骨組構造および回転対称シェル構造の有限要素解析における Shifted Integration 法について

正員 都 井 裕*

On the Shifted Integration Technique in the Finite Element Analysis
of Framed Structures and Axi-Symmetric Shell Structures

by Yutaka Toi, *Member*

Summary

The present study is concerned with the physical explanations of the linear and the cubic finite elements for beams and axisymmetric shells through the comparisons of their strain energy approximations with those of the Rigid Bodies-Spring Models which are the discrete elements suitable to the plastic collapse analysis using the concepts of plastic hinges and hinge lines. The established conditions for the equivalence between these two modelings, which are given as the relations between the locations of the numerical integration points and those of the occurrence of plastic hinges, can be conveniently used in the economical plastic collapse analysis of framed structures and axisymmetric shells where the locations of plastic hinge formations are controlled by the movement of numerical integration points. Some numerical results are shown in order to prove numerically the obtained relations and to verify the validity of the proposed shifting technique of numerical integration points, which is identified as 'the shifted integration technique' in the present paper.

1. 序

本研究ではまず、はりおよび回転対称シェル解析のための線形および3次有限要素の物理的意味を、剛体・ばねモデル^{1)~7)}とのひずみエネルギー近似式の比較により考察し、有限要素における剛性評価のための数値積分点位置と、剛体・ばねモデルにおける剛体棒要素結合点(ばね挿入点)位置との関係式を求める。さらに、この関係式に従い、有限要素における数値積分点位置を移動(shift)することにより、要素内の任意の位置に塑性ヒンジを発生させることが可能になり、塑性解析の効率化に繋がることを、数値例により示す。有限要素法の分野でよく知られている「Reduced Integration 法」と対比させて、本研究で提案する手法を「Shifted Integration 法」と呼称する。積分次数低減効果を利用した Reduced Integration 法に対し、積分点位置の移動による何らかの効果を利用する方法が Shifted Integration 法である。

剛体・ばねモデル (the Rigid Bodies-Spring Models, 略

称 RBSPM) についてここで簡単に説明しておく。物理的見地から誘導された離散化モデルである剛体・ばねモデルは、隣接要素間の相対運動に抵抗するばね系により結合された剛体要素から成り立っており、降伏後のばね定数を零と置くことにより、塑性ヒンジおよび塑性ヒンジラインを陽な形で導入することができるため、構造物の塑性崩壊解析に好適な離散化モデルとして知られている^{1)~2)}。剛体・ばねモデルにおける弾性ばね定数は、形式的には、要素間のひずみを、相対変位と隣接要素重心間距離の比として評価することにより、決定することができる。しかしながら、剛体・ばねモデルにおいては要素間境界方向の直応力および直ひずみが無視されているため、本論文で述べるような1次元要素を除いては、線形弾性解の精度および収束性が保証されない。剛体・ばねモデルを用いた構造物の荷重増分解析は、塑性解析法³⁾における所謂、仮想変形法の、数値的見地からの一般化と見做すことができ、一般に崩壊荷重の上界解を与えるが、仮定された剛体棒要素の結合点位置が形成されるべき塑性ヒンジ点の正しい位置を含む場合には、この上界解は崩壊荷重の正解と一致する。剛体・ばねモデルはこれまでに、板殻構造の静的・動的安定問題を含む固体・

* 東京大学生産技術研究所

構造物の様々な種類の非線形問題に適用されてきたことを述べておく^{3)~7)}。

本論文の2章では、次数低減積分法(この場合は1点積分法)に基づく線形チモシェンコはり有限要素⁹⁾のひずみエネルギー近似式を、剛体・ばねモデルにおけるせん断効果を含むはりの曲げ要素モデル¹⁰⁾のそれと比較する。この要素モデルは、それぞれ曲げ回転および横せん断変位に抵抗する2種類のばねにより結合された2本の剛体棒より成る。これらの離散化モデル間の等価条件は、線形有限要素における数値積分点位置と剛体・ばねモデルにおけるばね挿入点位置の関係式として誘導される。この等価性は、1978年に著者により最初に発見され¹¹⁾、3次元骨組構造に対する有限要素-剛体・ばねモデル統合プログラムの開発に利用された¹²⁾。本論文では、この等価性についてより明確に議論し、骨組構造の経済的な塑性解析への応用例を示す。

続く3章では、3次はり要素と剛体・ばねモデルに対し同様の比較を行なう。ここでは、3次はり要素のひずみエネルギー近似式をせん断効果を見捨てた剛体・ばねモデル、すなわち2つの回転ばねにより相互に結合された3本の剛体棒から成る要素モデルのそれと比較する。これらの離散化モデル間の等価条件は、3次有限要素における2つの数値積分点位置と剛体・ばねモデルにおけるばね挿入点位置の関係式として与えられる。

以上において確立された等価条件は、有限要素における数値積分点位置を移動することにより、応力評価点あるいは塑性ヒンジの発生位置を自由に制御できる可能性を与えており、線形チモシェンコはり要素と3次はり要素が、剛体・ばねモデルと全く同様に、塑性関節の概念を用いた塑性崩壊解析に有用であることを示唆している。本論文において「Shifted Integration法」と称される、この数値積分点移動法は、骨組構造あるいは回転対称シェル構造の有限要素解析において、所謂「ホットスポット」の断面力、あるいは崩壊荷重をより少ない要素で精度よく求めるために有効である。4章は、はりおよび回転対称シェルの塑性崩壊問題に対する数値解析結果を含んでおり、得られた数値解を、Shifted Integration法を用いない場合の同一要素の解と比較することにより、線形および3次有限要素に対するShifted Integration法の有効性を実証する。

