有限要素法の事後誤差評価結果を利用した 順応型要素分割法に関する研究

正員 大坪 英 臣 正員 久保田 晃 弘
北 村 充

A Study on Adaptive Mesh Generation for the Finite Element Method
Using A Posterior Estimated Error

by Hideomi Ohtsubo *Member*, Akihiro Kubota *Member*
Mitsuru Kitamura

Summary

Adaptive mesh generation using a posteriori error estimation has recently attracted great interest. This paper proposes a new r -method of adaptive mesh generation for the finite element method. The objective function of this method is to minimize the error norm of the whole computational domain. It is very important for the adaptive mesh generation to estimate the numerical error accurately. The discretization error in the finite element method is estimated using the computer code ERRAND-FEM⁽⁸⁾ developed by the authors.

In order to verify the newly proposed adaptive method, we have chosen two 2-dimensional stress concentration and singularity problems. The results show the validity and the effectiveness of this method. Since this method is very simple and flexible, it is quite possible to extend it to any other problems, such as shell problems or solid problems.

1. はじめに

この数十年の間に飛躍的な進歩を遂げた有限要素法は、現在では工学分野を中心に多くの方面で日常的な数値計算ツールとして使われている。しかしながらよく知られているように、有限要素解の信頼性はそのモデル化の良否に大きく依存する。どのようなモデル化をしてもとにかく数値解は得られるが、その解が物理的に妥当であるためには、正しいモデル化を行う必要がある。一般に有限要素法の解の信頼性は高いといわれているが、それはモデル化が正しく行われた場合に限られる。

最近のように大規模で複雑な構造の解析を行うようになってくると、コストの大部分は計算そのものよりも入力データの作成や出力データの整理に費やされる。特に前述のように数値解の信頼性と密接な関係がある入力データ、すなわち有限要素モデルの作成の省力化、自動化は特に重要な課題である。

現在物理的な妥当性をあまり考慮しなければ、いくつか

の汎用の有限要素モデル自動作成プログラムが存在する。また一方、モデル作成の際には「応力集中部は細かい要素分割にする」ということはよく知られており、このことを考慮して自動的にモデル作成を行う試みも行われている^{1,2)}。しかしながら、解析する以前に応力分布をある程度正確に知るためにはかなりの経験を積む必要がある。また、それでも要素をどの程度細かくするかを定量的に判断するのは非常に困難である。もし、数値解の誤差の分布がわかれば、その結果を利用して最初の分割を修正し、より精度の高い解を得ることができる。

一般に、一度解析を行った後その結果を用いて「数値解の誤差をできるだけ小さくするように」要素分割の仕方を変えていくことを、順応型要素分割(adaptive mesh generation)という。具体的にはモデルのある部分の誤差が大きいと判断されたとき、その部分の要素分割が細くなるように修正して、再度解析を行うことである^{3,4,5)}。この順応型要素分割法には Fig. 1 に示すような 3 つの方法がある。

- (1) r -method
- (2) h -method
- (3) p -method

Fig. 1 Adaptive mesh generation

r -method は要素数および節点数を変えずに節点の座標だけを変化させる方法である (Fig. 1(b))。モデルの要素数, 節点数は変化しない。 h -method は誤差の大きい部分の要素をさらに細かく分ける方法, つまり要素の代表寸法 h を変化させる方法である (Fig. 1(c))。この方法ではモデルの要素数, 節点数が増加する。 p -method は誤差の大きい領域の要素を, 内挿関数の次数がより高次の新しい要素に置き換える方法である (Fig. 1(d))。ここでは要素の分割形

状は変化しないが自由度数は増加する。

本論文は, r -method による新しい順応型要素分割法を提案し, その妥当性, 有効性を検証したものである。特にその目的関数と詳細な手法を明示し, その方法ができるかぎり普遍性を有するようにすることを, 開発に際しての1つの大きな目標とした。そして, CAD/CAE といった設計自動化システムの一環として用いることを念頭においたので, そのアルゴリズムがなるべくシンプルになるように心がけた。アルゴリズムがシンプルであることはとりもなおさずそのシステムが高速でフレキシビリティに富むことを意味する。さらに再分割の際に, モデル毎に異なる値をとるパラメータを用いないように留意した。このことにより「応力集中部は細かい要素分割にする」といった定性的, 経験的な知識に対して, パラメータをモデル毎にコントロールすることなく, 直接「どの程度細かくすれば良いのか?」という定量的, 客観的な情報を与えることが可能になる。これは真の自動化システムを構成するためには, ぜひとも必要とされる条件である。

