塑性節点法による梁柱，および矩形板の 弾塑性大たわみ解析

正員 上 田 幸 雄* 正員 梅 本 勝 弥**
正員 正 岡 孝 治***

Elasto-Plastic Large Deflection Analysis of Beam-Columns and Rectangular Plates
by using Plastic Node Method

by Yukio Ueda, *Member* Katsuya Umemoto, *Member*
Kouji Masaoka, *Member*

Summary

The author's research group developed Plastic Node Method (P. N. M.) and has demonstrated the efficiency of this method in analyzing the material nonlinear behavior of many kinds of structures, such as ships, offshore structures. While, for analysis of elastic large deflection (geometrical nonlinear behavior) of structural elements, such as beam-columns, rectangular plates, some analytical methods are effective.

In this paper, these two methods are combined for an accurate and efficient analysis of elasto-plastic large deflection of these elements. The work of this paper will be summarized as follows.

- 1) The original plastic node method is modified in such a way that condensed nodal plastic displacements are redistributed in the element for evaluation of elasto-plastic stiffness with large deflection. By this treatment, an accurate analysis becomes possible for elasto-plastic large deflection of the elements, including at post-ultimate strength state.
- 2) A simple and accurate deformation function for each type of the elements is selected.
- 3) Appropriate locations and number of checking points for plasticity are proposed. To take account of intermediate state between initial plasticity and full plasticity, an appropriate size of plastic zone at each checking point is assumed.

This method is applied to several examples, and its usefulness and validity is demonstrated by comparing with the results of the finite element analysis. Necessary computer time for the example analysis by this new method was found to be 1/60~1/100 by F. E. M.

1. 緒 言

著者の研究グループでは，塑性節点法を開発し，船舶，海洋構造物などの種々の構造物の材料非線形挙動を解析し，非常に有効であることを示してきた^{1)~4)}。

通常，構造物は負荷の増加と共に，部分的に塑性化し，その領域が拡がり，弾塑性挙動を示す。このような挙動の

解析に有限要素を用い塑性節点法を適用すると，要素内の任意の位置に設けた塑性判定点で，塑性条件を満足すると生じる塑性変形は，要素節点に転移される。したがって，塑性変形は節点のみに集約され，弾性剛性方程式が求まると，弾塑性剛性方程式は，単にマトリックス演算のみで求められるので解析が極めて簡潔になる。

他方，梁性，矩形板などの構造要素の弾性大たわみ挙動の解析には解析解的解法が高効率である。本研究では，これらの要素の塑性域を伴う場合に塑性節点法を導入して，高精度，高効率な解析法を展開した。具体的には
(1) 節点に集約されている塑性変形を部材全体に分布させる解析法を定式化する。これによって，先程述べた，梁柱，矩形板といった構造部材の座屈から最終強度，そして最終強度後の挙動も含めて1要素で解析することを可能とする。

* 大阪大学溶接工学研究所

** 大阪大学大学院

*** 防衛大学校

(2) 要素の変形に適した変位関数を選択する。

(3) 適切な位置と数の塑性判定点の設定, そして初期塑性から全断面塑性までの硬化を考慮するための塑性領域を選択する。

最後に, 数値解析を行い, 有限要素法の解析結果と比較して本解析の有用性を示す。

2. 塑性節点法を用いた, 梁柱, 矩形板の弾塑性大たわみ解析の定式化

2.1 基本仮定

解析対象となる梁柱, 矩形板要素と, それぞれの座標系を Fig. 1 に示す。梁柱要素に対しては両端に節点 1, 2 を, 矩形板要素の場合は 4 隅に節点を設ける。又, 以下に述べる仮定に従うものとして解析法の定式化を行う。

(1) 対象とする梁柱, 矩形板は, Kirchhoff の仮定に従うとする。梁柱要素に生じる応力は σ_x のみ, 又, 矩形板要素に関しては平面応力状態を仮定する。