2. 線形はり要素の物理的解釈

2.1 線形はり要素のひずみエネルギー

次数低減積分法に基づく線形チモシェンコはり要素の変分定式化においては、曲げひずみエネルギー V_b とせん断ひずみエネルギー V_s から成る次式のエネルギー関数が仮定される⁹⁾。

$$V = V_b + V_s \\ = \frac{1}{2} EI \int \left(\frac{d\theta}{dz} \right)^2 dz + \frac{1}{2} \alpha GA \int \left(\frac{du}{dz} - \theta \right)^2 dz$$

(1)

ここに、 EA と GA はそれぞれ、与えられたはりの曲げ剛性とせん断剛性であり、 α はせん断修正係数を意味する。長さ L の要素内における線形変位場、すなわち横たわみ u および回転角 θ は次式により与えられる。

$$u(z) = \frac{1}{2}(1-s)u_1 + \frac{1}{2}(1+s)u_2 \\ \theta(z) = \frac{1}{2}(1-s)\theta_1 + \frac{1}{2}(1+s)\theta_2$$

(2)

ここに、 $(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2)$ は、Fig. 1 に示される節点変位である。's' は無次元軸座標であり、次の範囲の値をとる。

$$-1 \leq s \leq 1$$

(3)

(2)式を(1)式に代入すれば、曲げおよびせん断ひずみエネルギーに対し、次式の結果を得る。

$$(V_b)_{LFE} = \frac{1}{2} \frac{EI}{L} (\theta_2 - \theta_1)^2$$

(4a)

$$(V_s)_{LFE} = \frac{1}{2} \frac{\alpha GA}{L} \left[u_2 - \frac{L}{2}(1+s_1)\theta_2 - u_1 - \frac{L}{2}(1-s_1)\theta_1 \right]^2$$

(4b)

ここに、 V_s は、いわゆる shear locking⁹⁾を避けるために $s = s_1$ (Fig. 1 の上図を参照) における1点積分により計算されている。また、添字 LFE は線形有限要素(Linear Finite Element)を意味する。

Table 1 は、カスチリアノの定理を用いて(4)式から導かれた剛性マトリックスの具体形である。Table 1(b)のせん断剛性マトリックスに $s_1 = 0$ を代入すれば、文献9)で与えられている通常のせん断剛性マトリックスが得られる。

Table 1 Stiffness matrices for linear beam elements with the shifted integration technique

(x EI/L)

0	0	0	0	u_1
0	1	0	-1	θ_1
0	0	0	0	u_2
0	-1	0	1	θ_2

(a) bending stiffness matrix

(x $\alpha GA/L$)

1	$L(1+s_1)/2$	-1	$L(1-s_1)/2$	u_1
$L(1+s_1)/2$	$L^2(1+s_1)^2/4$	$-L(1+s_1)/2$	$L^2(1-s_1)^2/4$	θ_1
-1	$-L(1+s_1)/2$	1	$-L(1-s_1)/2$	u_2
$L(1-s_1)/2$	$L^2(1-s_1)^2/4$	$-L(1-s_1)/2$	$L^2(1+s_1)^2/4$	θ_2

(b) shear stiffness matrix

2.2 剛体・ばねモデルのひずみエネルギー

線形チモシェンコはり要素の物理的解釈を行なうために、Fig. 1 の下図に示すような剛体・ばねモデルを考える。このモデルは、それぞれ相対回転および相対すべりに抵抗する回転ばねおよびせん断ばねにより結合された2本の剛体棒より成る。結合点の無次元座標を r_1 と記す。

変形後に2つのばねに蓄えられるエネルギーは、ばね定数 k_b と k_s 、および対応する相対変位 d_b と d_s を用いれば、以下のように計算される。

$$\begin{aligned} (V_b)_{\text{RBSM}} &= \frac{1}{2} k_b d_b^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{EI}{L} (\theta_2 - \theta_1)^2 \end{aligned} \quad (5a)$$

$$\begin{aligned} (V_s)_{\text{RBSM}} &= \frac{1}{2} k_s d_s^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{\alpha GA}{L} \left[u_2 - \frac{L}{2} (1 - r_1) \theta_2 \right. \\ &\quad \left. - u_1 - \frac{L}{2} (1 + r_1) \theta_1 \right]^2 \end{aligned} \quad (5b)$$

ここに、 d_b と d_s はそれぞれ、剛体棒結合点における変形後の相対回転角と相対横たわみである。また、 k_b と k_s は、回転およびせん断ばね定数であり、対応する相対変位成分による曲率およびせん断ひずみの有限差分近似に基づいて、既存の確立された方法¹⁰⁾により決定されている。なお、(5a)式と(5b)式のひずみエネルギー近似式は、変分差分定式化において曲率($\kappa = d_b/L$)およびせん断ひずみ($\gamma = d_s/L$)の有限差分近似を直接を用いることにより、ばね定数の概念を一切用いなくとも得られることを付言しておく。