順応型要素分割を用いてより良い有限要素モデルを作成するためにはまず数値解の誤差の分布・大きさを正確に知ることがもっとも重要である。しかしながら従来の様々な順応型要素分割法では, そのもっとも基本となるべき誤差評価の精度が不十分であったために, その結果に物理的妥当性を欠くものが実に多い。そこで, 本研究では数値解の誤差は著者らが開発した有限要素法事後誤差評価プログラ

Fig. 2 Flow of adaptive mesh generation

ム ERRAND-FEM を用いて解析した^{6,7,8)}。これは有限要素解の離散化誤差を元の解析に用いた要素の形状関数の次数より1次高い要素を用いて要素ごとに解析するものである。この ERRAND-FEM を用いることによって、全領域だけでなく、各要素レベルでも十分な精度で定量的な事後誤差評価が可能になることが確かめられている。Fig. 2 に ERRAND-FEM を用いた順応型要素分割のアルゴリズムを示す。

2. 順応型要素分割のコンセプト

順応型要素分割の目的は「数値解の誤差をなるべく小さくすること」である。そこで本研究では順応型要素分割の目的関数を解析領域全体の誤差のエネルギーノルム $\|e\|$ とし、これを最小にすることを目的にする。なお、r-method を用いた場合要素および節点の数とトポロジーを変化させないことが要素分割の際の制約条件になる。

まず、要素 i の誤差のエネルギーノルム $\|e\|_i$ を次式で定義する。

$$\|e\|_i^2 = \int_{\Omega_i} \nabla' e \cdot E \nabla' e d\Omega \quad (1)$$

ここで、 E は弾性係数テンソル、 e は変位ベクトル u の誤差、そして ∇' は変位-ひずみオペレータである。応力テンソルを σ 、ひずみテンソルを ε とすると、

$$\sigma = E\varepsilon = E\nabla' u \quad (2)$$

の関係が成り立つ。したがって解析全領域の誤差のエネルギーノルム $\|e\|$ は次式で与えられる。

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^N \|e\|_i^2 \quad (3)$$

ここで N は全要素数である。

3. 順応型要素分割のストラテジー

さて、一般的に $\|e\|_i$ の大きさには個々の要素の代表長さ、形状、近似関数の次数など、そしてモデルの制約条件が複雑に関係している。したがって、前章で定義した目的関数、すなわち解析領域全体の誤差のエネルギーノルム $\|e\|$ を最小にするような要素分割を直接求めることは非常に困難である。ところが、要素面積の総和が一定の場合 $\|e\|^2$ を小さくすることは要素毎の誤差のエネルギーノルムの2乗 $\|e\|_i^2$ を要素によらず一定にすること

$$\|e\|_i^2 = \text{constant} \quad (4)$$

すなわち

$$\|e\|_i = \text{constant} \quad (5)$$

と同値である^{9,10)}。そこで、本論文では「各々の要素の誤差のエネルギーノルムが等しくなるように節点を移動させる」ことを考える。

4. 節点の移動方法

各要素の誤差は「要素代表長さ」と「要素形状」の2つのパラメータに支配される。このうち「要素代表長さ」が

定量的に評価することの容易なパラメータであるのに対し、「要素形状」は定量的に評価することが困難なパラメータである。そこでまず「要素代表長さ」による要素の誤差の変化を考慮して節点を移動することを考える。基本的には相対的に誤差の大きい要素の代表長さが小さくなるように節点が移動すれば良いのであるから、本論文では第1章で示した設計自動化システムの一環として使用するための条件を満たす節点移動方法として、次のような反復方法を採用する。

「ある節点をその節点を含むすべての要素の重心位置に要素の誤差の大きさに応じた重みをかけた平均の位置に移動させる。」³⁾

すなわち

$$r_n^{m+1} \leftarrow \frac{\sum_k (W_k^m \cdot R_k^m)}{\sum_k W_k^m} \quad (6)$$

とする (Fig. 3)。ここで r_n^{m+1} は第 $m+1$ 反復ステップにおける節点 n の位置ベクトル、 R_k^m は第 m ステップにおける節点 n を含む要素 k の重心位置、そして W_k^m が第 m ステップにおける要素 k の重みである。

