有限要素法による船体構造解析の事後誤差評価 に関する研究 (第 1 報)

正員 大 坪 英 臣* 正員 北 村 充**

A Study on A-Posteriori Error Estimation of Finite Element Analysis for Ship Structure (1-st Report)

by Hideomi Ohtsubo, *Member* Mitsuru Kitamura, *Member*

Summary

In this paper, a posteriori error in finite element analysis for ship structure problems is considered. Error is estimated in element-wise fashion in order to decrease computing time and memory use. The major difficulties in the element-wise error estimation are satisfying the self-equilibrium condition and allocation of traction discontinuity along element boundaries. An optimal procedure is used for satisfying the self-equilibrium condition, while traction discontinuity along element boundaries is allocated based on the ratio of stiffness of adjacent elements for each degree of freedom.

Several sample problems are solved for showing the capability of the proposed method. The accuracy of the method is ensured by comparing the estimated error and referenced error. A lower stool part of a bulk carrier and transverse ring of oil tanker are analyzed as an application of the method to the real problem. A posteriori error in the averaged stress distribution is also considered.

1. 結 言

近年の汎用ソルバーやブリ・ポストプロセッサの充実や爆発的に需要が伸びてきた EWS のユーザフレンドリーな使用環境などにより、有限要素解析を非常に手軽に、簡単に行うことが可能になってきた。一連のコンピュータ使用の手順に従うことにより、構造物のモデリングや有限要素解析の入力データの作成、解析、ポスト処理が可能である。しかし、自動要素分割がいつも適切な有限要素モデルを供給してくれる保証はない。残念ながら、現在市販されている自動要素分割プログラムは要素を生成するのが精一杯で、得られる有限要素解の精度まで考慮しているとはいえない。さらには、前述の CAE の成果により有限要素法の使用の幅が広がった訳だが、その副産物として、経験の少ない解析者が増加してしまった。この様な解析者にとって用いた有限要素モデルや解析結果の妥当性を判断するのは非常に難しい。CAE のより一層の充実のため、有限要素解析に存在する誤差が把握できる手段の開発が必要となってきた。この様な背景から、国内では大坪を中心としたグル

ープにより、また、海外では Zienkiewicz・Zhu らにより有限要素法の事後誤差の定量的な評価法に関する研究が行われてきた^{1,2,5,6,7,8,9,10)}。事後誤差評価の基本的研究はかなり成熟したと言えるであろう。本論文は、大坪・北村^{1,2,5,6)}により提案された事後誤差評価法のより現実的な問題への応用を検討するものである。著者らは船体構造物をその対象として選択した。

2. 船体構造解析の誤差評価法

船体構造解析はシェル要素または平面シェル要素を用いて行われている。ここではアイソパラメトリック要素を利用した平面シェル要素により解析を行う。この要素は 3 次元解析のアイソパラメトリック 6 面体要素内における x , y , z 方向の変位 u_x , u_y , u_z を、次式の様に要素中央面上に存在する節点の変位 (u_{xi} u_{yi} u_{zi}) と回転角 (θ_{xi} θ_{yi}) により表現する。

$$u_x = N_i(u_{xi} + z_i\theta_y) \quad (1)$$

$$u_y = N_i(u_{yi} - z_i\theta_x) \quad (2)$$

$$u_z = N_i u_{zi} \quad (3)$$

ここで、 N_i は節点 i に対応する形状関数を表す。なお、 x , y 軸は要素平面上に存在する。

次に、表面力と強制変位をそれぞれ境界 Γ_F と Γ_D に受け

* 東京大学工学部船舶海洋工学科

** 広島大学工学部第四類船舶・海洋工学教室

る応力場を考える。境界 Γ_F と Γ_D に囲まれた閉領域 Ω における応力場の支配方程式と境界条件は次式で表現される。

$$\nabla \cdot (E \nabla' u) + f = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (4)$$

$$(E \nabla' u) \cdot n = \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (5)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{on } \Gamma_D \quad (6)$$

ここで、 ∇' は変位ベクトル u 、ひずみベクトル ϵ の関係を表す演算子である。 E は弾性係数マトリックスであり、 n は境界における外向法線ベクトルである。また、 f は体積力であり、 $\bar{q}$ と $\bar{u}$ はそれぞれ境界 Γ_F と Γ_D 上で与えられた境界条件値である。上式に(1)、(2)、(3)の関係式を代入し、有限要素法により各節点の変位と回転角を解くのであるが、有限要素解は近似解法であるため、支配方程式を満足することはできなく残差が生じる。有限要素解を $\hat{u}$ とすると、要素 i における残差は次式により与えられる。

$$r_i = \nabla \cdot (E \nabla' \hat{u}) + f \quad \text{in } \Omega_i \quad (7)$$