2.3 線形はり要素と剛体・ばねモデルの等価性

2.1節で述べた線形チモシェンコはり要素と、2.2節で誘導した剛体・ばねモデルは、次の条件が満たされる時、等価である。

$$(V_b)_{\text{LFE}} = (V_b)_{\text{RBSM}} \quad (6a)$$

および

Fig. 1 Linear Timoshenko beam element and its physical equivalent

$$(V_s)_{\text{LFE}} = (V_s)_{\text{RBSM}} \quad (6b)$$

(6a)式は、(4a)式および(5a)式からわかるように、数値積分点およびばね挿入点の位置に無関係に成立する。他方、(6b)式は

$$s_1 = -r_1 \quad \text{or} \quad r_1 = -s_1 \quad (7)$$

の時に限り成立する。すなわち、(7)式は、線形チモシェンコはり要素とせん断変形の影響を含む剛体・ばねモデルに対し、必要十分な等価条件を与えている。線形はり要素の積分点を $s = s_1$ に設定すれば、ばね挿入点の位置、したがって塑性ヒンジ発生位置は $r = r_1 = -s_1$ となる。

3. 3次はり要素の物理的解釈

3.1 3次はり要素のひずみエネルギー

梁柱あるいは骨組解析において最も頻繁に使用される3次はり要素においては、横たわみ $u(z)$ は3次多項式を用いて次式のように仮定される。

$$u(z) = H_{00}u_1 + H_{10}L\theta_1 + H_{01}u_2 + H_{11}L\theta_2$$

ここに、

$$\begin{aligned} H_{00} &= \frac{1}{8} (4 - 6s + 2s^3) \\ H_{10} &= \frac{1}{8} (1 - s - s^2 + s^3) \\ H_{01} &= \frac{1}{8} (4 + 6s - 2s^3) \\ H_{11} &= \frac{1}{8} (-1 - s + s^2 + s^3) \end{aligned} \quad (8)$$

(8)式において、 $(u_1, \theta_1, u_2, \theta_2)$ は、Fig. 2 に示されるような節点変位であり、 L は要素長さである。'z' ははりの軸方向座標、's' は各要素の無次元軸座標であり、次の範囲の値をとる。

$$-1 \leq s \leq 1 \quad (9)$$

横たわみの2階微分は次のように計算される。

$$\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{6s}{L^2} u_1 + \frac{3s-1}{L} \theta_1 - \frac{6s}{L^2} u_2 + \frac{3s+1}{L} \theta_2 \quad (10)$$

この式は、はりの変形時における曲率変化を与えている。

この要素に蓄えられるひずみエネルギーは、2点数値積

Fig. 2 Cubic beam element and its physical equivalent

Table 2 Stiffness matrix for cubic beam elements with the shifted integration technique

(x EI/L)				
$36s_2^2/L^2$	$18s_2^2/L$	$-36s_2^2/L^2$	$18s_2^2/L$	u_1
$18s_2^2/L$	$9s_2^2+1$	$-18s_2^2/L$	$9s_2^2-1$	θ_1
$-36s_2^2/L^2$	$-18s_2^2/L$	$36s_2^2/L^2$	$-18s_2^2/L$	u_2
$18s_2^2/L$	$9s_2^2-1$	$-18s_2^2/L$	$9s_2^2+1$	θ_2

分公式によれば、次式により与えられる。

$$V_{CFE} = \frac{EIL}{4} \left(\left[\left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{s_1} \right]^2 + \left[\left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{s_2} \right]^2 \right) \quad (11)$$

ここに、数値積分点はそれぞれ $s=s_1$ および $s=s_2$ に位置している。この式における EI および L はそれぞれ、はり要素の曲げ剛性および長さである。また、添字 'CFE' は 3 次有限要素 (Cubic Finite Element) を意味する。

(11) 式に与えられたひずみエネルギー式にカスチリアノの定理を適用することにより、Table 2 に示すような剛性マトリックスが導かれる。ここでは、3.3 節の議論に従い、 $s_1 = -s_2$ と仮定されている。 $s_2 = 1/\sqrt{3}$ ($=0.57735$; ガウス積分点) を Table 2 の剛性マトリックスに代入すると、3 次はり要素に対する通常の (厳密な) 剛性マトリックスが得られる。

3.2 剛体・ばねモデルのひずみエネルギー

3 次はり要素の物理的解釈を得るために、Fig. 2 の下図にあるような、2 つの回転ばねにより結合された 3 本の剛体棒より成る剛体・ばねモデルを考える。結合点の無次元座標を r_1 および r_2 と記せば、剛体・ばねモデルにおいては、 r_1 における曲率変化が以下のように仮定されている。

$$\kappa_1 = C_{10}u_1 + C_{11}\theta_1 + C_{12}u_2 + C_{13}\theta_2$$

ここに、

$$\begin{aligned} C_{10} &= \frac{-8}{[2+(r_1+r_2)](r_2-r_1)L^2} \\ C_{11} &= \frac{-4(1+r_2)}{[2+(r_1+r_2)](r_2-r_1)L} \\ C_{12} &= \frac{8}{[2+(r_1+r_2)](r_2-r_1)L^2} \\ C_{13} &= \frac{-4(1-r_2)}{[2+(r_1+r_2)](r_2-r_1)L} \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 式は、左および中央の剛体棒の相対回転角と、節点 1 および中央剛体棒の中心点の距離との比を評価することにより得られる。同様に、 r_2 における曲率変化が次式のように与えられる。

