視界情報による潜水艇の制御情報取得に関する考察

(第 3 報)

正員 石 谷 久*, 馬 場 康 子*

A Study on a Method for Obtaining Control Information from Visual Information (Third Report)

by Hisashi Ishitani, *Member* Yasuko Baba

Summary

In the previous studies, basic methods to estimate motion or attitude of the vehicle(camera), i. e. ego motion, from video image data obtained continuously by a VTR are proposed, and their performances and applicability to the actual images are investigated. By applying an iterative estimating algorithm based on the Extended Kalman Filter to continuous pictures of the ground surface, it is assured that the motion can be estimated with enough stability.

In this study, continuous underwater images are obtained by a ROV, and its motion is estimated by the same algorithm to investigate applicability of the methods for actual use in the water. The accuracy of the estimation is evaluated for various conditions, and that of 0.25 edgree(maximum error) in yaw angle is assured for ordinary images with appropriate landmarks. The necessity of calibration for the edge distortion is pointed out in case very few landmarks exist in the pictures.

1. 緒 言

本研究においては海底面探査を目的とする無人航行型潜水艇^{1-4,8)}で得られる近距離の撮影画像情報に基づいた、潜水艇の精密な位置或は姿勢等の状態推定の可能性に関して基礎的な検討を進めている。まず第 1 報⁵⁾では、VTR, 連続写真撮影などによる画像情報から、制御に必要な位置、姿勢、方位などその移動体(カメラ)の運動を推定する基本的な手法とその適用可能性を検討した。前報⁷⁾では更に連続画像から移動体(カメラ)自体の運動を効率的に推定するために Kalman Filter を応用する手法を示した。そして地上の 2 次元運動から得られた実画像にこれを適用してその実用性を検討した結果、以下の結論を得た。

- (1) 非線形の推定モデルにもかかわらず逐次的な線形近似を行う拡張 Kalman Filter が有効であり、一般的な最小自乗推定の残差項から推定されるパラメータ、 Q , R をそのまま用いることにより充分良好な推定が可能である。
- (2) 画像フレーム間の運動の推定を画像内の任意の点の移動量から逐次に filtering する手法を示し、特に感度の高い

画像周辺から推定することにより、精度を低下させることなく計算量を減少可能なことを確認した。

以上より前報告に示した filtering 手法は単純なモデルにもかかわらず充分実用的で、計算量を相当程度減少可能であることから特に小型演算装置によるリアルタイムの運動推定に適当なものと考えられる。

本研究では更にカメラの姿勢変化の 3 次元運動を考慮した推定モデルに拡張して姿勢変化を含む状態推定手法を検討し、同じ連続画像に適用してその効果を検討した。更に評価の基準となる水中画像を取得し、この手法の実用性の評価を行なったのでその結果を報告する。

2. 3 次元モデルによる地上移動画像への適用

2.1 3 次元モデルの特徴と必要性

前報では連続移動画像からこれを撮影したカメラの動きを推定する手法を図 1 に示すような地上の 2 次元移動装置による VTR 画像に対して適用した結果、基本的には進行方向の速度、或は 2 次元平面内の回転角度を定量的に推定可能なことが確認された。しかしながら移動体が地面の凹凸をうけて上下に振動する際にその上の三脚上のカメラが Pitch 面内で振動するために、2 次元モデルを用いた

* 東京大学工学部

Fig. 1 A 2-Dimensionally Moving Vehicle to get Continuous ground visual pictures

Fig. 2 Estimated Movements & Trajectory of the vehicle obtained by 2 Dimensional Model

推定では図2に示されるように進行前方のX方向に振動するという推定結果(同図(3))を得た。特にフレーム#3, #15-19, #22では大きな振動が発生しているが、現実にはかなり重量があつて慣性も大きい移動体が、前後に振動しながら進行することは不可能であつて、これはカメラのPitch変化を記述しない不十分なモデルに無理に適合した結果による。フレーム#15-19付近では同時に方位方向も左右に大きく振れていて地面がその付近で滑らかでないことを示している。そこで推定精度を向上するために、3次元のカメラの姿勢変化迄を考慮して、実態に即した推定モデルに改善し、これに前報と同様な拡張Kalman Filterを適用した。

