cos \frac{3}{2}\theta - (4\pi - 4\theta + 2 \sin 2\theta) \right\} + \frac{t_r}{\pi} \left(\pi - \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \quad (39)$$

に変える。 B_{1n} は、 t_1 をフーリエ積分して得られる。

以下のフーリエ級数表示

$$\pi - \theta = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin n\theta \quad (40)$$

$$\cos \frac{1}{2}\theta = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin n\theta \quad (41)$$

$$\cos \frac{3}{2}\theta = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 9} \sin n\theta \quad (42)$$

を用いて(39)式をフーリエ級数で表現し、その共役フーリエ級数を用いて前述の $X = x + y^*$, $Y = y - x^*$ なる関数を作ると、その θ に関する微分は、

$$\frac{dX}{d\theta} = -\frac{1}{2} \sin \theta - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \cos n\theta - \sum_{n=1}^{\infty} n B_{1n} \sin n\theta + \frac{\beta_r}{\pi} \left\{ \frac{2 \sin 2\theta}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{3}{4n^2 - 9} \right) \times \sin n\theta \right\} + \frac{t_r}{\pi} (-\sin 2\theta - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sin n\theta) \quad (43)$$

$$\frac{dY}{d\theta} = \frac{1}{2} \cos \theta - \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} n B_{1n} \cos n\theta + \frac{\beta_r}{\pi} \left\{ -\frac{2 \cos 2\theta}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{3}{4n^2 - 9} \right) \times \cos n\theta \right\} + \frac{t_r}{\pi} (\cos 2\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\theta) \quad (44)$$

となる。ここで、(32), (33)式以外に、以下に示すフーリエ級数の初等関数表示、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{3}{4n^2 - 9} \right) \sin n\theta = \sin \theta \left(-1 + \cos \frac{1}{2}\theta \cdot \log \cot \frac{1}{4}\theta \right) \quad (45)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2 - 1} + \frac{3}{4n^2 - 9} \right) \cos n\theta = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{2} \sin \theta \cos \frac{1}{2}\theta \quad (46)$$

を(43), (44)式に代入すると(34)-(37)式の右辺は、

Fig. 10 Comparison of Velocity Distributions, Foil 0-2

$$\left[\frac{dY}{d\theta} \right]_{\theta=+\theta} + \frac{Ct_r}{\pi} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n} + \frac{t_r}{\pi} \quad (47)$$

$$\left[\frac{dX}{d\theta} \right]_{\theta=+\theta} + \frac{Ct_r}{\pi} [\cot 1/2\theta]_{\theta=+\theta} = - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{dY}{d\theta} - \left[\frac{dY}{d\theta} \right]_{\theta=+\theta} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta \\ &\quad - \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n}(1 - \cos n\theta) + \frac{\beta_r}{\pi} \sin \theta \\ &\quad \times \left(\frac{4}{3} \sin \theta - \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{2}\theta \right) - \frac{2t_r}{\pi} \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX}{d\theta} - \left[\frac{dX}{d\theta} \right]_{\theta=+\theta} &+ \frac{Ct_r}{\pi} \cot 1/2\theta \\ &- \frac{Ct_r}{\pi} [\cot 1/2\theta]_{\theta=+\theta} = -\frac{1}{2} \sin \theta \\ &- \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n} \sin n\theta \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} nA_n(1 - \cos n\theta) + \frac{\beta_r}{\pi} \sin \theta \left(1 + \frac{4}{3} \cos \theta \right. \\ &\quad \left. - \cos \frac{1}{2}\theta \cdot \log \cot \frac{1}{4}\theta \right) - \frac{2t_r}{\pi} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (50)$$

となり、 $\cot 1/2\theta$ の項が消える。また、Fig. 5に示すように $\sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n}=0$ であるが、守屋の第一近似式と比較する為、この項は残すことにする。これらの式を(23)、(27)、(28)式に代入すると、第一近似式として翼面上流速と揚力を表す式

$$q/V = \{ (50) \text{ 式の右辺} \} \cos \alpha + \{ (49) \text{ 式の右辺} \} \sin \alpha \\ \div \sqrt{(-1/2 \sin \theta)^2 + (dy/d\theta)^2} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} dy/d\theta &= - \sum_{n=1}^{\infty} nA_n \sin n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n} \cos n\theta \\ &+ \frac{\beta_r}{\pi} \sin \theta \left(\frac{4}{3} \sin \theta - \frac{\pi}{2} \cos \frac{1}{2}\theta \right) \\ &- \frac{2t_r}{\pi} \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$C_L = 4\pi \left\{ - \left(\sum_{n=1}^{\infty} nA_n \right) \cos \alpha + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n} \right) \sin \alpha \right\} \quad (52)$$