(2) 材料は完全弾塑性体を仮定する。

(3) 塑性挙動の解析には塑性節点法を用いる。

尚, 本解析法では, 一度, 一般化変位の形で節点に集約された塑性変形を要素の変位関数に従って要素内に再分布させそれを新たに要素の塑性変形とする。又, そのような塑性変形と弾性変形, 初期変形の和を全体変形と名づける。

2.2 弾性剛性方程式

本節では矩形板要素を対象として弾性剛性方程式の定式化を行う。尚, 梁柱要素に対してはこの節で述べる結果から容易に導き出されるのでここでは省略する。

2.2.1 変位成分

要素の変形 $\{h\}$ は, 面内変形 $\{s\}$ と面外変形 $\{w\}$ とからなる。すなわち,

$$\{h\} = \{s, w\}^T \quad (1)$$

Fig. 1 Beam-column and rectangular plate elements and coordinate systems

面内変形 $\{s\}$, 面外変形 $\{w\}$ を変位関数 $[A_p], [A_b]$, 一般化面内変位 $\{s_n\}$, 一般化面外変位 $\{w_n\}$ を用いて表すと

$$\begin{aligned} \{s\} &= [A_p]\{s_n\} \\ \{w\} &= [A_b]\{w_n\} \end{aligned} \quad (2)$$

又, 一般化変位 $\{h_n\}$ の面内成分, 面外成分をとりだすための行列 $[T_s], [T_w]$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \{s_n\} &= [T_s]\{h_n\} \\ \{w_n\} &= [T_w]\{h_n\} \end{aligned} \quad (3)$$

次の諸量を定義する。

$$\begin{aligned} \{\epsilon\} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \\ \{s, a\} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \equiv [B_p]\{s_n\} \\ \{w, a\} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \equiv [B_b]\{w_n\} \\ \{w, aa\} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \equiv [B_{b2}]\{w_n\} \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)で添字 a は座標に関する偏微分を表す。

2.2.2 平衡方程式

本論文では解析は増分法に基づいて行う。微小増分間の平衡方程式を仮想仕事の原理を用いて導出する手順は, 一般の有限要素法によるものと基本的に同じである。最終的に求める増分形の平衡方程式は次のようになる。

$$\{dX_n\} + \{L_n\} = [K^e]\{dh_n^e\} \quad (5)$$

ここで

$$\begin{aligned} \{L_n\} &= \{X_n\} - [T_s]^T \{R_p\} - [T_b]^T \{R_b\} \\ [K^e] &= [T_s]^T [K_{pp}^e] [T_s] + [T_s]^T [K_{pb}^e] [T_w] \\ &\quad + [T_w]^T [K_{bp}^e] [T_s] + [T_w]^T [K_{bb}^e] [T_w] \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \{R_p\} &= \int [B_p]^T \{\sigma\} dV \\ \{R_b\} &= \int ([B_{b1}]^T [C_o]^T - z [B_{b2}]^T) \{\sigma\} dV \\ [K_{pp}^e] &= \int [B_p]^T [D] [B_p] dV \\ [K_{pb}^e] &= [K_{bp}^e]^T = \int ([B_p]^T [D] [C_o] [B_{b1}] \\ &\quad - z [B_p]^T [D] [B_{b2}]) dV \\ [K_{bb}^e] &= \int (z^2 [B_{b2}]^T [D] [B_{b2}] + [B_{b1}]^T [P] [B_{b1}]) dV \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +[B_{b1}]^T[C_o]^T[D][C_o][B_{b1}] \\
 & -z[B_{b1}]^T[C_o]^T[D][B_{b2}] \\
 & -z[B_{b2}]^T[D][C_o][B_{b1}]dV
 \end{aligned}$$

$$[P] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

$$[C_o] = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix}$$

尚、 $[L_n]$ は荷重修正項で収束計算を行うことにより一般に零に収束させることができる。 $\{X_n\}$ は一般化力である。さらに $[C_o]$ の中のたわみ w は要素の全体変形を表す。 $[D]$ は応力-歪マトリックス（弾性）である。