重み W は各ステップにおける要素毎の誤差のエネルギーノルムとする。各反復ステップ毎に要素形状が変化するのでこの重みを正確に求めるためには各ステップ毎に毎回応力解析ならびに誤差解析を行う必要がある。しかし設計自動化システムの基本コンセプトの主旨からいっても、もっと一般的な工学的センスからいっても毎回厳密な誤差解析を行うことははなはだ非効率的である。そこで、節点移動反復ステップ中の要素毎の誤差、すなわち重み W は誤差のエネルギーノルムの初期値 $\|e\|_0$ をもとに、要素代表長さの変化によって事前誤差解析¹¹⁾から簡便に推定される誤差ノルムの予測値を用いることにする。したがって本方法では新たに、第 m 反復ステップ中の要素 i の重み W_i^m を次式で与えることにした。

$$r_n^{m+1} \leftarrow \frac{\sum_k (W_k^m \cdot R_k^m)}{\sum_k W_k^m}$$

Fig. 3 Method of node movement

$$W_i^m = \|e\|_i^0 \cdot \left[\frac{h_i^m}{h_i^0} \right]^{p+1-n} \cdot \left[\frac{h_i^m}{h_i^0} \right]^{\frac{D}{2}} \quad (7)$$

ここで p は要素の内挿関数の次数, D はモデルの次元である。 n は誤差ノルムの微分階数であり, ここでは $n=1$ である。また h_i^0 は要素代表長さの初期値であり, h_i^m は第 m 反復ステップにおける要素代表長さである。 $D=2$ の場合, 要素代表長さ h は要素面積の平方根とし, $D=3$ の場合, h は要素体積の立方根とする。このとき, $[h_i^m/h_i^0]^{p+1-n}$ の項は要素代表長さの変化により事前誤差解析から予測される単位面積あたりの誤差の変化率であり, $[h_i^m/h_i^0]^{\frac{D}{2}}$ の項は要素面積の変化による要素全体の誤差の変化率である。なお, 要素代表長さの変化による項の p の値は要素が特異点を含む場合にはその特異点の性質に応じて修正する必要がある。

以上のような方法で節点移動の際の重み W を変化させることにより, 本方法では初期分割およびその誤差分布が与えられればその再分割結果は反復過程を通じて一義的に決定されることになる。このように結果が決定的, すなわち自動的に得られることが本順応型要素分割法の大きな特色である。

次に「要素形状」による項について考える。一般的にたとえ要素の代表長さが等しくても, 要素の形状が歪むにつれてその誤差が増加することはよく知られている。しかしこの「要素形状」の良否を定量的に表現し, 要素誤差の増減と定量的に結び付けることが可能な値というものは現在のところ存在しない。そこで, 本論文ではこの「要素形状」に関しては「メッシュをなるべくスムーズにする」というコンセプトで要素代表長さの影響とは独立にあくまで「定性的に」そして「補助的に」考慮することにする。このスムーズングは児玉の方法¹²⁾を参考にして, 以下のように行う。

「ある節点の位置を, その節点と接続しているすべての節点に節点間の距離に反比例した重みをかけて平均化した位置に移動する。」

すなわち, Fig. 4 に示すように k を節点 n と接続している節点とするとスムーズング後の節点 n の位置 r_n は次式で与えられる。

$$r_n \leftarrow \frac{\sum_k (d_k^{-1} \cdot r_k)}{\sum_k d_k^{-1}}$$

Fig. 4 Smoothing

$$r_n \leftarrow \frac{\sum_k (d_k^{-1} \cdot r_k)}{\sum_k d_k^{-1}} \quad (8)$$

ここで, r_k は節点 k の位置, d_k 節点 n と節点 k の距離である。節点間の距離に反比例した重みをかけない単純な平均化によるスムーズングと比較して, この方法はスムーズングの効果が節点の密な方向にだけ選択的に働くので¹²⁾, 有限要素モデルの場合にも効果的である。なお, (6)式で示される節点移動の際にもある節点を含む要素の重みが等しくなると通常のラプラシアン法¹³⁾に類似したスムーズング効果が現れてくる。

5. 節点移動の境界条件

節点が無要素モデルの境界にある場合, 節点を移動させる際にはモデルの形状を変化させないように節点の移動に制約を設けなければならない。この節点移動の境界条件については, モデルが2次元の場合, 境界条件を以下の2つに分類できる。

(1) 節点は移動させない。

(2) 節点がある曲線上でのみ移動させる。

(1) はモデルのコーナーに存在する節点, あるいはクラックのチップに存在するような節点に適用される境界条件である。(2) はその他のモデル境界上に存在する節点に適用される境界条件である。なお, モデルが3次元の場合には(1)と(2)の条件に加えて

