振動方程式の特性行列の同定に関する研究

(その 2, 実験結果を用いた解析)

正員 道 本 順 一* 正員 信 川 寿*

Identification of Characteristic Matrices in Vibration Equation
(2nd Report, Identification of Characteristic Matrices from Measured Results)

by Jun-ichi Michimoto, *Member* Hisashi Nobukawa, *Member*

Summary

A new method to identify the characteristic matrices from the response of the vibration system (transfer function) was proposed in the 1st report, and the accuracy of the proposed method was confirmed by the calculation using the transfer function without any experimental error.

In this report, the characteristic matrices of a cantilever beam and a free-free beam are identified from the measured transfer function having some experimental error. When the transfer function containing sufficient information about the vibration system is used for identification, the characteristic matrices are accurately identified from the measured results containing some error, and the accuracy of the proposed method is confirmed again.

Next the characteristic matrices of whole structure is derived by combining the experimentally or theoretically identified characteristic matrices of two sub-structures. The transfer function calculated using combined characteristic matrices of whole structure is a little different from the measured results. Because this difference is caused by the error in the identified characteristic matrices of the sub-structures, for the practical application of this estimating procedure the more accurate approach based on the proposed identification method must be developed.

1. 緒 言

構造物の振動系の同定法としては、理論的同定法と実験的同定法の 2 つが考えられている。理論的同定法は、構造物を計画する段階で完成した後の振動特性を推定するためや、完成後にトラブルが発生したときにその原因を明らかにし、対策を立案するための検討材料を得るためなどに使われているが、構造物で大型で複雑になると振動系の同定には多くの時間と経費が必要となる。一方、実験的同定法は、完成した構造物の振動特性を把握するためや、理論的同定法で計画時に予測した振動特性を検証するために用いられるが、理論的同定法同様、トラブルが発生したときの対策を立案するためにも使われる。

実験的同定法は次のような 2 つの方法に大別される。1 つは、固有振動数、固有振動モード、モード減衰比などの

モード特性の同定法であり、実験モード解析とも呼ばれている。モード解析の考え方は古くからあったが、FFT (高速フーリエ変換) 解析の実用化とコンピュータの低価格化、高性能化にともなって急速に研究が進められ、従来のモード解析から派生した広範な領域を包含する解析法として体系化^{1),2)} されるまでになっている。モード特性は振動現象を理解するうえでは便利であるが、剛性や質量などの物理特性とモード特性の関連が陽には表されないで利用に制限を受ける。

いま 1 つの方法は、剛性行列、質量行列、減衰行列などで代表される物理モデルの同定法である。実験的に特性行列 (剛性行列、質量行列、減衰行列) を同定する試みが国の内外^{3)~9)} でなされているが、実験誤差を含む実験結果から真の特性を同定することが難しいことから、まだ実用の段階にまで至っていないのが実状である。特性行列が精度良く同定されると、構造部材の追加、変更と振動特性の変化なども直接検討することができ、同定した剛性行列は静

* 広島大学工学部

的強度解析に使うこともできる。また、一部の非常に複雑な構造要素については、その特性行列を実験的に同定し、その他の構造要素については理論的に特性行列を同定して、それらを合成して全体構造の特性を推定することも可能となる。

前報¹⁰⁾では、実験的に振動方程式の特性行列を同定する新しい計算方法を提案した。そして、数値実験により得られた起振力と振動応答を用いて特性行列を同定して、提案した計算法の精度を検討した。本論文では、実際に振動実験を行って計測した起振力と振動応答から得た実験誤差を含む伝達関数の実験結果を用いて振動方程式の特性行列を同定することを試み、提案した計算法の精度を調べた。また、実験的あるいは理論的に同定した部分構造の特性行列を合成して全体構造の特性を推定する方法の精度についても検討を加えた。

2. 計 算 法

前報¹⁰⁾で計算法は詳しく説明しているので、ここでは計算の要点のみの説明にとどめる。有限要素法などの離散化手法を適用して構造物の振動を計算するときの振動方程式は、一般粘性減衰を仮定すると次のような多自由度系の運動方程式になる。

$$[M]\{\dot{\phi}\} + [C]\{\dot{\phi}\} + [K]\{\phi\} = \{F\} \quad (1)$$

ここで、 $\{\phi\}$ ：応答変位ベクトル、

$\{F\}$ ：起振力ベクトル、

$[K]$ ：剛性行列、 $[M]$ ：質量行列、

$[C]$ ：減衰行列。

いま、円振動数 ω_i の周期的な起振力

$$\{F\} = \{\{F_R\}_i + j\{F_I\}_i\} e^{j\omega_i t} \quad (2)$$

で起振したときの振動応答を

$$\{\phi\} = \{\{\phi_R\}_i + j\{\phi_I\}_i\} e^{j\omega_i t} \quad (3)$$

と表す。ここで、 $j = \sqrt{-1}$ であり、 t は時間である。また、 $\{\phi_R\}_i, \{F_R\}_i$ は振動応答および起振力の実数部であり、 $\{\phi_I\}_i, \{F_I\}_i$ は虚数部である。(2)、(3)式を(1)式に代入し、実数部と虚数部の関係を求めると次のような関係が得られる。

$$\begin{bmatrix} [K] - \omega_i^2 [M] & -\omega_i [C] \\ \omega_i [C] & [K] - \omega_i^2 [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\phi_R\}_i \\ \{\phi_I\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_R\}_i \\ \{F_I\}_i \end{Bmatrix} \quad (4)$$