2.3 弾塑性剛性方程式

本研究では、要素の塑性挙動の取り扱いには塑性節点法を適用する。計算例では塑性条件として、全断面塑性を塑性基準とするもの、断面の初期塑性を塑性基準とするものの2種類の塑性条件を用いたが、ここでは前者のみを対象にして定式化を示す。後者に関しては、文献(8)を参照されたい。

要素内の任意の位置 i の全断面塑性条件 F_i はその断面における単位長さ当たり膜力の3成分 N_x, N_y, N_{xy} 、曲げモーメントの3成分 M_x, M_y, M_{xy} 、全断面塑性膜力 N_Y 、全断面塑性曲げモーメント M_Y を用いて次のように表すことができる。

$$F_i(N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}; N_Y, M_Y) = 0 \quad (6)$$

要素内の任意の位置での断面力は一般化力 $\{X_n\}$ の関数となる。故に式(6)の塑性条件も一般化力の関数として表すことが可能である。

$$F_i(\{X_n\}; N_Y, M_Y) = 0 \quad (7)$$

F_i を塑性ポテンシャルとみなして塑性節点変位増分 $\{dh_n^i\}$ を次式の様に定義する。

$$\{dh_n^i\} = d\lambda_i \{\phi_i\} \quad (8)$$

ここで、 $d\lambda_i$ ：正のスカラー

$$\{\phi_i\} = \left\{ \frac{\partial F_i}{\partial \{X_n\}} \right\}$$

今、要素内の1から m までの塑性判定点が塑性条件を満たした状態を考える。すなわち

$$F_i = 0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (9)$$

この要素に生じる塑性節点変位増分 $\{dh_n^i\}$ は、式(8)より次式で与えられる。

$$\{dh_n^i\} = \sum_{i=1}^m d\lambda_i \{\phi_i\} = [\Phi] \{d\lambda\} \quad (10)$$

ここで

$$[\Phi] = [\{\phi_1\}, \{\phi_2\}, \dots, \{\phi_m\}]$$

$$\{d\lambda\} = \{d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_m\}^T$$

材料を完全弾塑性体と仮定しているので、各塑性判定点の内力は塑性条件を満たすかぎり次の条件を満たしなくてはならない。

$$dF_i = \{\phi_i\}^T \{dX_n\} = 0 \quad (i=1, \dots, m)$$

すなわち

$$[\Phi]^T \{dX_n\} = \{0\} \quad (11)$$

一方、一般化変位増分 $\{dh_n\}$ は弾性、塑性の各成分の和として次の形で与えられる。

$$\{dh_n\} = \{dh_n^e\} + \{dh_n^p\} \quad (12)$$

式(12)、式(10)を式(5)に代入すると

$$\{dX_n\} = [K^e] (\{dh_n\} - [\Phi] \{d\lambda\}) \quad (13)$$

この式(13)を式(11)に代入すると、 $\{d\lambda\}$ に関する連立一次方程式が求まる。すなわち

$$[\Phi]^T [K^e] [\Phi] \{d\lambda\} = [\Phi]^T [K^e] \{dh_n\}$$

故に、

$$\{d\lambda\} = ([\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^e] \{dh_n\} \quad (14)$$

式(14)を式(13)に再代入すると

$$\{dX_n\} = [K^p] \{dh_n\} \quad (15)$$

ここで

$$[K^p] = [K^e] - [\Phi] ([\Phi]^T [K^e] [\Phi])^{-1} [\Phi]^T [K^e]$$

以上により弾塑性剛性方程式が求まった。

2.4 塑性条件と塑性判定点の位置

2.4.1 塑性条件

本論文では、先程述べたように2種類の塑性条件を用いる。すなわち、全断面塑性を塑性基準とするもの^{1),4)}、断面の初期塑性を塑性基準とし全断面塑性に至る過程を歪硬化として取り扱うものである^{7),8)}。ここで、前者を塑性条件-I、後者を塑性条件-IIと名づける。