$$\kappa_2 = C_{20}u_1 + C_{21}\theta_1 + C_{22}u_2 + C_{23}\theta_2$$

ここに、

$$C_{20} = \frac{8}{[2-(r_1+r_2)](r_2-r_1)L^2}$$

$$C_{21} = \frac{4(1+r_2)}{[2-(r_1+r_2)](r_2-r_1)L} \quad (13)$$

$$C_{22} = \frac{-8}{[2-(r_1+r_2)](r_2-r_1)L^2}$$

$$C_{23} = \frac{4(1-r_2)}{[2-(r_1+r_2)](r_2-r_1)L}$$

この式は、中央および右の剛体棒の相対回転角と、中央剛体棒の中心点と節点 2 の間の距離の比を与えている。

剛体・ばねモデルの理論によれば、回転ばねに蓄えられるひずみエネルギーは次のように近似される。

$$V_{RBSM} = \frac{EIL}{4} [(\kappa_1)^2 + (\kappa_2)^2] \quad (14)$$

3.3 3 次有限要素と剛体・ばねモデルの等価性

3.1 節に示した 3 次有限要素と、3.2 節で誘導した剛体・ばねモデルは、

$$V_{CFE} = V_{RBSM} \quad (15)$$

の時、すなわち次の 2 条件が満足される時、等価となる。

$$\left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{s_1} = \kappa_1 \quad (16a)$$

および

$$\left(\frac{d^2 u}{dz^2} \right)_{s_2} = \kappa_2 \quad (16b)$$

(10) 式と (12) 式より、次の条件が満足される時、(16a) 式が成立することがわかる。

$$\begin{aligned} C_{10} &= \frac{6s_1}{L^2} \\ C_{11} &= \frac{3s_1-1}{L} \\ C_{12} &= \frac{-6s_1}{L^2} \\ C_{13} &= \frac{3s_1+1}{L} \end{aligned} \quad (17)$$

(12) 式からわかるように C_{10} は $-C_{12}$ と等しいので、(17) 式の第 1 式は第 3 式と同じである。

ここで便宜上、次の 3 変数を定義しておく。

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{4} [(r_2)^2 - (r_1)^2] \\ R_2 &= \frac{1}{2} (r_2 - r_1) \\ R_3 &= r_2 \end{aligned} \quad (18)$$

これらの変数を用いると、(17) 式は以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned} 3s_1 R_1 + 3s_1 R_2 + 1 &= 0 \\ (3s_1 - 1) R_1 + (3s_1 - 1) R_2 + R_3 + 1 &= 0 \\ (3s_1 + 1) R_1 + (3s_1 + 1) R_2 - R_3 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

明らかに、(19) 式は次の 2 方程式に置き換えられる。

$$\begin{aligned} 3s_1 R_1 + 3s_1 R_2 + 1 &= 0 \\ R_1 + R_2 - R_3 &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

(18) 式によれば、 R_3 は (R_1, R_2) と次の関係にある。

$$R_3 = \frac{R_1}{R_2} + R_2 \quad (21)$$

(21)式を, (20)式の第2式に代入すると, R_1 と R_2 に関し最終的に次の方程式が得られる。

$$3s_1 R_1 + 3s_1 R_2 + 1 = 0 \quad (22 \text{ a})$$

$$R_1 - \frac{R_2}{R_2} = 0 \quad (22 \text{ b})$$

(22)式は, 次の2組の解を与える。

$$R_1 = 0 \quad \text{and} \quad R_2 = -\frac{1}{3s_1} \quad (23 \text{ a})$$

または

$$R_1 = -1 - \frac{1}{3s_1} \quad \text{and} \quad R_2 = 1 \quad (23 \text{ b})$$

(23 b)式の2つの式は, r_1 および r_2 の値に関し, 一般的な解を与えない。したがって, (23 a)式が, r_1 および r_2 に関し求める解を与える。すなわち,

$$r_1 = \frac{1}{3s_1} \quad \text{and} \quad r_2 = -\frac{1}{3s_1} \quad (24)$$

(16 b)式から同様にして, r_1 および r_2 に関する次の解が得られる。

$$r_1 = -\frac{1}{3s_2} \quad \text{and} \quad r_2 = \frac{1}{3s_2} \quad (25)$$

(24)式と(25)式より, 有限要素と剛体・ばねモデルが等価であるためには, s_1 と s_2 の間に次の関係が成立しなければならないことがわかる。

$$s_1 = -s_2 \quad (26)$$

また, s_1 と s_2 は次の範囲の値でなければならない。

$$-1 \leq s_1 \leq -\frac{1}{3} \quad \text{and} \quad \frac{1}{3} \leq s_2 \leq 1 \quad (27)$$

上述の結果を要約すると, 3次はり要素における数値積分点が $\pm s_2 (1/3 \leq s_2 \leq 1)$ に位置する時, 剛体・ばねモデルにおけるばね挿入点は $r_i = \pm 1/3s_2 (i=1, 2)$ に位置し, 塑性ヒンジも同じ点に形成される。

興味深いことに, (s_1, s_2) がガウス積分点に位置する時は, (r_1, r_2) もガウス積分点に位置する。すなわち,

$$s_1 = r_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{and} \quad s_2 = r_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (28)$$