(4)式は円振動数 ω_i の起振力で起振したときの関係式である。

振動実験で計測した起振力と振動応答から(4)式中の特性行列を同定することを試みる。振動実験で計測される起振力と振動応答の両方に誤差が含まれているとするのが一般的であるが、ここでは、起振力には誤差が含まれておらず、振動応答に偶然誤差のみが含まれているとする。一般に、衝撃加振あるいはランダム波加振実験などでは、計測した起振力と振動応答を2チャンネルのFFTアナライザで解析して入力(起振力)と出力(振動応答)との間の伝

達関数を求める。伝達関数は単位起振力で起振したときの振動応答に相当するので、伝達関数を用いて特性行列を同定する場合には、計測した伝達関数に誤差が含まれているとする。

振動実験で計測した起振力 $\{F_R\}_i, \{F_I\}_i$ に誤差が含まれていないとすると、特性行列を何らかの方法で推定すると、その特性行列に対応した振動応答が(4)式から計算できる。なお、特性行列の推定値は同定計算の初期値になるものであり、繰返し計算によって修正されるので必ずしも実際の現象を正確に表す必要はなく適当に与えて差し支えない。いま、このような特性行列の初期値を $[\bar{K}], [\bar{M}], [\bar{C}]$ として、これらを用いて計算される応答を $\{\bar{\phi}_R\}_i, \{\bar{\phi}_I\}_i$ とすると、それらの間には次の関係が成り立っている。

$$\begin{bmatrix} [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] & -\omega_i [\bar{C}] \\ \omega_i [\bar{C}] & [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}_R\}_i \\ \{\bar{\phi}_I\}_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_R\}_i \\ \{F_I\}_i \end{Bmatrix} \quad (5)$$

先にも述べたが、特性行列の初期値は実際の現象を表す必要がないので、それを用いて計算した応答は実験で計測された応答とは一致しないのが一般的である。いま、(5)式を次のように表しておく。

$$[\bar{A}]\{\bar{\phi}\}_i = \{F\}_i \quad (6)$$

ここで、

$$[\bar{A}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] & -\omega_i [\bar{C}] \\ \omega_i [\bar{C}] & [\bar{K}] - \omega_i^2 [\bar{M}] \end{bmatrix}, \quad \{\bar{\phi}\}_i = \begin{Bmatrix} \{\bar{\phi}_R\}_i \\ \{\bar{\phi}_I\}_i \end{Bmatrix}, \quad \{F\}_i = \begin{Bmatrix} \{F_R\}_i \\ \{F_I\}_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

である。

実験で計測した振動応答を $\{\phi\}_i$ 、その中に含まれている実験誤差を $\{\phi_n\}_i$ とすると、真の応答は $\{\phi\}_i - \{\phi_n\}_i$ で表される。そして、(5)式で仮定した特性行列の初期値に $[\Delta K], [\Delta M], [\Delta C]$ の修正を考慮して得られる応答が真の応答に等しくなるとすると、

$$[[\bar{A}] + [\Delta A]]\{\phi\}_i - \{\phi_n\}_i = \{F\}_i \quad (8)$$

の関係が成り立つ。ここで、

$$[\Delta A] = \begin{bmatrix} [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] & -\omega_i [\Delta C] \\ \omega_i [\Delta C] & [\Delta K] - \omega_i^2 [\Delta M] \end{bmatrix} \quad (9)$$

である。(6)式と(8)式の右辺の起振力ベクトルは等しいので、それらの差より次のような関係が得られる。

$$\{\phi_n\}_i = \{\phi\}_i - \{\bar{\phi}\}_i + [\bar{A}]^{-1} [\Delta A] \{\phi\}_i \quad (10)$$

実験で計測した応答に含まれている誤差が小さい場合には、

$$\{\phi\}_i - \{\phi_n\}_i \approx \{\phi\}_i \quad (11)$$

と近似できるので、(10)式は、

$$\{\phi_n\}_i = \{\phi\}_i - \{\bar{\phi}\}_i + [\bar{A}]^{-1} [\Delta A] \{\phi\}_i \quad (12)$$

のように表される。(12)式は、円振動数 ω_i のときの誤差ベクトルであるが、複数个の周波数点について同様に誤差ベクトルを求め、そして最小2乗法を適用して実験で計測された応答を最もよく表す特性行列の修正量 $[\Delta K], [\Delta M], [\Delta C]$ を求める。なお、最小2乗法の計算においては、実験

で計測した応答振幅の2乗の逆数を重み関数として用いた。特性行列の修正量が得られると先に仮定した特性行列の初期値に修正量を加えて、

$$\begin{aligned} [K] &= [\bar{K}] + [\Delta K] \\ [M] &= [\bar{M}] + [\Delta M] \\ [C] &= [\bar{C}] + [\Delta C] \end{aligned} \quad (13)$$

により、実験結果をより良く表すことができる特性行列が同定できる。しかし、1回の計算では不十分であるので、(13)式で得られた特性行列を新たな初期値として以上の計算を繰り返し、(13)式の特性行列を用いて計算される振動応答と実験で計測した振動応答の一致の状態を見ながら誤差の2乗和が最小になった時点で計算を終了させる。