(3) 節点がある曲面上でのみ移動させる

という境界条件を加えれば良い。

次に(2)の境界条件を満足させる方法について説明する。ここではまず, モデルの境界形状に関する情報はオリジナルの有限要素モデルの節点位置のみから与えられるものとし, その他の, 曲線の方程式等の付加的な情報は用いないものとする。前章で示した節点の移動方法では, 1回の節点移動のプロシージャにおいてはその節点とその節点を含む要素の重心位置で形成される多角形の外部に移動しないことがわかる。そこで, モデル形状はある境界上の節点とそれに接続している2つの境界節点の合計3点で決定される2次曲線上を移動するものとした。この方法では, 境界節点がモデル境界のコーナー部に存在する場合が問題となるが, r -methodを用いた要素再分割の場合コーナー部の節点には(1)の境界条件を課するので, 特に不都合は生じない。

具体的には以下のような手順で境界節点を移動させる。まず, 境界条件を考慮せずに前章で示した方法にしたがって節点を移動させる。この後に Fig. 5 に示した方法で節点をモデル境界上に移動させる。すなわち r_e, r_i を今注目している境界上節点の移動前および境界条件を考慮せずに移動させた後の位置とし, r_n, r_r をその節点と接続している境界上節点の位置とすると, モデルの境界上に移動した後

Fig. 5 Arbitrary boundary condition

の節点位置 r_m は r_l, r_c, r_r の3点で決定される2次曲線と、 r_c から r_l と r_r を結ぶ直線上におろした垂直との交点のうち r_l に近い方の点とする。この方法は近似的ではあるが計算時間が短く、しかもいかなる場合でも値が一意に決定する。なお、この方法の場合要素形状が急激に変化する部分で節点どうしが離れている場合に精度が低下するが、少なくともモデル形状をある程度正確に表現できる程度の節点が境界上に存在する場合、特に問題は生じないと考えられる。

以上示した「節点移動」、「スムージング」、「境界条件」の各方法を用いることによって、実際の要素再分割は Fig. 6 のアルゴリズムで計算が収束するまで行われる。なお、以上の説明に用いた Fig. 3 および Fig. 4 は4節点の平面要素を念頭において描かれているが、8節点の平面要素のように要素のコーナー以外に節点が存在する場合でも、要素のコーナー部に存在する節点のみ以上の手順で移動させ、その他の節点についてはコーナー部の節点位置から補間して求めれば良い。さらに、本方法は3角形要素あるいは3次元要素等にもそのまま適用可能である。したがって、本方法の特徴として以下の4点をあげることができる。

- (1) 結果が一義的に得られる。
- (2) モデルの次元によらない
- (3) 任意の要素の組み合わせに対して適用可能である

Fig. 6 Flow of node relocation

- (4) 計算時間が短い

それでは次に本順応型要素分割法の妥当性・有効性をいくつかの例題を用いて示していくことにしよう。

6. 順応型要素分割の適用例

6.1 円孔を有する正方形板

本論文では2次元の平面応力問題を考える。今、Fig. 7(a)のように半径 a の円孔を有する正方形板がその2辺に一樣張力 s を受けているとする。数値パラメータは次のように設定した。

$$a=2 \quad b=8 \quad s=1 \quad E=10000 \quad \nu=0.3 \quad (9)$$

ここで E はヤング率、 ν はポアソン比である。対称性を考慮して、Fig. 7(b)のような1/4の領域を解析する。この1/4領域に対して、まず Fig. 8 に示すような4節点要素で構成される3種の有限要素モデル (MESH-A, B, C) を初期モデルとして数値解析を行う。これらはいずれも円孔周辺の応力集中などを考慮せずに各辺を等分割することによっ

Fig. 7 Square plate with a hole

Fig. 8 Three original finite element models

て得られたものである。

MESH-A, B, C の要素数の比は 1 : 2 : 4 で, MESH-C は MESH-A の 1 要素をさらに 4 分割したものとなっている。なお, この 4 節点一次要素の誤差ノルムの収束は $O(h)$ であるので, (7) 式における p の値は 1 となる。

要素再分割の際の境界条件として, コーナー部の節点に対しては前章の (1) の節点固定の境界条件を適用し, その他の有限要素モデル境界上の節点に対しては, (2) のモデル境界上のみを節点移動させる境界条件を適用する。

まず, Fig. 2 のアルゴリズムに示されているように, この初期有限要素モデルに対して応力解析ならびに ERRAND-FEM を用いた誤差解析を行った。Table 1 に各 MESH-A, B, C を用いた場合の領域全体の相対誤差 $\|e\|/\|u\|$ ならびに σ_x の最大値 $(\sigma_x)_{\max}$ の値を示す。ここで $\|u\|$ は領域全体での変位のエネルギーノルムである。この結果から, 円孔近傍の応力集中を考慮せずに有限要素モデルを作成する