3次元モデルは従来の2次元モデルの延長であつて、移動体の記述に一般的に用いられるオイラー角の内のYaw角 ϕ 以外にPitch角 θ , Roll角 ψ を含めたものである。このような3次元モデルに対する基本の推定モデルは付録に示されるように座標回転Tに θ, ϕ が入り、式がやや複雑になる。更に2次元モデルでは推定すべき状態量は2次元の座標値及び方位角、並びに各々の微分値の計6に過ぎないが、3次元モデルでは12自由度であるから、計算量はかなり増加する。この様に推定量が多い場合には画像上の特徴点数が不十分であると推定の自由度は低下するためにその精度も低下して、各画像毎に独立にその動きを推定することは困難となる。特に前述のPitch角とX方向の速度とは相関が高く独立性が少ないので、これを明確に分離することは出来ない。従つて、この様な場合の状態推定は系の

特性に関する事前情報、即ち系の動特性を用いてその適合性をみるfilteringではじめて可能となる。

具体的な3次元モデルによる拡張Kalman Filtering Algorithmでは前述の様に観測値は変化しないにもかかわらず、推定状態量の数が著しく増加する。従つて、感度行列が複雑になり、付録に示すような計算を必要とする。Filterの一般式そのものは文献6と同じであるが、その次数が増えるためにおよそその2乗に比例して計算量は増加する。このような計算量を削減し、推定計算の安定性を増して精度を上げるためには事前に明白で削減可能な推定の自由度は出来るだけ減少しておく必要がある。画像取得装置の構造から、高度Zの変化は僅かであり、またRoll方向の回転も少ないので、現実のfiltering計算ではZ, ϕ についてはシステム誤差を0として事実上一定とした推定を行っている。

2.2 3次元モデルによる推定結果

図3は図2と同一のデータに上述の3次元filterを適用した結果を示している。推定パラメータの内、2次元運動に対応する部分は前報に示した2次元filterのパラメータ、 ϕ, θ に対応するパラメータとしては $q_4 = (0.29^\circ)^2$, $q_5 = (5.7^\circ)^2$ を用いたが、前述の理由からRoll回転、Z方向位置の速度に対応するシステム誤差 q_6, q_3 は0として事実上固定している。

この結果、進行方向Xの速度の推定値の標準偏差は3.06 cm/step から1.29 cm/step (1step=0.6 sec)に減少して、所期の目的通り、一応X方向の振動はPitchとして説明可能なことが確認された。図2と比較すると特に2次元面上の軌跡(同図(1))が滑らかに進行してより自然な運動となる。これに対して同図(4)にはPitch面の振動が僅かに見られ(標準偏差0.123度)、極めて僅かなPitch面内振動がカメラ位置、運動の推定に大きな影響を持つことが示

Fig. 3 Estimated Movements & Trajectory obtained by Extended Kalman Filter with a 3 Dimensional Model

される。但し実際的水中航走体では激しい Pitch 振動は考えられないので、これはむしろ地上モデルの特異性によるものであるが、いずれにしても現実の運動に対応したモデルを用いることによって、推定の精度を向上して、より確かな状態推定が可能になることが確認できた。またこのように自由度の大きい運動の推定を各画像変化毎に直接推定することは困難であって、推定誤差が著しく大きくなるが、filtering の様な手段で運動に関する適当な情報を利用することによって、感度計算が複雑になる以外、それほど大きな計算増加を伴わずに 3 次元的な運動までも分離できることが示された。

3. 水中画像への適用

3.1 画像取得手法

以上、地上の移動体により水中航走体と同様な状況を模擬した連続画像を取得し、その状態推定の可能性を検討して、一応の成果を得た。地上の画像は地上特有の振動の存在等の問題はあがあるが、他方で水中画像は

(1) 現実の ROV による水中画像の流れ等による揺らぎ

(2) 合成樹脂ドームの不均衡な屈折等による画像データの歪

(3) 不明瞭な水底面上の痕跡データでの推定可能性

(4) 移動する照明に照射された目標の推定可能性など状態推定を困難とする特有な要素、問題が存在する。その特性の影響を明確にしてこれを考慮した適用方法を考察するために、本研究においては適当な水中航走体から取得した現実の水中画像により上記の問題点の影響を検討する。なお地上、水中何れの場合でも実際の軌跡が把握しにくく絶対較正が難しいので、その推定精度を検討する場合には絶対的な基準上を走る装置の利用が必要となる。