以上に示した計算法では、何らかの方法で特性行列の初期値を推定しなければならないが、ここでは大熊・長松の第1報³⁾の方法を用いて初期値を計算した。

3. 実験法および対象

3.1 実験計測

実験計測システムをFig.1に示す。力変換子付きのインパクトハンマで試験体を衝撃加振し、そのときの試験体の応答を加速度計で計測する。計測された起振力および加速度信号はチャージ増幅器で増幅し、2チャンネルのFFTアナライザに送る入力(起振力)と出力(加速度)の間の伝達関数を所定の周波数間隔で計算する。得られた伝達関数の実数部と虚数部の数値をGPIOを介してパーソナルコンピュータに送り特性行列の同定計算に用いる。使用したチャージ増幅器には積分回路が内蔵されており加速度計で計測した加速度信号を2回積分して変位信号に変換できるが、そのようにして求めた変位と起振力との間の伝達関数(コンプライアンス)のコヒーレンスは、加速度と起振力との間の伝達関数(アクセラランス)のコヒーレンスに比べて低下していた。そこで、より実験誤差の割合の小さい伝達関数を得るために、チャージ増幅器の積分回路を使わずに加速度信号を用いてアクセラランスを計測し、その値を円

Fig. 1 Scheme of measurement setup

Fig. 2 Beams used in experiments

振動数 ω_i の2乗で割りコンプライアンスに変換して特性行列の同定計算に用いた。また、FFTアナライザによる解析に際しては、インパクトハンマの信号をトリガとして使用したが、1回の解析時間内に1回の打撃ではインパクトのパワーが小さく、精度の低下が懸念されたので、不規則にインパクトハンマで連続打撃して1回の解析時間内に2~3回の打撃が入るようにした。さらに、実験誤差を平均化する目的で同様な実験を16回繰り返して行い、得られた伝達関数を平均した値を伝達関数の計測値とした。

3.2 実験対象

Fig.2(a), (b)の片持梁および両端自由梁のそれぞれ単独の衝撃加振実験、およびそれらの梁をFig.2(c)に示すように③および④の点で小ネジにより結合した梁の衝撃加振実験を実施した。これら2本の梁はともに、幅40mm、厚さ7.3mmで、材質は軟鋼である。Fig.2(a)の片持梁に対しては、図中の③から⑥の点を起振したときの各点の伝達関数を計測し、Fig.2(b)の両端自由梁も同様に図中の①から④の点を起振したときの各点における伝達関数を計測して特性行列の同定計算に用いた。なお、両端自由梁の加振実験は、梁の振動特性に影響を及ぼさないであろうと考えられる柔らかいスポンジの上に梁を置いて行った。また、Fig.2(c)のように2本の梁を結合したときには①から⑥の点をそれぞれ起振したときの各点の伝達関数を計測して計算値と比較した。特性行列の同定計算に当たっては、Fig.2(a), (b)の梁の場合には、ともに4自由度の振動として取り扱い、Fig.2(c)のように結合したときには6自由度の振動として取り扱った。

4. 解析結果

4.1 片持梁の特性行列の同定

本論文で提案している特性行列の同定計算法では、何らかの方法で特性行列の初期値を推定しなければならない

Table 1 Characteristic matrices of cantilever beam identified by 1st report of Okuma and Nagamatsu

$$\begin{aligned}
 [K] &= \begin{bmatrix} 0.4012 \times 10^3 & -0.6608 \times 10^3 & 0.6126 \times 10^3 & 0.4906 \times 10^3 \\ -0.6608 \times 10^3 & 0.1575 \times 10^4 & -0.6147 \times 10^3 & -0.1114 \times 10^4 \\ 0.6126 \times 10^3 & -0.6147 \times 10^3 & 0.9154 \times 10^3 & 0.1471 \times 10^3 \\ 0.4906 \times 10^3 & -0.1114 \times 10^4 & 0.1471 \times 10^3 & 0.2150 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 [M] &= \begin{bmatrix} 0.1887 \times 10^{-3} & 0.7216 \times 10^{-4} & -0.4170 \times 10^{-4} & 0.5690 \times 10^{-5} \\ 0.7216 \times 10^{-4} & 0.2622 \times 10^{-3} & 0.8164 \times 10^{-4} & -0.6174 \times 10^{-4} \\ -0.4170 \times 10^{-4} & 0.8164 \times 10^{-4} & 0.1531 \times 10^{-3} & 0.1542 \times 10^{-3} \\ 0.5690 \times 10^{-5} & -0.6174 \times 10^{-4} & 0.1542 \times 10^{-3} & 0.1659 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} -0.7582 \times 10^{-3} & 0.6036 \times 10^{-3} & -0.7666 \times 10^{-3} & 0.1418 \times 10^{-2} \\ 0.6036 \times 10^{-3} & 0.1256 \times 10^{-1} & -0.2900 \times 10^{-2} & 0.2489 \times 10^{-2} \\ -0.7666 \times 10^{-3} & -0.2900 \times 10^{-2} & 0.6333 \times 10^{-2} & 0.8963 \times 10^{-3} \\ 0.1418 \times 10^{-2} & 0.2489 \times 10^{-2} & 0.8963 \times 10^{-3} & 0.8037 \times 10^{-2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

が、ここでは大熊・長松の第1報³⁾の方法を適用して特性行列の初期値を求めた。前報¹⁰⁾で示したように、特性行列の同定計算に用いる伝達関数に誤差が含まれていないときには、大熊・長松の第1報の方法でも特性行列が精度良く同定できる。しかし、伝達関数に含まれる誤差が大きくなると同定の精度が極端に悪くなることが第2報⁴⁾に報告されている。いま、Fig. 2(a)の片持梁の③の点を起振したときの③から⑥の点までの4個の点における伝達関数の実験結果を用いて、大熊・長松の第1報の方法で特性行列を同定すると Table 1 に示す結果が得られた。なお、計算には、10 Hz から 1000 Hz までの 100 個の等間隔な周波数点における実験結果を用い、作意的に実験誤差が小さい周波数点や、応答が大きくなる周波数点の実験結果を用いることはしなかった。同定した Table 1 の特性行列を用いて計算した伝達関数と実験結果を比較した1例として、③の点を起振したときの③の点の伝達関数を示すと Fig. 3 のようになる。同図を見ると、伝達関数の実験値に含まれる誤差はあまり大きくなく、大熊・長松の第1報の方法でも実験で計測した伝達関数の特徴を比較的良く表す特性行列が同定できている。しかし、振動数が高くなると同定した特性行列から計算した値と実験結果の差が次第に大きくなる傾向にある。