と, もっとも細かい MESH-C を用いた場合でも, 相対誤差の大きさは 15.6% にもなることがわかる。また, σ_x が最大になるのはいずれも $\theta=90\text{deg.}$ の円孔上の節点である。

Fig. 9 は MESH-B を用いた場合の, 要素毎の誤差のエネルギーノルム $\|e\|_i$ の分布である。 $\|e\|_i$ は応力の集中する円孔近傍で極端に大きくなっている。なお, 変位のエネルギーノルムがもっとも大きくなるのは円孔近傍の中でも特に $\theta=90\text{deg.}$ 周辺であるが, 誤差のエネルギーノルムが最大になるのは, $\theta=90\text{deg.}$ の周辺ではなくせん断応力の大きくなる $\theta=45\text{deg.}$ 周辺である。これはここで用いた 4 節点要素のせん断応力に対する誤差が直応力の誤差よりも大きいためであると考えられる。この結果から, より適切な要素分割を行うための誤差解析の重要性が再確認される。

さて, この誤差解析結果を用いて要素再分割を行った結果を示す前に, 本順応型要素分割法の収束性をチェックしておこう。Fig. 10 は Fig. 6 に示す反復ステップにおける節点移動距離の収束率を MESH-B の場合について示したものである。ここで, 縦軸は全節点における節点移動距離 Δd の 2 乗平均の無次元値 $\sqrt{\sum \Delta d^2}/L$ である。なお, L は平均的な要素代表長さ, すなわち $\sqrt{(\text{解析領域の面積})/(\text{要素数})}$ である。この図から本方法の収束率の高さがわかる。本論文では要素再分割の収束判定を

Fig. 9 Estimated error distribution for the original mesh

Fig. 10 Convergence of node movement

$$\sqrt{\Sigma \Delta d^2}/L < 1.0 \times 10^{-3} \quad (10)$$

としたので、この場合 20 回の反復で収束したと判定された。前述のように本方法の計算時間は非常に短いため、20 回反復を行ったとしても、要素再分割に必要な計算時間は応力解析に必要な計算時間の 1/10 以下である。

Fig. 11 は節点移動の際に用いた要素毎の重み W_i の 2 乗和の反復回数における変化を、同じく *MESH-B* の場合についてプロットしたものである。ここで重み W_i は各要素の節点移動後の予測誤差ノルムに相当するので、この図の縦軸は節点移動後の全領域における予測誤差ノルムの 2 乗を示す。いうまでもなくこれは $\|e\|^2$ の予測値に他ならない。この結果からも本節点移動法により、領域全体の誤差が確実に減少することが確認される。また、収束判定により 20 回で反復を打ち切った場合でも、100 回反復を行った場合と比較して W_i の 2 乗和はたかだかその 1.4% しか異ならないことがわかる。さらに、20 回反復を行った場合、この要素再分割によって領域全体の誤差のエネルギーノルム $\|e\|$ が約 $\sqrt{5.08 \times 10^{-3}/1.60 \times 10^{-2}} = 0.563$ 倍に減少することが予測される。

Fig. 12 は初期有限要素モデル (*MESH-A, B, C*) に対して、Fig. 2 に示す手順で順応型要素分割を行った結果 (*MESH-D, E, F*) である。ここで、要素再分割は 1 回のみ行い、Fig. 2 に示す loop は回していない。いずれのモデルについても応力の集中する円孔近傍に節点が集中していることがわかる。また、円孔から遠ざかる方向にほぼ同心円上に節点が並ぶことがわかる。

この *MESH-D, E, F* に対して ERRAND-FEM を用いて誤差解析を行った結果ならびに σ_x の最大値を Table 1 に示す。初期有限要素モデル *MESH-A, B, C* に比較して誤差は大幅に減少しており、もっとも細かい要素分割の *MESH-F* の場合 *MESH-C* に比べて相対誤差が 0.436 倍に減少した。また、もっとも粗い *MESH-D* の場合でも相対誤差は 14.2% であり、これは要素数が 4 倍の *MESH-C* に比較してもさらに小さい。この結果が順応型要素分割の有効性および重要性を端的に表している。もちろん σ_x の最大値も要素を再分割することにより、いずれの場合についても再分割前より大きくなっている。Fig. 13 は