現実利用可能な水中画像としては、当面水中航走体から撮影した VTR データの実用性が高いことから、図 4 の有索 ROV (三井造船製, RTV 100-26 号機) を実験用水槽で

Fig. 4 A remotely Operated Vehicle RTV 100-26 used to get underwater continuous pictures

航行させて、その撮影画像を用いた。照明は移動体に設置した照明のみが有効であって、実際の深海底面の画像取得の状況に類似している。同図の ROV には前方に市販の VTR が搭載してあって、プラスチック製のドームを通して前方視界を連続撮影可能である。実際にこの画像を操縦者が監視しながら目的地へ移動させている。

実験は前後 2 回行い、1 回目はリモートコントロールで適当な深度を維持するよう努力したが、必ずしも正確には航路を特定できず、推定結果との厳密な照合が完全に行えないことが判明した。そこで第 2 回目は実験水槽上の電車で図 5 に示されるような適当な治具で ROV を固定して曳航し、既知の角度、速度で正確に深度、方位などの経路を維持しつつ、直進経路を維持した。当然電車により直進、

Fig. 5 Equipment to get exact visual pictures by using the ROV fixed to an electric car over the tank

Fig. 6 Original Image of the lattice patterns used for calibration.

無振動、一定高度の画像が得られるので、その推定結果からその変位、回転などの誤差を定量的に評価出来る。また較正用の画像を得るために水底面上に図5の様な30cmの碁盤状の格子を描き、焦点距離、カメラの俯角などの較正を行った。水底からのカメラ高度は1.32m、カメラの中心線の俯角は29°、視野は垂直方向に57°、画像基準軸の俯角は較正画像より56.5°である。

取得される画像はその装置の形態から基本的には前報の地上移動モデルによる画像と同じである。照明が移動して対象への照明角度が変化しても、その影響はそれほど小さくなく、その移動状態は目視で十分に認識できるが、画像の周辺に照明器具の影などが映るのでマッチングを行う際にこれを省くなどの細かい注意が必要である。また図5の格子を撮影した図6の較正用の写真によると、ドームの不均等性に基づく屈折の影響で画像の周辺収差はかなり大きくなるが、実用性を考えると周辺収差のない光学機器的な装置を製作するよりもソフト的に対応してこれを補正することが必要である。補正曲線は図7に示され、比較的簡単なテーブルで実現出来る。図7における横軸、縦軸は、それぞれ画面上の縦方向(進行方向)位置並びにこれを歪補正した位置を、画像全体のサイズで正規化したスケールで示している。歪がなければ、これは45度方向の一点鎖線に一致する。なお画像位置0.8以上に相当する範囲は水平面より上方に当り、水平航行では画像目標は存在しない。

3.2 適用結果

今回得られたVTR画像の内、比較的鮮明な画像の1例を図8に示す。基本的にはこの様な画像による運動の推定は地上の場合と大差はなく正面のカメラでは水流によるゆらぎは殆ど影響しない。他方で海底面上の状況にもよるが全般にマッチング目標となる特徴が少ないために移動検出は時として困難となることが予想される。図8の画像について第1報と同様な3原色の構成を分析した結果を表1に

Fig. 7 Calibration Curve for Edge Distortion

Fig. 8 An Example of comparatively clear underwater image in blue component

Table 1 Analysis of Color Correlation for a Picture of the Bottom of the Tank

primary colors	red	green	blue
μ (average)	16.72	17.51	12.60
σ (standard deviation) (unit: brightness*)	8.22	8.42	5.33
color correlation	$r \cdot g$	$g \cdot b$	$b \cdot r$
correlation coef.	0.9770	0.8785	0.8971
primary components	$\lambda 1$	$\lambda 2$	$\lambda 3$
eigen values	2.8358	0.1423	0.0220
$\mathbf{v}$ (eigen vectors) r	-0.5818	-0.4618	0.6695
g	-0.5855	-0.3336	-0.7388
b	-0.5645	0.8219	0.0763

*normalized brightness : 0:min(black)~64:max(white)