4. 数 値 例

4.1 線形要素によるはりの塑性崩壊解析

序で述べたように, 有限要素における数値積分点位置と剛体・ばねモデルにおけるばね点位置の関係は, 骨組構造の塑性崩壊解析において便利に用いることができる。この Shifted Integration 法と称する手法の有効性を示すために, 数値例として, 中央集中横荷重を受ける両端クランプ短形断面はりの塑性崩壊問題を解く。解析では, 曲げモーメント値が全断面塑性値に到達した積分点において曲げ剛性を零と仮定することにより, 塑性関節の概念を導入している。この処理は, 剛体・ばねモデルにおいて対応するばね点で零ばね定数を仮定することと等価である。仮定した入力データは, 以下のとおりである。

はりの長さ=100.0

Table 3 Convergence of linear beam elements

Number of Elements	LB1 ($s_1=0.0$) ($r_1=0.0$)		LB1+LB2 ($s_1=\pm 1.0$) ($r_1=\mp 1.0$)		CB4 ($s_1=\pm 2/3$) ($r_1=\pm 0.5$)
	P_{max}	U_{lin}	P_{max}	U_{lin}	U_{lin}
1	-	-	-	-	0.750*
2	2.000	0.750*	1.000	3.000	0.938*
3	1.500	0.890	1.000	2.000	0.972*
4	1.333	0.938*	1.000	1.594	0.984*
5	1.250	0.960	1.000	1.392	0.990*
6	1.200	0.972*	1.000	1.278	0.993
7	1.167	0.980	1.000	1.207	0.995
8	1.143	0.984*	1.000	1.160	0.996
9	1.125	0.988	1.000	1.128	0.997
10	1.111	0.990*	1.000	1.104	0.998

はりの幅=1.0

はりの深さ=0.1961

ヤング率= 1.591×10^9

ポアソン比=0.3

せん断修正係数=5/6

全断面塑性モーメント $M_0=10000.0$

Table 3 に, 1点積分法による線形チモシェンコはり要素に対する結果を示す。解析では, 数値積分点位置の異なる次の2要素を用いた。

LB1: $s_1 = 0.0$ ($r_1=0.0$) (通常要素)

LB2: $s_1 = +1.0$ ($r_1=-1.0$) または

$s_1 = -1.0$ ($r_1=+1.0$)

LB1 では, 数値積分点は要素中央に位置しており, よって塑性ヒンジも要素中央に生ずる。これは, 線形弾性解析および弾塑性解析における, 線形チモシェンコはり要素の通常の使用方法である。他方, LB2 においては, 積分点は要素のどちらかの端に位置しており, 塑性ヒンジはその反対側の端に形成される。

Table 3 は, LB1, および LB1 と LB2 の組み合わせ ((LB1+LB2) と記す) に対する収束性テスト結果を示す。すべて 1/2 解析であり, はりの半スパンが等分割されている。表中, P_{max} は計算された崩壊荷重の正解に対する比を意味し, U_{lin} は中央たわみに対する線形弾性解の正解(せん断変形の影響を無視したもの)に対する比を表わしている。

(LB1+LB2) においては, クランプ端および集中荷重点を含む要素は LB2 として, これらの点に正確に塑性ヒンジが発生することを許し, 他の要素は LB1 としている。すなわち数値積分点は, Fig. 3 に示すように, 左端のクランプされた要素では右端に, 右端の載荷された要素では左端に位置している。この結果, 塑性ヒンジは正確にクランプ端および荷重点に発生する。Table 3 より, LB1 と LB2 の混用により, 中央点変位に対する線形解の精度は損われるものの, 崩壊荷重に対しては, 極めて速い収束が達成されていることがわかる。

Fig. 4 は, LB1 および (LB1+LB2) に対し計算された

Fig. 3 Combination of LB1 and LB2 for the clamped beam subjected to a centrally concentrated load (Number of elements=5)

崩壊荷重レベルにおける線形弾性たわみおよび曲げモーメント分布の計算結果である。両者とも要素数は5である。横たわみは線形はり有限要素の節点位置でプロットし、曲げモーメントは等価な剛体・ばねモデルにおけるばね点位置でプロットしている。図中、 $(U_c)_{\text{exa}}$ と M_0 はそれぞれ、正しい中央点たわみおよび全塑性モーメントである。Fig. 4(b)より、 $(\text{LB1}+\text{LB2})$ により与えられる曲げモーメント分布は完全に正確であることがわかるが、この理由により、正しい崩壊荷重が得られている。

言い換えて、せん断変形を無視することができる)に対するLB1は、その物理的解釈から、3次はり要素における次のモデルと物理的に等価であることがわかる。

$$\text{CB4: } s_i = \pm 2/3 (r_i = \pm 0.5)$$

すなわち、両者はともに、等分割メッシュ (剛体棒要素長

(a) lateral deflection

(b) bending moment

Fig. 4 Distribution of lateral deflection and bending moment

がすべて等しい)の剛体・ばねモデルに対応しており、CB4モデルに含まれる剛体棒要素数はLB1モデルにおけるその2倍になっている。LB1による計算結果を、同じくTable 3に示されているCB4による結果と比較することにより、この関係を確認することができる (同じ丸数字は物理的に同じモデル化であることを意味する)。この比較はまた、次のことを示唆している。すなわち、線形変位に対する線形要素は3要素の精度は、3次要素と比較して貧弱であり、ガウス積分による3次要素 (次節のCB1) により与えられる解と同精度の解を得るためには、2倍以上の数の線形要素が必要となる。