Fig. 11 Convergence of total weight

Fig. 12 Three adapted finite element models

Table 1 Estimated relative error and maximum stress for the plate with a hole

		$\ e\ /\ u\ $	$(\sigma_x)_{\max}$
(a)coarser meshes	<i>MESH-A(original)</i> ¹	22.0%	2.984
	<i>MESH-D(adapted)</i>	14.2%	3.324
(b)medium meshes	<i>MESH-B(original)</i>	18.6%	3.264
	<i>MESH-E(adapted)</i>	9.1%	3.460
(c)finer meshes	<i>MESH-C(original)</i>	15.6%	3.459
	<i>MESH-F(adapted)</i>	6.8%	3.575

MESH-A と *MESH-D* とで y 軸上の σ_x の分布を比較したものである。要素再分割後は σ_x のピークが上昇しただけでなく、要素境界での応力のギャップも減少していることがわかる。

Fig. 13 Stress distributions along the y-axis

MESH-E の相対誤差の MESH-B との比は 0.489 で、重みの予測値から推定した値に比較的良好に一致している。なお、MESH-B を再分割する際に Fig. 6 の反復手順を 100 回行っても、そのモデルの相対誤差は 9.0% であり、反復を 20 回で打ち切った場合とほぼ同じである。また、スムージングを行なわないと、相対誤差は 9.5% となり (反復 20 回)、スムージングを行った場合に比較して、誤差はやや増加する。

Fig. 14 は MESH-E の場合について、要素毎の誤差ノルム $\|e\|_i$ の分布をプロットしたものである。Fig. 9 に比較して $\|e\|_i$ の分布は著しく平坦化しており、一回の要素再分割で当初の目的関数である (5) 式がかなり良い精度で満足されていることがわかる。もちろん Fig. 2 の loop を繰り返すことによって、本例題の場合 (5) 式はさらに厳密に満足されていく。

本例題の最後に、要素数の増加に対する誤差の収束率について考察する。Fig. 15 は領域全体の要素数の平方根 $\sqrt{N}$ に対する領域全体の相対誤差 $\|e\|/\|u\|$ の変化をプロットしたものである。ここで、 $\sqrt{N}$ はモデル全体の平均的な要素代表長さ L に反比例する。したがって事前誤差解析から、本例題の場合 $\|e\|/\|u\|$ は $\sqrt{N}$ の -1 乗に比例することが推定される。この結果から、応力集中等の物理的な現象を考慮せずに機械的に有限要素モデルを作成すると、解の相対誤差 $\|e\|/\|u\|$ が大きいだけでなく、その収束率も $\sqrt{N}$ の

Fig. 14 Estimated error distribution for adapted mesh

Fig. 15 Convergence of relative error

-0.5 乗と非常に悪くなることがわかる。しかもこの収束率は事前誤差解析で予測されるものとは一致していない。そして、例えば領域全体の相対誤差を 10% 以下に抑えようとすると、この機械的に作成されたモデルでは 500 以上の要素を必要とすることがわかる。それに対して本論文の方法で得られた順応的な有限要素モデルを用いると相対誤差の収束率は向上し、 $\sqrt{N}$ の -1 乗と事前誤差解析から予測されるものともほぼ一致する。また、同様に相対誤差を 10% 以下にするためには、わずかに 50 弱の要素で十分であることがわかる。

6.2 クラックを有する正方形板 (特異性のある問題)

次に同様の 2 次元問題ではあるが、解析領域内に特異点を含む場合を考える。有限要素法はこのような問題が本来不得手であり、一般に応力解析およびそれをもとにした誤差解析の精度は非常に悪い。ただし、特異性の強さを求めるための J 積分値や応力拡大係数を計算する際に有限要素法が用いられるので、ここでは特に例題として取り上げることにした。

さて、今 Fig. 16 に示すように、クラックを有する正方形板が一樣引き張り応力 s を受けているとする。数値パラメータは次のように設定した。

$$a=2 \quad w=8 \quad s=1 \quad E=10000 \quad \nu=0.3 \quad (11)$$

この問題に対する初期有限要素モデルとして、Fig. 17 の対

Fig. 16 Square plate with crack

MESH-G(original)

64 Elements

81 Nodes

Fig. 17 Original finite element model

称性を考慮した4節点要素で構成される等分割モデル *MESH-G* を用いる。

激しい応力変化が起こる $y=0$ 上の σ_y の分布を Fig. 18 に破線で示す。この問題は厳密にクラックの先端で応力が無限大になるべきであるが、通常の4節点要素を用い、さらにこのような粗い要素分割の場合、十分に応力のピークを表現できていない。