示す。第1報の画像は深海の実画像であったが、今回の深度2m程度の画像でも既に青色の特徴が出ていることが確認された。前回と同様に第1主成分が画像の特徴を殆ど(95%)説明しており、3原色間の相関係数も強いが、青がやや特異で相関が心持ち低い。これは地上の画像が一般に緑が主であることに対応するものとみられる。これに対して、第2主成分の分散は前回よりもかなり大きく、前と同様に特に青成分との相関が強く、結局、第2主成分迄の寄与率は3色とも殆ど変わらず、僅かに青が大きくなる。一般に照明の反射光による明暗に依存する第1主成分と直交する第2主成分は、その中の細かいパターンの特徴を示すことが多いのでこれに相関の強い青成分は現在の目的に最も適した成分と見なされる。実際に運動を推定した場合も青色成分は赤、緑色各成分の画像に比べてその移動量を算定する場合のミスマッチングも少なく精度の良い結果が得られることが確認されている。

次に動画像による状態推定として、まず最も明瞭な目標

が得られる格子を視界に納められる図5の位置から定速度で移動した場合の連続画像に基づいてその運動を推定した結果を図9以下に示す。画像は図6に示されるようにほぼ左右対称であって、明暗も非常に明確であるから最も推定しやすい状況となる。実際に推定結果もミスマッチングは殆どないので、画像取得、変換装置等の量子化の誤差など現在利用しているハードウェアの限界による推定誤差が示される。この場合、方位角とY方向変位は推定誤差であるが、進行速度の変動には現実のサンプリング間隔の変動も含まれる。

図9は取得画像が2次元運動であるという情報に基づき2次元モデルで画像フレーム毎に独立に推定した結果を示している。同図(1)の軌跡の推定結果からカメラは基本的には直進したと推定された様子が示されるが、方位方向の推定誤差により軌跡が直線からはずれる。最も重要な方位誤差は標準偏差0.139度、最大0.526度となり、後者は量子化誤差に対応する限界値と見なせる。

更にこの運動は直進、等速運動であるという情報を用いてfilteringを行えばその誤差は当然減少可能である。特にこの場合は非常に単純化された運動なのでこの情報を用いれば幾らでも精度を改善出来るが、現実的な数値として残差項から推定したパラメータを用いてfilterを適用した結果を図10に示す。ここでは q_1, q_2, q_3 として、各々 $(0.001 \text{ m})^2$, $(0.001 \text{ m})^2$, $(0.029^\circ)^2$ を用いている。この結果、推定結果の横方向運動の誤差は独立に推定した場合の1/2以下

の0.05度(最大0.233度)に改善される。最終的な推定軌跡の誤差としては、約50step迄の推定軌跡が最大変位0.028m(1.5%)内に収まりこれが推定精度を与える。最後の10stepの乱れは水底面から浮き上がっている格子板の固定用ロープが前面に現れた影響と考えられ、対象物体が想定した深度に無い場合の補正が必要なることを示している。

次に、より現実的な図8に示される程度の水底面パターンが連続する状況に適用した結果を示す。図11は独立に推定した結果であって、図9とほぼ同様の結果であるが、目標が不明瞭なため ϕ の誤差が拡大している。特にフレーム#10-20で大きな誤差を生じる。これに対してfilterをかけた結果が図12に示され、 ϕ の誤差は相当程度改善される。Filtering前後の ϕ の誤差は標準偏差(最大値)0.258度(1.12度)が0.045度(0.25度)に改善される。この結果、目視で十分認識可能な程度のパターンが存在するとfilteringにより、十分明瞭な格子状パターンの存在する前例の場合とほぼ同様な推定精度を得られることが確認された。

最後に更に不明瞭なパターンであって、特に図13に示されるように視野の片側に目標が偏在した状況の連続する画像に適用した結果を図14以降に示す。これは明確な目標が存在しないためにミスマッチングも多く、しかも目標点数が少ないために精度が著しく低下する例である。特にフレーム#20-40では角度誤差が大きくしかも一方向に偏って出ることが特徴的である。これはパターンが非対称になって、屈折の影響などの誤差が左右相殺されずに偏差として

Fig.9 Estimated movement and trajectory of the vehicle estimated independently by each frame of the lattice pattern images

Fig.10 Filtering result of the previous data

Fig.11 Estimated results obtained independently by normal patterns shown in Fig. 8

Fig.12 Filtering results of the previous data

Fig.13 An Example of obscure underwater image where landmarks exist only on the righthand side.