4.2 3次要素によるはりの塑性崩壊解析

前節で記述された問題の3次要素による数値解析においては、異なる積分点位置を有する次の3要素を用いた。

$$\text{CB1: } s_i = \pm 0.57735 (r_i = \pm 0.57735) \text{ (通常要素)}$$

$$\text{CB2: } s_i = \pm 1/3 (r_i = \pm 1.0)$$

$$\text{CB3: } s_i = \pm 1.0 (r_i = \pm 1/3)$$

CB1においては、数値積分点はガウス積分点に位置しており、塑性ヒンジも同じ点に形成される。線形弾性解析および弾塑性解析において、3次要素は通常この形で使用される。CB2では、積分点は $s_i = \pm 1/3$ に位置しており、塑性ヒンジは要素端点 ($r_i = \pm 1.0$) に形成される。CB3においては、数値積分点は要素の両端に位置している。

これらの要素による収束性テスト結果がTable 4に示されている。ここでは、計算された崩壊荷重 (P_{max}) および中央点たわみの線形解 (U_{lin}) の正解に対する比が提示されている。すべてのケースにおいて、はりの半スパンが等分割されている。はりの曲げ解析における標準形であるCB1は、中央点たわみの線形解に対し最も精度が良好であるが、CB1においては塑性ヒンジが正確に荷重点あるいはクランプ端に形成されないため、崩壊荷重の収束は遅い。他方、形成される塑性ヒンジの位置が正確であるCB2では、崩壊荷重の収束は極めて速いが、積分点位置が線形解に対する最適位置からずれるため、変位の線形解の精度は損われる。Table 4における $(\text{CB1}+\text{CB2})$ はCB1とCB2の混用の意味であり、Fig. 5に示されるように、塑性ヒンジが形成されるべき集中荷重点あるいはクランプ端を含む要素はCB2とし、他はCB1とする。このモデル化によれば、変位の線形解の精度はCB2よりも高い。よって、 $(\text{CB1}+\text{CB2})$ は最も効率的で推奨されるモデル化であると言える。 $(\text{CB1}+\text{CB3})$ は数値積分点移動法の誤用例であり、ここでは荷重要素あるいはクランプ要素において積分点が端点に位置している。この結果より、数値積分点位置は、ガウス積分点を除いては、決して応力評価点、延いては塑性ヒンジ発生位置と一致しないことが確認される。

4.3 線形要素による円筒殻の塑性崩壊解析

Fig. 6に示すような一様分布内圧を受ける両端クランプ円筒殻の軸対称塑性崩壊問題に対し、同様の数値的検討を

Table 4 Convergence of cubic beam elements

Number of Elements	CB1($s_1=0.57735$) ($r_1=0.57735$)		CB2($s_1=\pm 1/3$) ($r_1=\pm 1.0$)		CB1 + CB2		CB1+CB3($s_1=\pm 1.0$) ($r_1=\pm 1/3$)	
	P_{max}	U_{lin}	P_{max}	U_{lin}	P_{max}	U_{lin}	P_{max}	U_{lin}
1	1.732	1.000	1.000	3.000	-	-	-	-
2	1.268	1.000	1.000	1.500	-	-	-	-
3	1.164	1.000	1.000	1.222	1.000	1.148	1.289	0.951
4	1.118	1.000	1.000	1.125	1.000	1.062	1.200	0.979
5	1.092	1.000	1.000	1.080	1.000	1.032	1.154	0.989
6	1.076	1.000	1.000	1.056	1.000	1.019	1.125	0.994
7	1.064	1.000	1.000	1.041	1.000	1.012	1.105	0.996
8	1.056	1.000	1.000	1.031	1.000	1.008	1.091	0.997
9	1.049	1.000	1.000	1.025	1.000	1.005	1.080	0.998
10	1.044	1.000	1.000	1.020	1.000	1.004	1.071	0.999

Fig. 5 Combination of CB1 and CB2 for the clamped beam subjected to a centrally concentrated load (Number of elements=5)

行なった。子午線方向の膜力の影響は本解析では無視している。仮定された降伏関数は

$$\left(\frac{N_\theta}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{M_x}{M_0}\right)^2 - 1 = 0 \quad (29)$$

と与えられる。ここに、 N_θ と M_x はそれぞれ、周方向の膜力および軸方向の曲げモーメントである。 N_0 と M_0 は次式で与えられる全断面塑性値である。

$$N_0 = \sigma_0 h, M_0 = \sigma_0 h^2 / 4 \quad (30)$$

ここに、 σ_0 と h はそれぞれ、単軸降伏応力および肉厚である。仮定された入力データは以下のとおりである。

Fig. 6 Circular cylinder subjected to uniform internal pressure (Number of elements=5)

円筒の長さ (L) = 0.63246

円筒の半径 (R) = 5.0

円筒の厚さ (h) = 0.01

ヤング率 = 2.1×10^6

ポアソン比 = 0.3

単軸降伏応力 = 3000.0

この円筒の長さは非常に短く仮定されているが ($\omega = L^2/2Rh = 2$)、これは次の理由による。すなわち、より長い円筒の崩壊荷重は主として、周方向膜力により決定され、この膜力は数値積分点の移動により殆ど影響されないからである。

線形チモシェンコはり要素の軸対称シェル構造への拡張である線形・軸対称シェル要素¹³⁾に対する結果を、Table 5 に示す。解析では、数値積分点位置の異なる次の 2 要素が使用された。

LS1: $s_1 = 0.0$ ($r_1 = 0.0$) (通常要素)

LS2: $s_1 = +1.0$ ($r_1 = -1.0$) または

$s_1 = -1.0$ ($r_1 = \pm 1.0$)