Fig. 3 Transfer function of cantilever beam calculated using characteristic matrices of Table 1 (Excited point : ③, Measured point : ③)

Table 2 Characteristic matrices of cantilever beam identified using transfer function excited on point ③

$$\begin{aligned}
 [K] &= \begin{bmatrix} 0.5432 \times 10^3 & -0.9790 \times 10^3 & 0.1730 \times 10^3 & 0.5718 \times 10^3 \\ -0.9790 \times 10^3 & 0.2334 \times 10^4 & -0.9541 \times 10^3 & -0.1470 \times 10^4 \\ 0.1730 \times 10^3 & -0.9541 \times 10^3 & 0.9038 \times 10^3 & 0.5130 \times 10^3 \\ 0.5718 \times 10^3 & -0.1470 \times 10^4 & 0.5130 \times 10^3 & 0.1917 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 [M] &= \begin{bmatrix} 0.2043 \times 10^{-3} & 0.6743 \times 10^{-4} & -0.5540 \times 10^{-5} & -0.1098 \times 10^{-4} \\ 0.6743 \times 10^{-4} & 0.2889 \times 10^{-3} & 0.6169 \times 10^{-4} & -0.1047 \times 10^{-3} \\ -0.5540 \times 10^{-5} & 0.6169 \times 10^{-4} & 0.2382 \times 10^{-3} & 0.1480 \times 10^{-3} \\ -0.1098 \times 10^{-4} & -0.1047 \times 10^{-3} & 0.1480 \times 10^{-3} & 0.1530 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} -0.2239 \times 10^{-2} & 0.7061 \times 10^{-3} & -0.8479 \times 10^{-2} & 0.8869 \times 10^{-2} \\ 0.7061 \times 10^{-3} & 0.1253 \times 10^{-1} & 0.1677 \times 10^{-1} & -0.6504 \times 10^{-2} \\ -0.8479 \times 10^{-2} & 0.1677 \times 10^{-1} & -0.5607 \times 10^{-2} & 0.3356 \times 10^{-2} \\ 0.8869 \times 10^{-2} & -0.6504 \times 10^{-2} & 0.3356 \times 10^{-2} & -0.8796 \times 10^{-2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Fig. 4 Transfer function of cantilever beam calculated using characteristic matrices of Table 2 (Excited point : ③, Measured point : ③)

Table 1 の特性行列を本論文で提案した同定計算の初期値にして、③の点を起振したときの③から⑥の点までの4点における伝達関数を用いて特性行列の同定計算を行った。同定計算を4回繰り返した後の特性行列の同定結果を Table 2 に示す。なお、ここでは特性行列は対称行列であるとし、最小2乗法の重みとしては実験で計測された伝達関数の振幅の2乗の逆数を用いている。同定された Table 2 の特性行列を用いて③の点を起振したときの③の点の伝達関数を計算して実験値と比較した結果を Fig. 4 に示す。Table 1 と Table 2 は全く同じ伝達関数の実験値を用いて

Table 3 Characteristic matrices of cantilever beam identified using transfer function excited on four (③~⑥) points

$$\begin{aligned}
 [K] &= \begin{bmatrix} 0.6639 \times 10^3 & -0.1301 \times 10^4 & 0.2392 \times 10^3 & 0.7707 \times 10^3 \\ -0.1301 \times 10^4 & 0.3212 \times 10^4 & -0.1494 \times 10^4 & -0.1336 \times 10^4 \\ 0.2392 \times 10^3 & -0.1494 \times 10^4 & 0.2001 \times 10^4 & -0.6959 \times 10^3 \\ 0.7707 \times 10^3 & -0.1336 \times 10^4 & -0.6959 \times 10^3 & 0.3651 \times 10^4 \end{bmatrix} \\
 [M] &= \begin{bmatrix} 0.1807 \times 10^{-3} & 0.8646 \times 10^{-4} & -0.8208 \times 10^{-4} & 0.7818 \times 10^{-4} \\ 0.8646 \times 10^{-4} & 0.4120 \times 10^{-3} & 0.5903 \times 10^{-4} & -0.9404 \times 10^{-4} \\ -0.8208 \times 10^{-4} & 0.5903 \times 10^{-4} & 0.2019 \times 10^{-3} & 0.1738 \times 10^{-3} \\ 0.7818 \times 10^{-4} & -0.9404 \times 10^{-4} & 0.1738 \times 10^{-3} & 0.1617 \times 10^{-3} \end{bmatrix} \\
 [C] &= \begin{bmatrix} 0.3759 \times 10^{-3} & 0.3234 \times 10^{-2} & 0.5949 \times 10^{-2} & -0.5441 \times 10^{-2} \\ 0.3234 \times 10^{-2} & 0.1945 \times 10^{-1} & -0.1263 \times 10^{-1} & 0.4254 \times 10^{-2} \\ 0.5949 \times 10^{-2} & -0.1263 \times 10^{-1} & 0.1808 \times 10^{-1} & -0.7711 \times 10^{-2} \\ -0.5441 \times 10^{-2} & 0.4254 \times 10^{-2} & -0.7711 \times 10^{-2} & 0.3592 \times 10^{-1} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Fig. 5 Transfer function of cantilever beam calculated using characteristic matrices of Table 3 (Excited point : ③, Measured point : ③)