また、アイソパラメトリック要素を用いて応力解析を行った場合、要素境界において境界力が不連続になってしまう。平面シェルの場合、要素 ij 間の不連続量 ρ_{ij} は次式により与えられる。

$$\rho_{ij} = \hat{S}_i \cdot n_i + \hat{S}_j \cdot n_j \quad \text{on } \Gamma_{ij} \quad (8)$$

$$\rho_{ij} = \hat{S}_i \cdot n_i - \bar{q} \quad \text{on } \Gamma_F \quad (9)$$

ここで、 Γ_{ij} は要素 ij 間の要素境界である。 S は次式で与えられる応力成分を含むマトリックスであり、 $\hat{S}_i$ は有限要素法により得た、要素 i における S の近似解である。

$$S = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \\ M_x & M_{xy} \\ M_{xy} & M_y \\ Q_x & Q_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

また、(10)式中、 $N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ は断面力および断面モーメントであり、次式で表現される。

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz & N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz \\ N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \\ Q_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xz} dz & Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{yz} dz \\ M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz & M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz \\ M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz \end{aligned} \quad (11)$$

ここで t は板厚を表す。文献1)、2)、6)に詳しく述べられているように、仮想仕事の原理を用いて応力場の支配方程式(4)と残差式(7)の弱形式を導出し、両者の差を取ることにより事後誤差の弱形式が得られる。これを内挿関数の次数を上げた有限要素により要素ごとに解くため、次の各要素ごとの誤差、 e 、の支配方程式を導いた。

$$\nabla \cdot (E \nabla' e) + r_i = 0 \quad \text{in } \Omega_i \quad (12)$$

$$(E \nabla' e) \cdot n = -\bar{\rho}_i \quad \text{on } \Gamma_i \in (\Gamma_{ij} \cup \Gamma_F) \quad (13)$$

$$e = 0 \quad \text{on } \Gamma_i \in \Gamma_D \quad (14)$$

ここで、 $\bar{\rho}_i$ は次の条件を満足する必要がある。

- 1) $\bar{\rho}_i$ は ρ_{ij} の内、要素 i が受け持つ量であり、次式を満足する。

$$\rho_{ij} = \bar{\rho}_i + \bar{\rho}_j \quad (15)$$

- 2) $\bar{\rho}_i$ と r_i より要素 i の事後誤差に対し、(16)式により荷重ベクトル g が作成されるが、 g は(17)式の自平衡条件を満足しなければならない。

$$g = \int_{\Omega_i} N^T r_i d\Omega - \int_{\Gamma_i} N^T \bar{\rho}_i d\Gamma \quad (16)$$

$$Rg = 0 \quad (17)$$

ここで、 N は誤差評価のための形状関数を保有するマトリックス、 g は要素 i における事後誤差解析の等価節点荷重を持つベクトル、そして、 R は等価節点荷重と自平衡条件の関係を表すマトリックスである。 x, y, z 、軸方向の変位と x, y 軸回りの回転を自由度とした場合、 R は次式で与えられる。

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -z_1 & y_1 & 1 & 0 & \cdots \\ z_1 & 0 & -x_1 & 0 & 1 & \cdots \\ -y_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & -z_j & y_j & 1 & 0 \\ \vdots & z_j & 0 & -x_j & 0 & 1 \\ \vdots & -y_j & x_j & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

上式中の J は誤差評価の要素が有する節点数を表している。

要素ごとの誤差評価において、境界力の不連続量の分配が、予測の精度に大きな影響を及ぼす。また、シェル要素の場合、節点荷重と自平衡の関係複雑であるため、自平衡条件を満足することが難しい。よって、以下に境界力の不連続量の初期分配の方法および自平衡条件成立のために本研究で提案する手法を述べる。