Fig.14 Estimated results obtained independently by poorly characterized patterns

Fig.15 Filtering results of the previous data

残ることを示している。当然ながら、 ΔY 、 $\Delta \phi$ は相関が強いので結果としての軌跡は誤差も大きく、一方に回転する傾向を示す。これも filtering の結果、図15に示されるように絶対値としてはかなり改善されるが、前述の傾向はやはり平均値として残るために全体として一方向に偏った推定結果となり、同時に方位もずれるので以後の経路の精度は保証されなくなる。

図16(a)は同じデータに対して図7による歪補正を行った推定結果の内、カメラの軌跡と方位角の誤差を示す。

Fig.16 Results of the estimation from the same image with calibration for the edge distortion

この補正でもまだ完全に偏りは解消しないが、同図(2)の $\Delta \phi$ の変化を図14(2)と詳細に比較すると全体として偏りがやや解消していること、従って軌跡の偏りも減少していることが認められる。図16(b)の Filtering の結果はこれが一層滑らかになることを示している。現在の補正は画像上の縦方向(Y軸)のみを補正しているが、図6の画像には横方向にも歪が変化することが示されている。従って、正確な校正用の画像を求め、2次元各座標に対応した詳細な補正を行う必要があるが、少なくとも1次元補正のみでも相当程度一方向に偏った誤差が解消されることは確認された。いずれにしても目標が少ない場合には事前情報を有効に用いるという filter 本来の主旨からも filtering は必須であり、実際に効果的であることが確かめられた。

4. 結 言

連続画像から移動体(カメラ)自体の運動を効率的に推定するために拡張 Kalman Filter を応用する手法を示し、地上の運動画像、並びに水中画像にこれを適用してその実用性を検討した。この結果から特に実際の水中画像への利用について以下の結論を得た。

(1) 地上の2次元運動では地面の凹凸による Pitch 面内運動が発生するので、本来発生していない筈の進行方向速度変動の標準偏差は平均速度の30%近くになる。これを考慮した3次元的な filtering 手法を導入することによりこれは1/2以下の13%程度に減少して、Pitch 変化として説明可能なことが確認された。

(2) 自由度の大きい運動の推定を各画像変化毎に直接推定することは困難であるが、filtering 等で運動に関する情報を利用することによって、感度計算の増加以外、それほど大きな計算増加を伴わずに3次元的な運動までも分離可能である。

(3) 水中画像に対して同様な手法を適用することによりその精度、実用性を確認した。水中画像の特徴は固定目標が

少なく、また屈折による画像歪が避けられないが、人為的な目標が存在するような場合には、最大方位角誤差 0.23 度 (標準偏差 0.05 度) の精度で運動を推定可能なことが確認された。より一般的な状況でも適当に分散した目標が散在すれば、基準パターンが存在する場合と同程度の精度 (最大方位角誤差 0.25 度) で推定可能である。

(4) 目標が視野の片側に偏在するような場合には非対称性のために誤差が一方に偏る。この場合、非線形な屈折歪の補正が有効であるが、これを完全に補正するためには厳密な 2 次元的な較正が必要である。

以上から本論で示した filtering 手法は比較的簡単な計算により、水中画像からそのカメラの運動を 2 次元的、或は 3 次元的に推定可能である。この手法により画像取得可能な ROV では、得られた画像から方位角を 0.25 度以内 (標準偏差 0.05 度) の精度で検出可能であって、方位保持等の自動化にも有効なことが示された。但し、マッチング目標が少ない場合には、屈折の影響を避けるために出来るだけ目標を十分に囲むことが必要である。このためには照度をあげて明るい画像を選ぶこと、水底のパターンに対して適切な焦点距離と感度を選ぶことなどが必要となる。特に視野を広く、小領域の細かいパターンで感度良く画像のマッチングをとることが精度向上に有効である。