LS 1 では、数値積分点は、通常行われるように要素中央点に位置しており、塑性ヒンジも同じ点に形成される。LS 2 では、積分点は要素のどちらかの端点に位置しており、塑性ヒンジは反対側の端点に形成される。はりの解析と同様、すべて 1/2 解析であり、仮定されたメッシュは一樣である。解析において用いられた等価節点外力ベクトルは、(2) 式において与えられた横たわみの線形補間関数に基づいている。

Table 5 は、LS 1 および LS 2 の混用 ((LS1+LS2) と記す) に対する、崩壊荷重 (p_{max})、最大曲げモーメントの線形解 (M_0 ; クランプ端に最も近いガウス積分点における値)、中央点たわみの線形解 (U_{lin}) の各計算結果の、正解に対する比を示している。ここで、崩壊荷重の「正解」とは、(29) 式の降伏条件を用いた別の離散化解析により求めた数値解

Table 5 Convergence of linear axisymmetric shell elements

Number of Elements	LS1($s_1=0.0$)			LS1+LS2($s_1=\pm 1.0$)		
	P_{max}	M_0	U_{lin}	P_{max}	M_0	U_{lin}
3	1.088	0.556	0.993	0.978	0.540	0.866
4	1.077	0.639	0.994	0.993	0.671	0.882
6	1.049	0.737	0.996	0.998	0.811	0.916
8	1.037	0.794	0.997	0.999	0.880	0.941
10	1.029	0.831	0.998	1.000	0.917	0.957
12	1.024	0.856	0.998	1.000	0.940	0.968
14	1.021	0.875	0.998	1.000	0.954	0.975
16	1.018	0.889	0.999	1.000	0.964	0.980
18	1.016	0.901	0.999	1.000	0.971	0.983
20	1.015	0.910	0.999	1.000	0.976	0.986

($p_{\max}=1.298N_0/R$)⁵⁾であることを述べておく。中央点たわみの弾性理論解については、たとえば、文献14)を参照されたい。

(LS1+LS2)においては、クランプ端と荷重点を含む要素は、これらの点において正確に塑性ヒンジを発生させることのできるLS2とし、他の要素はLS1としている。Table 5より、崩壊荷重および最大曲げモーメントの収束は(LS1+LS2)の方が速いが、他方、変位の線形解の収束はLS1の方が良い。(LS1+LS2)において最大曲げモーメントの結果が良いのは、このモデル化においてはLS2の利用により、正確にクランプ端の位置で曲げモーメントが評価されていることに起因する。

4.4 3次要素による円筒殻の塑性崩壊解析

前節で述べられた問題に対する、3次・軸対称シェル要素¹⁵⁾による数値解析では、積分点位置の異なる次の2要素を使用した。

CS1: $s_i = \pm 0.57735$ ($r_i = \pm 0.57735$) (通常要素)

CS2: $s_i = \pm 1/3$ ($r_i = \pm 1.0$)

CS1では、積分点はガウス積分点に位置しており、塑性ヒンジも同じ点に形成される。CS2では、積分点は $s_i = \pm 1/3$ に位置しており、塑性ヒンジは要素端点($r_i = \pm 1.0$)に形成される。1/2解析において仮定されたメッシュは一樣である。用いられた等価節点外力ベクトルは、(8)式に与えられた3次変位場に基づいている。

CS1, およびCS1とCS2の混用((CS1+CS2)と記す)により与えられた数値結果をTable 6に示す。ここでは、崩壊荷重($p_{\max}$), 最大曲げモーメントの線形解(M_0 : クランプ端に最も近いガウス積分点における値), 中央点たわみの線形解(U_{lin})の各計算結果の、正解に対する比が示されている。軸対称シェル解析における通常形であるCS1は、変位の線形解に対しより高い精度を有しているが、崩壊荷重と最大曲げモーメントに対する収束は遅い。他方、崩壊

荷重と最大曲げモーメントに対する(CS1+CS2)の収束はより速いが、変位の線形解の収束性は、特に少数要素の場合において損われている。同じ要素数、たとえば5要素の場合の結果を比較するとCS1とCS2の混用は、CS1の単独使用よりも、全体として明らかにより良好な解を与えている。

軸対称シェルの解析においては、3次要素と比較した場合の線形要素による線形弾性解の精度は、はり解析の場合ほどには悪くない。これは、膜力との連成に起因している。また、シェル解析における崩壊荷重解の改善の程度は、はり解析の場合ほどには顕著でない。これは、シェルの塑性崩壊は膜力と曲げモーメントの両者に関係しており、この内、前者は数値積分点の移動にあまり大きく影響されないからである。

5. 結 論

本研究では、はりおよび軸対称シェル解析のための線形および3次有限要素の物理的意味を、剛体・ばねモデルとのひずみエネルギー近似式の比較を通じて考察し、これら2種類の離散化要素間の等価性を保証する、数値積分点位置とばね点位置(すなわち、応力評価点あるいは塑性ヒンジの発生位置)の関係を誘導した。

得られた関係は、有限要素と剛体・ばねモデルの統合コードの開発において有用であるだけでなく、骨組構造と軸対称シェルの塑性崩壊解析、特に計算コスト低減のために粗い要素分割が要求される場合に有効に用いることができる。すなわち、得られた関係に基づいて数値積分点位置を移動することにより、応力評価点あるいは塑性ヒンジの発生位置をクランプ端、集中荷重点などの所謂「ホットスポット」に正確に一致させることができるからである。