2.1 境界力の不連続量の初期分配

事後誤差解析を要素ごとの計算で行うために、要素境界に作用する境界力の不連続量を(15)式を満足するように隣接要素に分配しなければならない。2/3次元弾性問題や板曲げ問題においては、応力は線形に分布しているという仮定の基で境界力の分配を行ってきた。つまり、境界力の不連続量 ρ_{ij} の隣接要素 i と j への分配量 $\bar{\rho}_i$ と $\bar{\rho}_j$ は、境界面と隣接する要素の重心間の距離の比で決定された。この様子は Fig. 1 に示されている。次に、Fig. 2 に示されるような隣接要素が同一平面上に存在しない組板構造を考える。このような構造物の全体解析（ここでは2要素による解析で

Fig. 1 Allocation of ρ_{ij} for plane structure Fig. 2 Allocation of ρ_{ij} for non plane structure

も構わない)を行った場合、この境界に与えられた荷重(つまり境界力の不連続量)は、高い剛性を持つ部材により多く、低い剛性の部材にはより少なく分配される。つまり、剛性比に応じて分配量が決定されるのである。よって、本研究では境界力の不連続量を各自由度ごとに隣接要素の剛性比に従って分配する。隣接要素が同一平面上にあり、同じ物性値を有する場合、この手法は前述の距離の比による分配法と同じ結果を与える。

2.2 各要素における自平衡条件の成立

要素ごとの誤差解析により全解析と同じ解を得るために、(17)式の自平衡式の満足が必要条件となる。しかし、上節に述べられた境界力不連続量の初期分配および平衡方程式中の残差より得られた等価節点力 $\mathbf{g}^{init}$ は一般に自平衡条件を満たすことができない。よって、次式を満足するような修正荷重を加えることを考える。

$$\mathbf{R}(\mathbf{g}^{init} + \Delta\mathbf{g}) = 0 \quad (19)$$

ここで $\Delta\mathbf{g}$ は修正荷重を持つベクトルである。 $\Delta\mathbf{g}$ の成分

は自平衡条件式の数より多いため、(19)式を満足する $\Delta\mathbf{g}$ を一義的に決定できない。よって、本研究は次に述べる様な最適化手法を導入する。剛性比による境界力の初期分配が、ある程度の精度を持って行われていれば、節点荷重の修正量は少ない方がよい。よって、(20)式で与えられる目的関数 F_1 を極小にするように $\Delta\mathbf{g}$ を決定する。

$$F_1 = \Delta\mathbf{g}^t \Delta\mathbf{g} + \lambda^t \mathbf{R}(\mathbf{g}^{init} + \Delta\mathbf{g}) \quad (20)$$

ここで λ は Lagrange の未定係数を有するベクトルである。

3. 例題

3.1 組板構造問題

Fig. 3 に示される組板構造物(スティフ付き平板)を平面シェル要素を用いて解析する。荷重条件として、平板に一樣分布荷重 p を $-z$ 方向に加えた。また、境界条件として平板の四辺に単純支持条件を与える。問題の対称性を考慮して、Fig. 3 の斜線部に対し Fig. 4 に示される 1/4 モデルを用いて有限要素解析を行い、その事後誤差解析結果を Table 1 に示す。ここで、 $\|\mathbf{e}\|^{est}$, $\|\mathbf{e}\|^{ref}$, および $\|\mathbf{u}\|$ は、それぞれ、全領域における予測誤差のエネルギーノルム、参考誤差のエネルギーノルム、そして、変位のエネルギーノルムである。エネルギーノルムは板厚方向も考慮した値である。また、Fig. 4 のモデルをさらに 4 分割して得られた細分割モデル(888 要素, 925 節点)による応力分布を参考値として用いる。つまり、この参考値と元のモデルの有限要素解との差より参考とする誤差のエネルギーノルムを求

Fig. 3 3-dimensional plate structure

Fig. 4 Finite element model for 3-dimensional plate structure

Table 1 Estimated and referenced error norms

$\ e\ ^{est}$	$\ e\ ^{ref}$	$\ u\ $	$\ e\ ^{est}/\ u\ $	$\ e\ ^{ref}/\ u\ $
0.601	0.517	5.341	0.112	0.097