同様のモデル (*MESH-G*) の場合について、応力解析結

Fig. 18 Stress distributions along the x-axis

$$\|e\|_i / \sqrt{\text{area}_i}$$

Original mesh
(*MESH-G*)

Fig. 19 Estimated error distributions for the original mesh

Table 2 Stress intensity factors

		K_I
FEM	<i>MESH-G(original)</i>	3.85
	<i>MESH-H(1st adapted)</i>	4.05
	<i>MESH-I(2nd adapted)</i>	4.11
Exact.		4.19

果をもとに、ERRAND-FEMを用いて事後誤差評価を行った。Fig. 19は解析された各要素の誤差のエネルギーノルムを要素面積の平方根で割ったもの、すなわち単位面積当たりの誤差の分布をプロットしたものである。クラックの先端で相対誤差にして45.9%にもなる大きな誤差が発生していることがわかる。また、領域全体での相対誤差は21.0%であると評価された (Table 3)。なお、厳密にはク

ラック先端での誤差も無限大になるべきであるが、応力解析の場合と同様の理由で、誤差のピークも十分に表現されていない。

次にこの事後誤差評価結果を用いて、前節と同様の手順で要素再分割を行った結果を Fig. 20(a) に示す (*MESH-H*)。再分割の際の境界条件は、モデルのコーナー部ならびにクラック先端上の節点は移動させない、その他の境界上の節点はモデル境界上のみを移動させる、というものとした。この図から、誤差が大きくなるクラック先端に節点が集中していることがわかる。ここで、特異点であるクラック先端を含む要素に関しては重み W^p を与える (7) 式中の p の値を 0.5 とした。これは、要素に特異点が含まれる場合、本要素の事前誤差解析による誤差ノルムの収束が $O(h^{0.5})$ になるためである¹⁴⁾。この *MESH-H* を用いて応力解析を行った結果を Fig. 18 に一点鎖線で示す。クラック先端での応力のピークがオリジナルの 3.50 から 6.29 に上昇したことがわかる (Table 2)。

本例題ではさらに *MESH-H* をもとにして、2 度目の要素再分割を行った。新たに得られた再分割モデルを Fig. 20(b) に示す (*MESH-I*)。*MESH-H* に比較してさらにクラック先端に節点が集中していることがわかる。この *MESH-I* を用いて応力解析を行った結果を Fig. 18 に実線で示す。クラック先端での応力のピークがさらに上昇し、同じ要素数でありながら、7.50 とオリジナルモデルの約 2.14 倍にもなった。このことから、本方法による順応型要素分割により、より妥当な応力解析が行えるようになったことができる。

次にこの有限要素解析結果を用いて応力拡大係数 K_I を求めた値を比較する。Table 2 はクラック先端にもっとも近いクラック上の節点での有限要素解から求められた K_I の値を 3 つのモデルで比較したものである。なお、ここで K_I を求める際には変位法¹⁵⁾を用いた。また、 E_{exact} として示した値は、石田の解析解¹⁵⁾である。要素再分割の結果、応力のピークだけでなく応力拡大係数もより解析解に近い妥当な値となっていることがわかる。

ただし、本例題の場合、Table 3 に示されているように要素再分割の結果、クラック先端での応力のピークは上昇したものの、解析領域全体での誤差は減少せず、3 つのモデル共にほぼ同じ値である。これは、モデルが改善されるにしたがって特異点周辺での応力解析の精度が向上するとともに、誤差解析の精度も向上され、本来無限大になるべきクラック先端での誤差がより正確に評価されるようになったためであると考えられる。Fig. 21 は *MESH-I* を用いた場合の単位面積当たりの誤差分布をプロットしたものである。この図から、クラック先端での誤差評価値がオリジナ

Table 3 Estimated relative error and maximum stress for the plate with a crack problem

	$\ e\ /\ u\ $	$(\sigma_y)_{\text{max}}$
<i>MESH-G(original)</i>	21.0%	3.50
<i>MESH-H(1st adapted)</i>	20.3%	6.29
<i>MESH-I(2nd adapted)</i>	22.0%	7.50

Fig. 21 Estimated error distributions for the 2nd adapted mesh

Fig. 20 1st and 2nd adapted finite element models

ルモデル (*MESH-G*) に比べて大きくなっていることがわかる。それにもかかわらず領域全体での誤差分布がそれほど上昇していないということは, *MESH-I* におけるクラック先端部以外の領域での誤差が, *MESH-G* に比較して相対的に小さくなっているということである。