同定した特性行列であり、それらを用いて計算した Fig. 3 と Fig. 4 の伝達関数を比較すると、本論文の方法により伝達関数の特徴を精度良く表す特性行列が同定できることがわかる。

次に、③から⑥まで4点をそれぞれ起振したときの③から⑥の伝達関数を用いて、同定計算を4回繰り返して求めた特性行列を Table 3 に示す。また、得られた特性行列を用いて計算した③の点を起振したときの③の点の伝達関数と実験値を比較した結果を Fig. 5 に示す。Table 3 の特性行列は4個の点をそれぞれ起振した時の伝達関数を用いて同定した結果であり、Table 2 の特性行列を同定したときに比べてより構造の特性を多く含む伝達関数を用いているが、同定計算に用いる伝達関数の数が少ない Fig. 4 の結果に比べて Fig. 5 の方が計算値と実験結果の一致は悪くなっている。この理由としては、同定計算に用いる伝達関数の数を増やしたことにより全体の特性は良く表す特性行列が同定されたが、その結果として個々の伝達関数の一致が多少悪くなったことが考えられる。また、片持梁では固定端に近いところを起振したときの固定端近傍の振動は小さくて誤差が含まれやすいが、そのような伝達関数を用いて解析していることも一致が悪くなる原因と考えられる。

4.2 両端自由梁の特性行列の同定

Fig. 2 (b) に示す両端自由梁の①の点を起振したときの①から④の点の伝達関数を用いて大熊・長松の第1報の方法により特性行列を同定すると Table 4 に示すような結果が得られた。なお、解析に当たっては、実験誤差の割合が比較的小さいとみられる 35 Hz から 1520 Hz までの等間隔な 100 個の周波数点における伝達関数を用いた。また、同定した Table 4 の特性行列を用いて計算した伝達関数を比較した1例を Fig. 6 に示す。この図は、①の点を起振したときの②の点の伝達関数である。同図を見ると、Fig. 3 に示されている片持梁の場合に比べて伝達関数の実験値に含まれる誤差が多少大きくなっており、大熊・長松の第1

Table 4 Characteristic matrices of free-free beam identified by 1st report of Okuma and Nagamatsu

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.8040 \times 10^3 & -0.8233 \times 10^3 & 0.5619 \times 10^3 & 0.1402 \times 10^2 \\ -0.8233 \times 10^3 & 0.1541 \times 10^4 & -0.2134 \times 10^4 & 0.4641 \times 10^3 \\ 0.5619 \times 10^3 & -0.2134 \times 10^4 & 0.2854 \times 10^4 & -0.8336 \times 10^3 \\ 0.1402 \times 10^2 & 0.4641 \times 10^3 & -0.8336 \times 10^3 & 0.2441 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.9607 \times 10^{-4} & 0.1572 \times 10^{-4} & -0.3102 \times 10^{-4} & 0.1170 \times 10^{-4} \\ 0.1572 \times 10^{-4} & 0.4471 \times 10^{-4} & -0.5923 \times 10^{-4} & 0.6319 \times 10^{-5} \\ -0.3102 \times 10^{-4} & -0.5923 \times 10^{-4} & 0.7708 \times 10^{-4} & -0.2305 \times 10^{-4} \\ 0.1170 \times 10^{-4} & 0.6319 \times 10^{-5} & -0.2305 \times 10^{-4} & 0.1311 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 0.2753 \times 10^{-1} & 0.8405 \times 10^{-2} & -0.8078 \times 10^{-2} & -0.3949 \times 10^{-2} \\ 0.8405 \times 10^{-2} & 0.1325 \times 10^{-1} & -0.4616 \times 10^{-2} & -0.8847 \times 10^{-2} \\ -0.8078 \times 10^{-2} & -0.4616 \times 10^{-2} & -0.1425 \times 10^{-1} & -0.1020 \times 10^{-1} \\ -0.3949 \times 10^{-2} & -0.8847 \times 10^{-2} & -0.1020 \times 10^{-1} & -0.4725 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Fig. 6 Transfer function of free-free beam calculated using characteristic matrices of Table 4 (Excited point : ①, Measured point : ②)

報の方法により同定した特性行列から計算した伝達関数は一部の周波数帯でしか実験値と一致していない。大熊・長松の第2報でも述べられているように、同定計算に用いる伝達関数の誤差が大きくなると、大熊・長松の第1報の方法では精度良く特性行列が同定できなくなることがここでも確かめられた。

Table 4 の特性行列を初期値にして、①の点を起振したときの①から④までの4点の伝達関数を用いて同定計算を行って得られた特性行列を Table 5 に示す。また、この特性行列を用いて計算した①点を起振したときの②の点の伝

Table 5 Characteristic matrices of free-free beam identified using transfer function excited on point ①