Fig. 5 Distribution of estimated energy norm of error

Fig. 6 Distribution of referenced energy norm of error

め、予測された誤差の精度検証を行う。事後誤差解析より有限要素解は11.2%の誤差を持っていると予測されている。一方、参考誤差は9.7%となっており、良い精度で事後誤差が予測されている。Fig. 5とFig. 6に上板の各要素が含む誤差ノルムの予測値($\|e\|^{est}$)と参考値($\|e\|^{ref}$)をプロットした。各要素の予測誤差ノルムも参考値と比較して全体的に高めとなっているが、要素レベルの事後誤差も良い精度で予測されていることが確認された。 $\|e\|^{est}$ と $\|e\|^{ref}$ の最高値はそれぞれ0.066および0.050である。事後誤差評価で重要であり、また、難しいとされている誤差のピーク値もまずまずの精度を持って評価されている。また、Fig. 7に応力解により得られたひずみのエネルギーノルムの分布を、Fig. 8に予測された誤差のエネルギーノルムと変位のエネルギーノルムの比の分布を示す。この比は応力中に含まれる相対誤差とほぼ同等の値を表現するものである。相対誤差の大小は誤差だけでなく応力のレベルにも大きく影響を受ける。 x 軸付近で相対誤差が高くなっているが、この例題では x 軸近辺の変位のエネルギーノルムは板中央部と比較して低い。このような場合、相対誤差よりも、誤差ノルムそのものの分布が重要になってくる。

Fig. 7 Distribution of energy norm of displacement

Fig. 8 Distribution of relative error

Fig. 9 Part of lower stool of bulk carrier

有限要素解の誤差ノルム分布のピークは縦板と上板の接合部近辺に現れている。誤差の分布傾向はFig. 7に示される変位のエネルギーノルムの分布傾向と異なっている点に注目したい。要素再分割・再解析により有限要素解の精度を向上させたい場合、高い応力を有する要素を小さくすることが一般に行われてきた。しかし、有限要素解析の誤差を最小にするためには、高い誤差を含む要素の細分割が必要である^{3,4,7)}。また、船体構造物などの大規模構造解析ではズームング手法などを併用した再分割・再解析がよく行われる。事後誤差評価結果を基にしながらズームング領域や要素再分割の深さを決定することは有効であると考えられる。

Table 2 Estimated error norm for lower stool problem

CASE	$\ e\ ^{est}$	$\ u\ $	$\ e\ ^{est}/\ u\ $
1	0.03386	0.05028	0.674
2	0.00717	0.01755	0.408

Fig. 10 Finite element model for a lower stool

3.2 ロースツール部構造解析問題

船体構造解析の一部分であるロースツール下端部を取り出して、幾つかの荷重条件の基で応力解析・事後誤差解析を行う。Fig. 9 に、ここで取り扱うロースツール下端部を示す。荷重条件として、図中のハッチ部に次のような分布荷重を作用させる。

CASE-1: ハッチされた斜板の上面に一樣分布荷重を面と垂直な方向に与える。

CASE-2: ハッチされた斜板の上面に一樣なせん断応力を y 軸方向に与える。

両ケースとも分布荷重の大きさは単位量とする。また、Fig. 9 に表示されている荷重は CASE-2 の状態を表している。平面シェル要素によるモデル (Fig. 10) を用いて応力解析・事後誤差解析を行い、その結果を Table 2 に示す。CASE-1 の相対誤差は 67% と、また、CASE-2 の相対誤差は 41% と予測されている。この程度のメッシュの粗密を有するモデルの集合で船体構造解析モデルを作成した場合においても、この例題と同程度のかなり高い相対誤差が含まれるものと考えられる。次に、誤差の分布状態を検討する。上板 (Fig. 10 中の A-B-C-D-E-F-G-H-I-J を含む平板の集合面) における単位体積当りの誤差のエネルギーノルム、変位のエネルギーノルム、および、両者の比の分布を Fig. 11 (CASE-1) と Fig. 12 (CASE-2) にそれぞれプロットする。CASE-1 では D-E-F-G 内底板で、CASE-2 では斜板で誤差が急激に上昇している。また、相対誤差は、低い応力が現れている CASE-2 の E-F 辺を除くと、一様に近い分布になっている。それらの値は、CASE-1 で 100% 程度、CASE

Fig. 11 Energy norm of error per unit volume (upper), energy norm of displacement per unit volume (middle) and relative error (lower) for CASE-1

Fig. 12 Energy norm of error per unit volume (upper), energy norm of displacement per unit volume (middle) and relative error (lower) for CASE-2

Fig. 13 Transverse ring of oil tanker and distributed load pattern

Fig. 14 Finite element model for transverse ring

-2 で 50% 程度となっている。同一モデルによる応力解析でも荷重条件により誤差の分布傾向、および絶対誤差や相対誤差の程度も大きく異なってくる。構造が複雑なものほどこの傾向は強くなり、事後誤差評価の役目は重要になると思われる。