数値解析では、具体的には下記の塑性条件を用いた。

(梁柱要素の場合)

塑性条件-I

$$F = \left[\frac{N}{N_Y} \right]^2 + \frac{|M|}{M_Y} - 1 \quad (16)$$

N, M ：塑性判定点における軸力、曲げモーメント

N_Y, M_Y ：全断面塑性軸力と全断面塑性曲げモーメント

塑性条件-II

$$F = Y - N_Y$$

ここで

$$Y^2 = \frac{Y_0^2 (\bar{\epsilon}^p)^4 + Y_0^2 B}{(\bar{\epsilon}^p)^4 + B}$$

$$Y_0^2 = N_Y^2 (n^2 + 2C_f \sqrt{n^2 m^2} + C_f^2 m^2)$$

$$Y_1^2 = N_Y^2 (n^2 + 0.5m^2 + \sqrt{0.25m^4 + n^2 m^2})$$

$$n = N/N_Y, m = M/M_Y$$

さらに

C_f ：形状係数（中実矩形断面の場合1.5）

Y_0 ：初期塑性状態に対する降伏関数

Y_1 ：全断面塑性状態に対する降伏関数

A, B ：断面形状と材料の応力-歪関係から求まるパ

ラメータ ($0 \leq A < 1, B > 0$) であり具体的な数値は解析例で示す。

$\bar{\varepsilon}^p$: 塑性判定点での相当塑性歪

$\bar{\varepsilon}^p$ を用いて初期降伏 ($\bar{\varepsilon}^p = 0, Y^2 = Y_0^2$) から全断面降伏 ($\bar{\varepsilon}^p = \infty, Y^2 = Y_1^2$) に至る過程を表現する。

(矩形板要素の場合)

塑性条件-I

膜力と断面曲げモーメントの相関を考慮した Ivanov の降伏条件

$$F = Q_n + 0.5Q_m + \sqrt{0.25Q_m^2 + Q_{nm}^2} - 1 \quad (18)$$

$$Q_n = n_x^2 - n_x n_y + n_y^2 + 3n_{xy}^2$$

$$Q_m = m_x^2 - m_x m_y + m_y^2 + 3m_{xy}^2$$

$$Q_{nm} = n_x m_x + n_y m_y - 0.5(n_x m_y + n_y m_x) + 3n_{xy} m_{xy}$$

$$n_x = N_x/N_Y \quad n_y = N_y/N_Y \quad n_{xy} = N_{xy}/N_Y$$

$$m_x = M_x/M_Y \quad m_y = M_y/M_Y \quad m_{xy} = M_{xy}/M_Y$$

塑性条件-II

$$F = Y - N_Y \quad (19)$$

ここで

$$Y^2 = \frac{Y_1^2(\bar{\varepsilon}^p)^A + Y_0^2 B}{(\bar{\varepsilon}^p)^A + B}$$

$$Y_0^2 = N_Y^2(Q_n + 3\sqrt{Q_n Q_m} + 2.25Q_m)$$

$$Y_1^2 = N_Y^2(Q_n + 0.5Q_m + \sqrt{0.25Q_m^2 + Q_{nm}^2})$$

$A, B, \bar{\varepsilon}^p$ の定義は式(17)と同じ Q_n, Q_m, Q_{nm} の定義は式(18)と同じである。

2.4.2 塑性判定点の位置

塑性判定点の位置は梁柱の場合、要素の中央に1点のみを設けた。矩形板の場合は、塑性判定点の数は9点とし、その位置を Fig. 2 に示す。

軸圧縮荷重を受ける両端支持の梁柱を解析対象とした場合、最小数の塑性判定点として要素の中央のみに設定することは、梁の崩壊挙動から見ても適正なことである。しかしながら、矩形板を解析対象とした場合、その寸法の違い、荷重条件の違いによってまったく異なった挙動を示すので、適当な数の判定点を設ける必要がある。又、塑性節点法では要素の塑性化を要素内の限られた数の塑性判定点での塑性化をもって代表させるため、梁柱、矩形板といった構造部材を1要素で解析する場合、塑性領域の拡がりに対する考慮が必要となる。特に、塑性条件-IIを用いる場合には、初期塑性から全断面塑性に至る挙動を歪硬化として取り扱う。その場合にはすでに文献(8)で示したように、本来、変化する塑性領域を逐次追跡し、その影響を積分して要素の剛性に反映させる必要がある。