一般に現在得られる精度の方位検出では長距離にわたる航行に対して絶対的な方向、位置の検出は困難なので、海上支援による音響センサーとの組合せ、これが困難な場合には自律的で長時間にわたって安定な安価なセンサーである地磁気センサー等と組み合わせた利用が必要である。他方で海底面の作業など同一エリアに停滞して作業を行う場合には、基準画像とのマッチングによって、長時間でも誤差は蓄積しにくく、目標の補正なども可能となる。一般的なロボットの位置標定の手法と組み合わせて慣性センサー等のドリフト誤差の補正をおこなう可能性について更に検討を進めて行きたい。

終わりに当たり平素より本研究につき種々御検討、御助言いただき、また今回の水中画像取得実験に全面的に御協力頂いた三井造船株式会社、大桑義昭氏、田淵寛氏、三井造船昭島研究所、湯浅肇氏に深謝の意を表したい。

参 考 文 献

- 1) 浦, 大坪: グライダー型潜水艇の設計に関する研究 (その 3), 生産研究 (東京大学生産技術研究所報告), 39-5(1987) 183/186.
- 2) 浦, 大坪: 航行型無索無人潜水艇に関する研究 (その 1), 造船学会論文集, 第 162 号 (1987).
- 3) 石谷: 無人潜水艇の高度維持制御に関する考察 (第 1, 2 報), 造船学会論文集, 第 159 号 (1986), 第 161 号 (1987).
- 4) 石谷, 馬場: 翼状航行型無人潜水艇の姿勢制御に関する考察, 造船学会論文集, 第 162 号 (1987).
- 5) 石谷, 馬場: 視界情報による潜水艇の制御情報取得

に関する考察 (第 1 報), 造船学会論文集, 第 164 号 (1988).

- 6) 石谷, 竹内: 搬送用移動体の姿勢制御, 日本シミュレーション学会誌, Vol. 6-3, (1987).
- 7) 石谷, 馬場: 視界情報による潜水艇の制御情報取得に関する考察 (第 2 報), 造船学会論文集, 第 166 号 (1989).
- 8) Attitude Control System of a Streamlined Cruising type Autonomous Submersible, H. Ishitani, Y. Baba & T. Ura, Proc. of 6th Int. Nat. Symposium on Unmanned Untethered Submersible Tech., June, 1989.

付録 3 次元拡張 Kalman Filter における座標変換と感度の計算

1) 座標変換

座標系を x (前方), y (進行右側), z (下方) の右手系, ϕ は z 軸廻り回転角 (上からみて時計方向に正), θ は y 軸回転角 (上向きに正となるので一般の下前方監視では θ は負となる), ψ は x 軸回転角とする。

移動体に固定したカメラの座標を $\mathbf{x}_c = (x_c, y_c, z_c)^t$, 姿勢を (ϕ, θ, ψ) (Yaw, Pitch, Roll) とすると、慣性座標系における点 p の位置座標 $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$ はカメラ座標系では

$$\mathbf{x}' = T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_c)$$

と表わされる。ここで、 $T = T_3(\psi)T_2(\theta)T_1(\phi)$ は次の様な座標回転行列を表す。

$$T_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

焦点 f のカメラによる画像上の座標はカメラ中心を原点とすれば

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f/x' \cdot y' \\ f/x' \cdot z' \end{bmatrix}$$

と写影される。

2) 感度行列計算

感度行列 $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}_c$ は

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}_c} = \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}_c}$$

と書ける。ここで $\partial \mathbf{x}' / \partial \mathbf{x}_c$ は移動と姿勢に対応する部分行列に分けて

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}_c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}_c} & \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \Theta} \end{bmatrix}$$

となる。このうち移動については

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}_c} = -T_3 T_2 T_1 E$$

である。姿勢については ϕ, θ, ψ それぞれの (3×1) 行列を組み合わせ

$$\frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} T_3 T_2 \frac{\partial T_1}{\partial \phi} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), T_3 \frac{\partial T_2}{\partial \theta} T_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c), \\ \frac{\partial T_3}{\partial \psi} T_2 T_1 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \end{bmatrix}$$

と表すことができる。また $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}'$ については

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}'} = \begin{bmatrix} -f/x'^2 \cdot y', & f/x', & 0 \\ -f/x'^2 \cdot z', & 0, & f/x' \end{bmatrix}$$

となるので、これらの式を用いて感度行列 $\partial \mathbf{y} / \partial \mathbf{x}_c$ が計算される。