3.3 トランスリング構造解析問題

Fig. 13 に示されるトランスリングの問題を考える。Fig. 14 に示された膜要素により形成される有限要素モデルを用いて応力解析・事後誤差解析を行い、その結果を Table 3 に示す。この応力解析は平均で 21% の相対誤差を含むと予測された。全解析領域における各要素の誤差ノルムの分布は Fig. 15 に示されている。また、Fig. 16 の上図に船側トランスバース内側境界 S_1 に接する要素における誤差のエ

Table 3 Estimated error norms for the original and averaged stresses

$\ e\ _{org}^{est}$	$\ e\ _{ave}^{est}$	$\ u\ $	$\ e\ _{org}^{est}/\ u\ $	$\ e\ _{ave}^{est}/\ u\ $
0.00705	0.00434	0.03372	0.209	0.129

Fig. 15 Distribution of estimated error norm for the original stress

Fig. 16 Distribution of $\|e\|_i$, $\|u\|_i$ (upper) and $\|e\|_i/\|u\|_i$ (lower) for the original stress along S_1

ネルギーノルム ($\|e\|_i^{est}$) を実線で、変位のエネルギーノルム ($\|u\|_i$) を点線で示す (2×2 Gauss pt. と表示)。また、Fig. 16 の下図に相対誤差 ($\|e\|_i^{est}/\|u\|_i$) を実線で示す。同様に、境界 S_2 における誤差評価結果を Fig. 17 に示す。これらの境界は Fig. 14 上に示される A_1 から始まり、 B_1 , C_1 , D_1 を通過し A_1 に戻る境界 S_1 と、 A_2 から始まり A_2 に戻る境界 S_2 である。これより、コーナー付近の要素は応力と

Fig. 17 Distribution of $\|e\|_i, \|u\|_i$ (upper) and $\|e\|_i/\|u\|_i$ (lower) for the original stress along S_2

Fig. 18 Distribution of estimated error norm for the averaged stress

誤差が高くなっていることが把握できる。誤差の要因として、コーナー付近で応力分布が激変していることや要素形状が悪くなっていることが考えられる。また、コーナー近辺以外で相対誤差が高くなっている要素があるが、これは変位のエネルギーノルムが低いために起きたものである。誤差のエネルギーノルムは低いため、この領域の高い相対誤差は問題にならない。

変位法に基づく有限要素解析では、求めた変位の近似関数の導関数として応力を得ている。そのため、応力の近似式の次数は変位の近似式の次数より一階低くなり、応力の精度は変位の精度より劣ってしまう。このような精度低下をカバーするため、節点などで平均化された応力を用いることがしばしばある。そこで、応力の平均化によりどの

Fig. 19 Distribution of $\|e\|_i, \|u\|_i$ (upper) and $\|e\|_i/\|u\|_i$ (lower) for the averaged stress along S_1

Fig. 20 Distribution of $\|e\|_i, \|u\|_i$ (upper) and $\|e\|_i/\|u\|_i$ (lower) for the averaged stress along S_2

程度の精度向上が得られるかを把握するため、平均化応力に対し事後誤差評価結果を行い、その結果を Table 3 に示した。応力中の相対誤差は 12 % となり、応力の平均化により誤差は元の誤差の 6 割程度まで減少している。しかし、

Fig. 18~20 に示されるように誤差の減少は主にコーナー部を含まない領域、つまり、比較的誤差の低い領域で生じている。ある程度以上の誤差が存在する領域の応力の精度向上のためには、応力の平均化だけでは不十分と考えられる。

応力解析において応力値はガウス積分点で評価される。また、要素内の応力分布を得るために評価点の応力値を各要素ごとに外挿する手法が良く用いられる。本例題における応力解析は2次元4節点要素により行われ、その応力値は低減積分点（1点）で評価された。この場合、要素内の応力は様な分布と仮定される。一方、事後誤差は2次元8節点要素を用いて評価される。誤差のエネルギーノルムを低減積分点で評価すると、その評価点は4点となり、応力評価点と異なる。この4評価点で数値計算を行うと、要素内で仮定された応力分布に対する誤差のエネルギーノルムは精度良く求めることができる。しかし、応力評価点（低減積分点）以外の応力値の精度は一般に低いため、上記の誤差ノルムは応力評価点における応力の誤差よりも大きくなってしまふ。もし、応力評価点の応力の誤差に注目したいならば、誤差のエネルギーノルムの評価も応力評価点で行う必要がある。本例題において、応力評価点でどの程度の誤差が存在するかを把握するため、誤差のエネルギーノルムの評価を1点で行った。Table 4 に示されるように、応力評価点の相対誤差は11%となった。評価点の応力値は様な応力分布に対する誤差の半分程度となり、精度が高いことが確認された。Fig. 16 と Fig. 17 に境界 S_1 と S_2 における誤差のノルム、および相対誤差の分布を破線により示す（1×1 Gauss pt. と表示）。各要素における誤差のレベルも半分程度になっていることが示されている。この例題においては、この誤差は平均化により求めた応力分布に対する誤差評価結果に近い数値となったが、両者の間に常にこの様な関係が存在するわけではない。