本研究で提案した、このShifted Integration法の有効性を収束性計算により実証した。すなわち、Shifted Integration法を用いた線形および3次要素より得られた解の精度を、同じ要素を通常の用い方をした場合の結果と比較し、塑性崩壊荷重の計算精度が著しく改善されることを示した。Shifted Integration法は、はりおよび軸対称シェルのための線形あるいは3次要素を装備した既存の有限要素コードに簡単にインプリメントできる。文献16), 17)は、この手法の骨組構造のクラッシュ崩壊解析への応用例を含んでいる。

ここで示された数値例においては、塑性ヒンジの位置、すなわち、数値積分点の位置は、前もって直感的に与えられた。分布荷重を受ける複雑な構造物に対しては、前段階の解析結果に基づいて、数値積分点に対する一種のアダプティブ法を構成できると思われるが、これは将来の研究課題である。

なお、有限要素解析における「Reduced Integration法」と対比させて、本研究で提案した手法を「Shifted Integra-

Table 6 Convergence of cubic axisymmetric shell elements

Number of Elements	CS1 ($s_i = \pm 0.57735$)			CS1+CS2 ($s_i = \pm 1/3$)		
	$p_{\max}$	M_0	U_{lin}	$p_{\max}$	M_0	U_{lin}
1	1.109	0.370	1.006	0.881	0.366	0.597
2	1.072	0.644	0.999	0.978	0.679	0.871
3	1.047	0.754	1.000	0.999	0.855	0.958
4	1.034	0.813	1.000	1.002	0.923	0.983
5	1.027	0.849	1.000	1.002	0.954	0.991
6	1.022	0.873	1.000	1.002	0.970	0.995
7	1.019	0.891	1.000	1.002	0.979	0.997
8	1.016	0.904	1.000	1.002	0.985	0.998
9	1.014	0.914	1.000	1.002	0.988	0.999
10	1.013	0.923	1.000	1.001	0.991	0.999

tion 法」と呼称したが¹⁸⁾, 数値積分点の移動により上流差分効果を有限要素に取り込んでいる, 文献 19) の方法などは, Shifted Integration 法の枠に含めてよいであろう。固体力学分野における 2 次元あるいは 3 次元解析において Shifted Integration 法がどのような効果を有するかは, 現時点では判然としない。

参 考 文 献

- 1) T. Kawai: New Discrete Models and Their Application to Seismic Response Analysis of Structures, Nuclear Engineering and Design, 48, (1978), 207~229.
- 2) T. Kawai: Some Considerations on the Finite Element Method, Int. J. for Numer. Methods Eng., 16, (1980), 81~120.
- 3) T. Kawai and Y. Toi: A Discrete Method of Limit Analysis and Its Applications to Plastic Stability Problems, Int. J. Engineering Structures, 5, (1983), 203~209.
- 4) Y. Toi and T. Kawai: Discrete Limit Analysis of Plate and Shell Structures, Computers and Structures, 19, (1984), 251~261.
- 5) Y. Toi and T. Kawai: Discrete Limit Analysis in Structural Mechanics, Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 33, (1987), 213~274.
- 6) Y. Toi and T. Kawai: Discrete Limit Analysis of Thin-Walled Structures, Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, 34, (1987), 1~58.
- 7) 都井裕: 鋼構造の離散化極限解析, コンピュータによる極限解析法シリーズ 3, 培風館, (1990)。
- 8) P. G. Hodge, Jr.: Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, (1959).
- 9) T. J. R. Hughes, R. L. Taylor and W. Kanoknukulchai: A Simple and Efficient Finite Element for Plate Bending, *ibid.*, 11, (1977), 1529~1543.
- 10) T. Kawai and C. N. Chen: A Discrete Analysis of Beam Bending Problems Including the Effects of Shear Deformation, 生産研究 (東大生研所報), 30, (1978), 165~168.
- 11) 都井: 簡易化された要素モデルによる板殻構造解析に関する研究, 東京大学学位論文, (1978)。
- 12) 都井: 骨組・回転対称シェル構造の動的非線形解析, 日本造船学会論文集, 147, (1980), 316~323.
- 13) O. C. Zienkiewicz, J. Bauer, K. Morgan and E. Onate: A Simple and Efficient Finite Element for Axisymmetric Shells, Int. J. for Numer. Methods Eng., 11, (1977), 1545~1558.
- 14) S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger: Theory of Plates and Shells, 2nd edn, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, (1959).
- 15) P. E. Grafton and D. R. Strome: Analysis of Axisymmetric Shells by the Direct Stiffness Method, AIAA J., 1~10, (1963), 2342~2347.
- 16) 都井, 梁: 骨組構造の崩壊シミュレーション (その 1: 定式化および簡単な数値例), 日本造船学会論文集, 166, (1989), 316~323.
- 17) 都井, 梁, 小畑: 骨組構造の崩壊シミュレーション (その 2: クラッシュ解析結果の実験的検証), 日本造船学会論文集, 167, (1990), 169~177.
- 18) Y. Toi: Shifted Integration Technique in One-Dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, Int. J. Numer. Methods Eng., (1991) to be published.
- 19) G. Payre, M. D. Broissia and J. Bazinet: An 'Upwind' Finite Element Method via Numerical Integration, Int. J. Numer. Methods Eng., 18, (1982), 381~396.