以上のことから, このような特異点を含む問題に対して, 本論文の方法による順応型要素分割法は, J 積分値や応力拡大係数を正確に求める手段等として有効であると結論できる。

7. おわりに

本論文は, ERRAND-FEM による事後誤差評価結果をもとにした, r -method による順応型要素分割法に関する研究を行ったものである。本論文で新たに提案された要素再分割法の妥当性, 有効性が2つの適用例により示された。いずれの場合においても, 工学的な知識をまったく用いない均等分割の有限要素モデルをもとにして, モデルによって異なる値をとるパラメータを用いることなしに, 経験豊かなエキスパートが作成したような有限要素モデルを得ることができた。そして, この順応型有限要素モデルを用いることによって, 要素の自由度を変化させずに誤差の減少や, 応力ピークの上昇といったより信頼性の高い有限要素解を得ることができた。

本方法のフレキシビリティとシンプルさを利用して, 今後は

- (1) より大型かつ複雑な問題への適用
- (2) 3次元問題, 板殻問題への適用ならびに高次要素を用いたモデルへの適用

を行い, さらに要素形状の歪みが大きくなった場合には

- (3) 自動的な k -method との組み合わせ

が行えるようにする必要があると考えられる。ここで用いたスムージングという方法はあくまで補助的なものであり, 今後は要素形状と誤差の定量的な関係を導くための研究がぜひ必要となってくるだろう。いずれにせよ

「より信頼性の高い有限要素解をより効率的に得ること」がわれわれのめざすシステムの目標の1つであり, 本論文で提案した順応型要素分割法がその目標のための1ステップとなることが期待される。

参 考 文 献

- 1) 矢川元基, 吉村忍, 中尾和弘, 曾根田直樹: あいまい知識処理手法による3次元自動要素分割, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第13巻, 日本鋼構造協会, (平成元年7月), pp. 53-58.
- 2) 角洋一, 林重年: 4分木自動分割法のき裂進展経路シ

ミュレーションへの応用, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第13巻, 日本鋼構造協会, (平成元年7月), pp. 41-46.

- 3) 大坪英臣: 有限要素法の最近の動向 (その1)-誤差評価と順応型要素分割-, 日本造船学会誌, 第683号, (昭和61年5月), pp. 21-32.
- 4) D. W. Kelly: The Self-Equilibration of Residuals and Complementary A Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 20, (1984), pp. 1491-1506.
- 5) 岡田哲男: 船体構造に適した自動要素分割法, 造船設計における構造解析と信頼性工学シンポジウム, 日本造船学会, pp. 21-39.
- 6) 大坪英臣, 北村充: 有限要素による平面応力問題の誤差評価と応力修正に関する研究, 日本造船学会論文集, 第165号, (平成元年6月), pp. 225-232.
- 7) 大坪英臣, 北村充: 2次元応力集中問題有限要素解の誤差評価と要素再分割, 日本機械学会論文集(A編), (平成2年掲載予定).
- 8) H. Ohtsubo and M. Kitamura: Element by Element A Posteriori Error Estimation and Improvement of Stress Solutions for Two-Dimensional Elastic Problems, Int. J. Num. Meth. Eng., (Vol. 29, (1990), pp. 223-244.
- 9) A. R. Diaz, N. Kikuchi and J. E. Taylor: A Method of Grid Optimization for Finite Element Methods, Computer Meth. Appl. Mech. Eng., Vol. 41, (1983), pp. 29-45.
- 10) P. Ladeveze, G. Coffignal and J. P. Pelle: Accuracy of Elastoplastic and Dynamic Analysis, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Chapter 11, John Wiley & Sons Ltd., (1986), pp. 181-203.
- 11) O. C. ツィエンキーヴィッツ著, 吉識雅夫・山田喜昭監訳: マトリックス有限要素法, 三訂版, 培風館, 1984, pp. 35-36.
- 12) Y. Kodama: Three-Dimensional Grid Generation around a Ship Hull Using the Geometrical Method, J. Soc. Nav. Arch. of Japan, Vol. 164, pp. 1-8.
- 13) 谷口健男, 太田親: 複数個のき裂進展挙動解析のための要素自動分割法, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第13巻, 日本鋼構造協会, (平成元年7月), pp. 47-52.
- 14) B. A. Szabo: Estimation and Control of Error Based on p Convergence, Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Chapter 3, John Wiley & Sons Ltd., (1986), pp. 61-78.
- 15) 鷲津久一郎他編: 有限要素法ハンドブック (応用編), 培風館, 1983, pp. 326-330.