4. 結 言

本論文は船体構造解析の事後誤差解析の基礎的研究を行った。船体構造物は組板構造であるため、参考文献1), 2), 5), 6), 10) で述べられた事後誤差評価の手法に以下に示す改良を加えた。

- 1) 各自由度に対する隣接要素の剛性比により境界力の不連続量を分配する。
- 2) 各要素の自平衡条件を満足するために、最小変更量を目的関数とした最適化手法を利用する。

例題1により、組板構造物に対する上記の事後誤差評価の精度が確認された。例題2, 3では船体構造物への応用例を示した。本論文で示された例題は船体構造物の一部を切り出して、単独に加えられた荷重条件の基で行われたものである。実際の設計で用いられている有限要素解析への適用が今後の課題として残されている。

Table 4 Estimated error norms for the original stresses at Gauss points

$\ e\ _{gpt}^{est}$	$\ u\ $	$\ e\ _{gpt}^{est}/\ u\ $
0.00380	0.03372	0.113

例題3で、応力評価点における応力値の事後誤差評価を行った結果、この点の相対誤差は要素全体の相対誤差の半分程度であることが示された。例題1, 2における事後誤差評価では、外挿により得た応力分布の誤差のエネルギーノルムが算出されている。これらの例題で応力評価点における応力の誤差を評価したならば、先に示された誤差の数値より低くなるものと考えられる。事後誤差評価結果を基にした順応型要素再分割を行う場合は通常の2×2のガウス積分点で誤差のエネルギーノルムの評価を行い、応力評価点における応力の誤差に着目する場合は応力評価点における誤差のエネルギーノルムを評価すべきであろう。

謝 辞

SR207-WG1における作業が本研究の遂行に大きな勇気を与えてくれました。当委員会の各位に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 大坪英臣, 北村充: '有限要素法による平面応力問題の誤差評価と応力修正に関する研究', 日本造船学会論文集, 165, 225-232, 1989.
- 2) 大坪英臣, 北村充: '二次元応力集中問題有限要素解の誤差評価と要素再分割', 日本機械学会論文集, 56-525-A, 220-227, 1990.
- 3) 大坪英臣, 久保田晃弘, 北村充: '有限要素法の事後誤差評価結果を利用した順応型要素再分割に関する研究', 日本造船学会論文集, 167, 179-189, 1990.
- 4) 大坪英臣, 北村充, 久保田晃弘: '有限要素法の最近の動向 (その6)', 日本造船学会誌, 736, 630-642, 1990.
- 5) 大坪英臣, 北村充: '3次元弾性問題および板曲げ問題における有限要素解の事後誤差評価', 日本機械学会論文集, 57-541-A, 1991.
- 6) H. Ohtsubo and M. Kitamura: 'Element by Element a Posteriori Error Estimation and Improvement of Stress Solutions for Two-Dimensional Elastic Problems', Int. J. Num. Meth. Engng., 29, 233-244, 1990.
- 7) O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu: 'A Simple Error Estimation and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis', Int. J. Num. Meth. Engng., 24, 337-357, 1987.
- 8) O. C. Zienkiewicz and J. Z. Zhu: 'Error Estimates

- and Adaptive Refinement for Plate Bending Problem', Int. J. Num. Meth. Engng., 28, 2839-2853, 1989.
- 9) S. M. Yunus, T. P. Pawlak and M. J. Wheelen : 'Application of the Zienkiewicz-Zhu Error Estimator for Plate and Shell Analysis', Int. J. Num. Meth. Engng., 29, 1281-1298, 1990.
- 10) H. Ohtsubo and M. Kitamura : 'Element by Element A Posteriori Error Estimation of the Finite Element Analysis for Three-Dimensional Elastic Problems', Int. J. Num. Meth. Engng., to be published.
-