が得られる。

Fig. 10に、翼型 0-2について、(4)式(実線)と(51)式(点線)の比較を示す。本図によると、(4)式の計算結果は波打っているだけでなく、(51)式の結果に比べて背面の平均流速も大きくなっている。これはFig. 7に於いて、 $\sum_{n=1}^N nB_n > 0$ となっていることに対応している。

(52)式によると、揚力は後縁厚さの影響を受けない。これは、(27)、(28)式の後縁厚みに関わる項が(47)式のそれと打ち消し合ったためである。又、前述したように $\sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n} = 0$ であるから、揚力はこの場合も肉厚の影響を受けない。

(18)式と(38)式と同じ次数の係数を比較する等によって、以下に示す写像関数の各係数の第一近似値を得る。

$$P_{-1}R = 1/4 + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n} + \frac{t_r}{2\pi}$$

$$P_0 = 1/2 + \frac{t_r}{\pi} \log R$$

$$P_1/R = 1/4 - B_{11} + 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n} + \frac{t_r}{2\pi} + \frac{4\beta_r}{15\pi}$$

$$P_2/R^2 = -B_{12} - \frac{t_r}{2\pi} + \frac{3\beta_r}{35\pi}$$

$$P_n/R^n = -B_{1n} - \frac{\beta_r}{\pi} \left(-\frac{4n}{4n^2-1} + \frac{4n}{12n^2-27} - \frac{4}{3n} \right), \quad n \geq 3$$

$$Q_{-1}R = 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n$$

$$Q_0 = A_0 + t_r$$

$$Q_1/R = A_1 - 1/2 \sum_{n=1}^{\infty} nA_n$$

$$Q_n/R^n = A_n, \quad n \geq 2$$

これらの係数を(16)式の ζ に関する微分に代入して $\zeta=R$ (後縁)とおくと、 β_r や t_r の項は全て消えて(6)式と同じく

$$[dz/d\zeta]_{\theta=+\theta} = \sum_{n=1}^{\infty} nB_{1n}/R \quad (53)$$

となる。本式の右辺は零であるから、後縁に於いては等角関係が常に成立していない。

5. 考 察

5.1 3種の方法の比較

前述したように $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n = 0$ の時、(4)式が(7)式と同等であることは、花岡³⁾が証明している。(51)式についても、分母を $1/2 \sin \theta$ で割って(2)式から得られる

$$\cos 1/2\theta = \pm \sqrt{x}$$

$$\sin \theta = \pm 2\sqrt{x(1-x)}$$

$$\cos 1/2\theta \cdot \log \cot 1/4\theta = 1/2 \sqrt{x}$$

$$\cdot \log \{ (1+\sqrt{x}) / (1-\sqrt{x}) \} \quad (54)$$

等の式を代入すると、(14)式そして(7)式に一致する。

守屋の第一近似式とそれを改良した式を比べるために、(3)式と(38)式に(39)–(42)式を代入した式の $\sin$ 項の同じ次数の係数を等値すると、

$$B_n = B_{1n} + \frac{2}{n\pi} t_r + \frac{4\beta_r}{\pi} \left(\frac{n}{4n^2-1} + \frac{n}{12n^2-27} - \frac{1}{3n} \right) + b_2 \quad (55)$$

$$b_2 = \begin{cases} 0, & n \neq 2 \\ \frac{t_r}{2\pi} - \frac{\beta_r}{3\pi}, & n = 2 \end{cases}$$

となるので、 nB_n とその $n=N$ までの部分 and は

$$nB_n = nB_{1n} + \frac{2}{\pi} t_r + \frac{\beta_r}{\pi} \left(\frac{1}{4n^2-1} + \frac{3}{4n^2-9} \right) + 2b_2 \quad (56)$$

$$\sum_{n=1}^N nB_n = \sum_{n=1}^N nB_{1n} + \frac{2N+1}{\pi} t_r + \frac{\beta_r}{\pi} \left\{ -\frac{2}{3} + \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{4n^2-1} + \frac{3}{4n^2-9} \right) \right\} \quad (57)$$

となる。(56)、(57)式の右辺第一項は $n, N \rightarrow \infty$ で零になる。後縁厚さに関わる(56)式の第二項は一定値、(57)式では $N \rightarrow \infty$ で無限大になる。後縁角に関わる項は $n, N \rightarrow \infty$ で零になる。よって、守屋の第一近似式では、 $\sum_{n=1}^{\infty} nB_n$ が零でない有限な値になることはない。Fig. 6, 7の実線、点線は、(56)、(57)式の第二項目以降を描いたものである。本図から、翼型8-0、翼型0-2の例では、 n, N がかなり小さい段階から第二項目以降が主要な項になっていることが分かる。