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.8644 \times 10^3 & -0.9821 \times 10^3 & 0.1101 \times 10^4 & -0.1171 \times 10^3 \\ -0.9821 \times 10^3 & 0.1265 \times 10^4 & -0.1667 \times 10^4 & 0.3143 \times 10^3 \\ 0.1101 \times 10^4 & -0.1667 \times 10^4 & 0.2557 \times 10^4 & -0.6613 \times 10^3 \\ -0.1171 \times 10^3 & 0.3143 \times 10^3 & -0.6613 \times 10^3 & 0.2427 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.1015 \times 10^{-3} & 0.1420 \times 10^{-4} & -0.1775 \times 10^{-4} & 0.2928 \times 10^{-5} \\ 0.1420 \times 10^{-4} & 0.8358 \times 10^{-4} & -0.4580 \times 10^{-4} & -0.2176 \times 10^{-4} \\ -0.1775 \times 10^{-4} & -0.4580 \times 10^{-4} & 0.6998 \times 10^{-4} & -0.1654 \times 10^{-4} \\ 0.2928 \times 10^{-5} & -0.2176 \times 10^{-4} & -0.1654 \times 10^{-4} & 0.2254 \times 10^{-4} \end{bmatrix}$$

$$[c] = \begin{bmatrix} 0.5031 \times 10^{-2} & -0.3328 \times 10^{-4} & -0.8983 \times 10^{-2} & 0.6676 \times 10^{-2} \\ -0.3328 \times 10^{-4} & 0.2539 \times 10^{-1} & -0.2016 \times 10^{-1} & -0.2003 \times 10^{-2} \\ -0.8983 \times 10^{-2} & -0.2016 \times 10^{-1} & 0.1324 \times 10^{-1} & 0.5768 \times 10^{-2} \\ 0.6676 \times 10^{-2} & -0.2003 \times 10^{-2} & 0.5768 \times 10^{-2} & -0.2191 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Fig. 7 Transfer function of free-free beam calculated using characteristic matrices of Table 5 (Excited point : ①, Measured point : ②)

Fig. 8 Transfer function of free-free beam calculated using characteristic matrices of Table 6 (Excited point : ①, Measured point : ②)

達関数と実験値を比較した結果を Fig. 7 に示す。Fig. 7 より伝達関数の計算値は実験結果と比較的良好に一致しているが、Table 5 の質量行列は対角成分が特に大きくなっていることから、同定された特性行列は真の特性を表していないものであることがわかる。前報でも経験したように、構造の特性を十分に含まない伝達関数を用いて同定計算を行うと、同定計算に用いた伝達関数の特徴は比較的良好に表すが、真の特性を表さない特性行列を同定する場合があるので注意が必要である。

次に、①から④の点までの4点を起振したときの伝達関数を用いて同定計算を行って得られた特性行列を Table 6 に示す。また、この特性行列を用いて計算した①の点を起振したときの②の点の伝達関数と実験値を比較した結果を Fig. 8 に示す。同定した質量行列は対角成分が大きくなっており、梁の中央に対して対称になるという条件も比較的良好に表している。また、伝達関数の実験値と計算値も良く一致していることから、精度良く特性行列が同定できているものと考えられる。

以上のことから、構造の特性が十分含まれている伝達関数を用いて解析すれば、繰り返し計算の初期値として多少実際の現象を表さない特性行列を用いた場合でも、本論文

の方法により比較的精度良く特性行列が同定できることが確かめられた。なお、大熊・長松の第2報の方法も繰り返し計算で特性行列を同定する方法であるが、計算結果は繰り返し計算の初期値の影響を強く受け、Table 4 の特性行列を初期値にして計算を行った場合には、単点を起振したときの伝達関数を用いて解析したときはもちろんのこと、多点を起振したときの伝達関数を用いて解析したときも実験で得られた伝達関数に近い特性を表す特性行列を得ることができなかった。

4.3 比例減衰の仮定の検討

質量行列、剛性行列は有限要素法などを適用して理論的に得られるが、減衰行列を理論的に算出する方法は、いまのところ確立されていない。そこで、減衰行列が質量行列と剛性行列の1次結合で表されると仮定して、次式から推定する場合が多い。

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K] \quad (14)$$

ここで、 α, β は比例定数である。このようにして求めた減衰行列を比例減衰と呼び、算出の仮定にはなんら理論的根拠は無いが、他に求める適当な方法が今のところ無いのでやむを得ずこのような方法が取られている。

Table 3 の実験的に同定した片持梁の特性行列から、(14) 式中の比例定数 α, β を最小2乗法により求めたところ、 $\alpha = -5.54, \beta = 0.634 \times 10^{-5}$ という値が得られた。また、これらの比例定数を用いて計算した減衰行列を Table 7 に示す。通常、(14) 式中の比例定数としては正の値を用いるが、実験結果から最小2乗法で求めた値は α が負の値になっており、また、比例減衰の仮定をして求めた Table 7 の減衰行列は、実験的に同定した Table 3 の値とは全く異

Table 6 Characteristic matrices of free-free beam identified using transfer function excited on four (①~④) points