次に、翼面上流速や揚力について比較する。守屋の第一近似式は、(43)、(44)式を(34)–(37)式で $\beta_r=0, t_r=0$ とした式に代入することに等しいから、後縁厚さに関わる項は、 $n=N$ までの部分 and をとって ((35)式は不変)、

$$2P_{-1}R = \dots \frac{t_r}{\pi} (2N+1) \dots \quad (58)$$

$$2P_{-1}R(\cos \theta - 1) - 2Q_{-1}R \sin \theta = \dots \frac{t_r}{\pi} \left(-2 \sin^2 \theta + 2 \sum_{n=1}^N \cos n\theta - 2N \right) \dots \quad (59)$$

$$-2Q_{-1}R(\cos \theta - 1) - 2P_{-1}R \sin \theta = \dots \frac{t_r}{\pi} \left(-\sin 2\theta - 2 \sum_{n=1}^N \sin n\theta \right) \dots \quad (60)$$

となる。(58)式から、揚力の $\sin \alpha$ の係数(揚力勾配)は N とともに大きくなる。(59)、(60)式の計算において、(32)、(33)式の右辺の代わりに左辺をそのまま数値計算で求めようとすると、

$$C_N = \sum_{n=1}^N \cos n\theta = -1/2 + 1/4 \cot 1/2\theta \sin N\theta + 1/4 \cos N\theta \quad (61)$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \sin n\theta = 1/2 \cot 1/2\theta - 1/2 \cot 1/2\theta \times \cos N\theta + 1/2 \sin N\theta \quad (62)$$

の $\sin N\theta, \cos N\theta$ の為、値は振動する。 $N\theta=2\pi$ から、振

動周期は、ある θ では $N=2\pi/\theta$ 、ある N では $\theta=2\pi/N$ である。 $N=10$ の時、翼面上流速分布に10個の山谷が生ずる筈であるが、Fig. 10の実線を見ると、確かにそうになっている。

5.2 後縁角の問題

肉厚曲線 t を t_1 と t_2 に分離することによって、守屋の第一近似式に隠された対数特異性が見えるようになった。(51)式により、 $\theta=0, 2\pi$ 付近で収束の遅い級数((45)、(46)式の左辺)を初等関数(同右辺)で計算することにより計算量を減らすことはできるが、第3章で述べた対数特異性の問題、Kuttaの条件が満たされていない問題は依然として未解決である。これは吹き出し分布が後縁において不連続になるためであるが、高次の近似の段階で消えるものなのかどうか不明である。

Fig. 3の点線に見るように、翼型8-0では対数項のために後縁に近づくに伴い流速が小さくなっている。これは、実験結果と合わない。Fig. 3の実線やFig. 10の点線に見るように、後縁角が零の時はこの様にはならず実験結果と似たような形になっている。

これは、Fig. 11(a)に示すように、後縁角が零の翼型においては正背面に沿って流れて来た流れは平行に流れ去るのに対して、Fig. 11(b)に示す様に、後縁角を有する翼型においては、正背面に沿って流れて来た流れは後縁において交差してしまう。それを避けるため、Fig. 11(c)に示す様に、計算においては後縁に近づくに伴い流速が零にならざるをえず、対数特異性はその反映であると考えられる。実際の流れにおいては、Fig. 11(d)に示すように、粘性のため翼表面上の流速は零であるから、境界層外の流れの流速が零でなくとも矛盾は生じない。このように考えるならば、理想

Fig. 11 Flow Patterns at Trailing Edge

Fig. 12 Comparison of Velocity Distributions, Foil 8-0

Fig. 13 Tangent Line to Curve of $\log(1-\sqrt{x})$

流体の仮定に基づく限り何らかの実験結果との不一致ないし特異性は避けられないと思われる。

実用上の便宜的な処理としては、

- 1) 後縁付近では計算式を使わず、上流側の流速分布の傾向から外挿する⁵⁾⁶⁾。
- 2) これは吹き出し分布が後縁で不連続になっているのが原因であるから、Fig. 8の一点鎖線のように後縁の吹き出しを零にする。これは、Fig. 11(e)の様な流れを仮定したことになり、後縁に近づくに伴い急激に厚くなる境界層の排除厚さを近似したものとも見なし得るが、吹き出しの合計が正になるので、 $t_r \neq 0$ の翼型と同じく、流線は後縁で閉じない。

等が考えられるが、Fig. 12にその一例を示す。これは、前掲の翼型8-0の例であるが、Fig. 13に示すように、実測値との不一致の主な原因になっている(50)式の $\log \cot 1/4\theta \approx \log(1-\sqrt{x})$ ((54)式を参照)の部分の後縁近くの値をその接線で置き換えた。Fig. 12の実線は(4)式によるもの、点線は(51)式によるもの、その他の線は接線を引く位置を変えたものである。