$$[K] = \begin{bmatrix} 0.4391 \times 10^3 & -0.9607 \times 10^3 & 0.5759 \times 10^3 & -0.1000 \times 10^3 \\ -0.9607 \times 10^3 & 0.2621 \times 10^4 & -0.2164 \times 10^4 & 0.7114 \times 10^3 \\ 0.5759 \times 10^3 & -0.2164 \times 10^4 & 0.2363 \times 10^4 & -0.1006 \times 10^4 \\ -0.1000 \times 10^3 & 0.7114 \times 10^3 & -0.1006 \times 10^4 & 0.5031 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.8757 \times 10^{-4} & 0.3988 \times 10^{-4} & -0.1266 \times 10^{-4} & 0.6264 \times 10^{-5} \\ 0.3988 \times 10^{-4} & 0.2215 \times 10^{-3} & -0.1784 \times 10^{-4} & -0.1046 \times 10^{-4} \\ -0.1266 \times 10^{-4} & 0.1784 \times 10^{-4} & 0.1976 \times 10^{-3} & 0.2977 \times 10^{-4} \\ 0.6264 \times 10^{-5} & -0.1046 \times 10^{-4} & 0.2977 \times 10^{-4} & 0.7253 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.9026 \times 10^{-2} & -0.3111 \times 10^{-2} & -0.6468 \times 10^{-2} & 0.1683 \times 10^{-2} \\ -0.3111 \times 10^{-2} & 0.1071 \times 10^{-1} & -0.6325 \times 10^{-3} & 0.7616 \times 10^{-2} \\ -0.6468 \times 10^{-2} & -0.6325 \times 10^{-3} & -0.1347 \times 10^{-2} & 0.1232 \times 10^{-3} \\ 0.1683 \times 10^{-2} & 0.7616 \times 10^{-2} & -0.1232 \times 10^{-3} & 0.1636 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Table 7 Damping matrix estimated by hypothesis of proportional damping

$$[C] = \begin{bmatrix} 0.3210 \times 10^{-2} & -0.8728 \times 10^{-2} & 0.1972 \times 10^{-2} & 0.4455 \times 10^{-2} \\ -0.8728 \times 10^{-2} & 0.1809 \times 10^{-1} & -0.9806 \times 10^{-2} & -0.7951 \times 10^{-2} \\ 0.1972 \times 10^{-2} & -0.9806 \times 10^{-2} & 0.1158 \times 10^{-1} & -0.5377 \times 10^{-2} \\ 0.4455 \times 10^{-2} & -0.7951 \times 10^{-2} & -0.5377 \times 10^{-2} & 0.2226 \times 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Fig. 9 Transfer function of cantilever beam calculated using stiffness and mass matrices of Table 3 and damping matrix of Table 7
(Excited point : ③, Measured point : ③)

なっている。Table 3の質量行列、剛性行列とTable 7の減衰行列を用いて計算した伝達関数と実験結果を比較した1例をFig. 9に示す。これは③の点を起振したときの③の点の伝達関数である。Table 3の減衰行列を用いて計算したFig. 5の結果と比較すると3次振動の近傍で減衰が若干大きくなっているようであるが、減衰行列の中の数値の違いの大きさに比べて計算される伝達関数の違いはあまり大きくない。

このことは、Wang⁸⁾も指摘しているように、質量行列や剛性行列に比べて減衰行列を正確に同定することが難しいことを意味している。本論文の方法により特性行列を同定するときにも、繰り返し計算を進めて行くと剛性行列や質量行列の数値の変動はしだいに小さくなり収束するが、減衰行列はオーダーは変わらないものの数値は変動して、計算をどの段階で打ち切るかによって結果は大きく違ってきた。このようなことから推察すると、減衰行列の数値が多少変わっても計算される伝達関数はあまり変わらないので、 α と β のオーダーのみを実際の現象を表すものにしておけば、比例減衰の仮定が実用上特に問題なく使えると考えられる。

4.4 2つの梁を結合したときの特性

2つの部分構造の特性行列をそれぞれ実験的あるいは理論的に同定し、それらを合成して、部分構造を結合した全体構造の特性を推定する方法の精度について検討した。検討の対象にした構造は、Fig. 2(a)の片持梁とFig. 2(b)の両端自由梁を結合したFig. 2(c)の梁である。

Fig. 2(b)の両端自由梁を4個の質点と、その質点間を結ぶ質量の無い梁からなる振動モデルにモデル化して、質量行列および剛性行列を理論的に同定した。また、減衰行列は比例減衰の仮定を適用して、(14)式で $\alpha=10, \beta=0$ として推定した。一方、Fig. 2(a)の片持梁については、実験的に同定したTable 3の特性行列を用いて、それらを合成

Fig. 10 Transfer function of connected beam calculated using theoretically identified characteristic matrices of free-free beam and experimentally identified characteristic matrices of Table 3
(Excited point : ①, Measured point : ①)

してFig. 2(c)の梁の特性行列を求めて伝達関数を計算して実験値と比較した。その1例をFig. 10に示す。これは①の点を起振したときの①の点の伝達関数である。計算値は実験結果の特徴を良く表しているが、固有振動数に違いがみられ、1次振動、2次振動で実験結果に比べて若干高く、3次振動で低くなっている。

次に、片持梁および両端自由梁ともに実験的に同定したTable 3とTable 6の特性行列を用い、それらを合成してFig. 2(c)の梁の特性行列を求めて伝達関数を計算して実験結果と比較した。その結果の1例として①の点を起振したときの①の点の伝達関数をFig. 11に示す。2本の梁のうち1本の梁については理論的に同定した特性行列を用いているFig. 10の時に比べて、2本の梁ともに実験的に同定した特性行列を使用したFig. 11では、固有振動数の計算値と実験値の差はさらに大きくなっている。また、Fig. 11では実験値に比べて計算値では減衰が大きくなってい

Fig. 11 Transfer function of connected beam calculated using characteristic matrices of Table 3 and Table 6
(Excited point : ①, Measured point : ①)

Fig. 12 Transfer function of connected beam calculated using characteristic matrices ($K[1, 1] \times 0.97$) changed from Table 3 and characteristic matrices of Table 6
(Excited point: ①, Measured point: ②)

るが、これは計算に用いた両端自由梁の特性行列がスポンジの上で行った実験結果から同定したものであり、完全に自由の状態に比べて減衰が大きくなっているためである。

Table 3およびTable 6の特性行列を用いて計算したそれぞれの梁の伝達関数は、Fig. 5およびFig. 8のように実験値と良く一致していたにもかかわらず、それらの特性行列を合成して計算したFig. 2(c)の梁の伝達関数は実験値とあまりよく一致していない。このことは、部分構造の特性行列の同定誤差の影響が、部分構造を結合したときに、非常に複雑に増幅されて現れることを示している。そこで、特性行列の同定誤差の影響を調べるために、実験的に同定されたTable 3の質量行列、剛性行列および減衰行列をそれぞれ少し変えた時の特性行列とTable 6の特性行列を合成してFig. 2(c)の梁の伝達関数を計算して実験値と比較してみた。その結果、減衰行列および質量行列は少し変えても得られる伝達関数はほとんど変化しなかったが、剛性行列は少し変えるだけでも得られる伝達関数が大きく変わってきた。たとえば、Fig. 12はTable 3の剛性行列の1行1列の数値のみを3%小さくしたときの特性行列を片持梁の特性行列として用いたときの伝達関数の計算値と実験結果を比較した結果である。Fig. 11に比較して1次、2次振動の固有振動数は低下して実験結果と比較的良く一致するようになる。このように、特性行列のわずかな違いにより結合したときの伝達関数が大きく変わるということは、実験的に部分構造の特性行列を同定し、それらを合成して全体構造の特性を推定することが容易ではないことを意味している。したがって、このような方法を実用化するに当たっては、さらに精度の良い特性行列の同定法の開発が必要であると考えられる。

5. 結 言

前報では、実験的に振動方程式の特性行列を同定する方法を提案し、数値実験により得られた起振力と振動応答を用いて特性行列を同定して、提案した計算法の精度を検討した。本論文では、実際に振動実験を行って計測した起振力と振動応答から得た、実験誤差を含む伝達関数を用いて振動方程式の特性行列を同定することを試み、計算法の精度を調べた。また、実験的あるいは理論的に同定した部分構造の特性行列を合成して全体構造の特性を推定する方法の精度についても検討を加えた。得られた結果を要約すると次のようになる。

(1) 構造の振動特性を十分に含む伝達関数を用いて同定計算を行えば、伝達関数に含まれる誤差が多少大きくなっても、本論文で提案している方法で比較的精度良く特性行列が同定できることが確かめられた。なお、構造の特性を十分に含まない伝達関数を用いて同定計算を行った場合には、同定計算に用いた伝達関数の特徴は良く表すが、真の特性を表し得ない特性行列を同定する場合があるので注意が必要である。

(2) 大熊・長松の第1報の方法は、同定計算に用いる伝達関数に含まれる誤差が大きくなると精度良く特性行列が同定できなくなる。

(3) 実験的に同定した減衰行列を例にして、比例減衰の仮定が成り立つか否かについて調べた。その結果、同定した減衰行列に関しては、比例減衰の仮定を適用することはできないことがわかった。しかし、計算される伝達関数に及ぼす減衰行列の違いの影響はあまり大きくないので、比例減衰の仮定は実用上特に問題にはならないと考えられる。

(4) 実験的あるいは理論的に同定した部分構造の特性行列を合成して全体構造の特性を推定することを試みた。その結果、各部分構造の伝達関数は良く表す特性行列が実験的に同定できていたにもかかわらず、それらを合成して求めた全体構造の伝達関数の計算値と実験結果には差が生じた。これは、特性行列の同定誤差の影響が、他の特性行列と合成したときに複雑に増幅されて現れるためと考えられる。ここで検討した方法を実用化するに当たっては、さらに精度の良い特性行列の同定法の開発が必要であり、今後、本論文の方法を改良したより精度の良い同定法の研究を進めて行く予定である。

最後に、本研究における実験ならびに解析にご協力いただいた広島大学工学部船舶・海洋工学教室4年生の毛利弘明氏に感謝の意を表します。また、本研究には文部省科学研究費一般研究(C)の補助を受けたことを付記して、謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) 長松昭男：モード解析，培風館(1985)。
- 2) 日本機械学会：モード解析の基礎と応用，丸善(1986)。
- 3) 大熊政明，長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定（第1報，方法の提案と基礎的検討），日本機械学会論文集(C編)，51巻464号(1985)，pp. 719-728。
- 4) 大熊政明，長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定（第2報，誤差を含むデータに対する同定法の提案），日本機械学会論文集(C編)，52巻478号(1986)，pp. 1742-1749。
- 5) 大熊政明，長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定（第3報，実験データからの同定その1），日本機械学会論文集(C編)，52巻484号(1986)，pp. 3145-3153。
- 6) 大熊政明，長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定(第4報，計算時間を改善した方法の提案)，日本機械学会論文集(C編)，53巻493号(1987)，pp. 1913-1919。
- 7) 大熊政明，長松昭男：特性行列の実験的決定による系の同定（第5報，単点励振データからの同定法の提案），日本機械学会論文集(C編)，54巻497号(1988)，pp. 93-99。
- 8) J. H. Wang: Mechanical parameter identification with special consideration of noise effects, Journal Sound and Vibration, 125(1) (1988), pp. 151-167.
- 9) C. P. Fritzen: Identification of mass, damping, and stiffness matrices of mechanical systems, American Society of Mechanical Engineers, Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 108(1986), pp. 9-16.
- 10) 道本順一，村中一意：振動方程式の特性行列の同定に関する研究(その1，解析法と解析例)，日本造船学会論文集，第167号(1990)，pp. 191-198。