5.3 写像関数に於ける対数項の問題

守屋の第一近似式に於いて、後縁厚みを有する翼型の翼面上流速や揚力を計算できるようにするため、写像関数に対数項を追加した。その結果、後縁面は写像されない面と

なり、翼面に沿った流線は後縁で閉じない(Fig. 14に翼型0-2の流線の第一近似を示す)。これは、花岡の式に於いて吹き出しの合計が零にならないことに対応しており、前進力が生ずる。それを避けるために、翼型に働く力の計算に際して、後流と翼型を切離し、(25)式のように、後縁面の圧力が無限縁の圧力に等しいと仮定した⁷⁾。他方、翼面に沿って流れてきた流れの後縁端に於ける圧力は、一般に無限縁の圧力とは異なるから、Fig. 1(c)の点 T_b , T_F に於いて圧力が不連続になる。

なお、等角写像を用いた翼面上流速の計算法として有名なTheodorsen-Garrickの方法に於いては、A. Jameson⁸⁾が、写像関数を、

$$\frac{z}{\zeta} = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\zeta^n}\right) \quad (63)$$

の代わりに、

$$\frac{dz}{d\zeta} = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\zeta^n}\right) \quad (64)$$

とすることによって、後縁厚みが零でない翼型の計算法を導いている。(64)式は、 $\exp$ を級数に展開し ζ について積分すると、(16)式と同じ形になる。

5.4 肉厚が揚力に及ぼす影響

前述したように、Fig. 5, 6から後縁厚みがないとき $\sum_{n=1}^N nB_n$ は $N \rightarrow \infty$ で零に収束しているように見える。このことは、(2)、(3)式から得られる

$$\sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cos n\theta = -\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx} \right) \sin \theta \quad (65)$$

に於いて、左辺の無限級数が通常の意味で収束し $(dt/dx)_{x=1}$ が有限であるとき、 $\theta=0$ に於いても左辺と右辺が等しくなることから言える。

よって、守屋の第一近似式に於いては、後縁角や後縁厚

Fig. 14 Stream Lines of Foil 0-2

さの影響も含め、肉厚が揚力に及ぼす影響を計算できない。その影響を計算するためには、第二近似式まで進む必要があると思われる。

6. ま と め

(i) 写像関数に対数項を追加することによって守屋の第一近似式を改良し、後縁厚みを有する翼型についても翼面上流速分布が計算できる式を導いた。また、翼面に沿った流線が後縁で閉じない場合でも、写像関数で写像されない後縁面の圧力が無限遠の圧力に等しいと仮定することによって、翼型には揚力しか働かないようにすることができることを示した。

(ii) 後縁角に関わる級数を別途初等関数で計算することによって、フーリエ級数の収束を速くすることができることを示した。

(iii) 花岡の式を後縁厚みと後縁角を有する翼型に適用し、それが守屋の第一近似式を改良した式と同等であることを示した。

(iv) 後縁角を有する翼型に対しては、守屋の第一近似式は（今回それを改良した式および花岡の式も）後縁において対数特異性を有することを示した。後縁角を有する翼型の後縁付近の流れの計算においては、粘性を考慮しないかぎり、何らかの特異性ないし実験結果との不一致が避けられないという推測を示した。

(v) 守屋の第一近似式は（今回それを改良した式および花岡の式も）、肉厚が揚力に及ぼす影響を計算できないことを示した。

謝 辞

本研究に当たって、東京大学 加藤洋治教授、同 山口一助教授、および財団法人日本造船技術センター田中拓常務理事から貴重なご助言、ご援助を戴きました。ここに、厚く感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 守屋富次郎, '空気力学序論', 培風館, 昭和47年
- 2) J. L. Hess & A. M. O. Smith, 'Calculation of Potential Flow About Arbitrary Bodies', Progress in Aeronautical Sciences, Vol. 8, Pergamon Press (1966)
- 3) 花岡達郎, '厚翼の揚力面理論—I (守屋の2論文の揚力面理論への応用)', 船研報告, 第12巻第1号 1980年1月
- 4) 森口繁一, '数学公式II', 岩波全書, 154頁
- 5) D. A. Spence and J. A. Beasley, 'The Calculation of Lift Slopes, Allowing for Boundary Layer, with Applications to the RAE 101 and 104 Aerofoils', R. & M. No. 3137 (20, 238) A. R. C. Technical Report (Feb. 1958)
- 6) 石田洋治, '翼型の翼型抗力の計算法', 日本航空宇宙学会誌, 第9巻第213号, (1971年10月)
- 7) G. K. Batchelor, '入門流体力学', 橋本英典他訳, 東京電機大学出版局 (1972年), 462頁
- 8) F. Bauer, P. Garabedian, D. Korn and A. Jameson, 'Supercritical Wing Section II', Springer V, Lecture Notes in Economics and Math. System, Vol. 108, p. 17-22