本論文では、簡潔な解析法の展開を主目的としているので、詳細に塑性領域を追跡することはせず、次に述べるようにあらかじめ塑性領域を仮定して解析を行う。後の解析例でも示すように梁柱の場合には $L/3$ づつを中央部と両端部の挙動を表す部分と考え、そして、中央部の $1/3$, すな

Fig. 2 Locations of checking points for plasticity and assumed plastic zone

わち $L/9$ が塑性判定点が代表する塑性領域であると考え、梁柱の崩壊挙動を精度良く解析できることが分かった。同様の考え方を1辺の長さが a である正方形板に適用すると、幅方の $a/3$ づつが、又、長さ方向の $a/3$ づつが両端部と中央部を代表する部分と考える。そして、塑性判定点を各 $1/9$ の部分の中央部に設ける。塑性領域としては $(a/3) \times (a/3)$ の領域の $(a/3) \times (1/3) \times (a/3) \times (1/3)$, つまり $a^2/81$ の領域が各部分の中央に設けた塑性判定点の代表する領域となる。後出の解析例で塑性領域の広さと解の精度について示すがこの領域が非常に高い精度の解を与える。

矩形板 ($a \times b$) においてはその挙動を高い精度で追跡できるような塑性判定点の位置、塑性領域の選択には今後の研究が必要であるが、本論文では、その最初の試みとして矩形板の場合でも正方形板と同様に9個の塑性判定点を設定し、塑性領域 $ab/81$ を各塑性判定点の代表する領域であるとして解析を行った。

2.5 節点変位と要素の変形

節点変位と要素の変形の関係について説明するために、今、両端に節点1, 2をもつ梁柱要素で考える。梁柱要素の中央部で塑性化が生じた場合、有限要素法の様な要素の積分点毎で弾塑性解析を行う解析法では塑性化が生じた場所で塑性変形が生じる。これに対して、塑性節点法では塑性判定点を要素の中央点 k に設けた場合、Fig. 3(a)の様に生じる塑性変形は節点1, 2に転移され、そこに集約される。そして、節点変位は弾性成分と塑性成分との和となる。この取り扱いによって要素の弾性剛性行列が求まると弾塑性

Fig. 3 Nodal plastic deformation at the nodes

剛性行列はマトリックス演算のみで導出され、計算が大幅に簡潔になっている。ところで、Fig. 3(b)の様にこの塑性判定点 k に始めから節点を設け解析すると、塑性判定点が塑性節点となりその点に塑性変形が生じる。この場合の要素端節点 1, 2 での変形は、この中間節点の塑性変形と部分要素の弾性変形の和で表され、その大きさは中間に節点ない場合と一致する。この両者を比較すると、次のことが考えられる。前者の方法、すなわち、要素を分割せずに塑性判定点を要素内に適当に設けて塑性変形を節点に集約する方法は取り扱いが簡潔になり、しかも、節点 1, 2 での全体変形すなわち弾塑性変形は、後者の場合と一致する。しかし、要素は節点を除いて塑性変形が生じていないような取り扱いになっている。これに対して、後者の取扱いは、要素の全体変形に塑性変形を含んだ取り扱いになっている。実際の要素の挙動は後者のようになっている。要素中央には塑性判定点だけで、節点を設けない前者の取扱いについても、要素の挙動が微小変形の枠内では特別の考慮を必要とせず両者の解は一致する⁹⁾。これに対して要素が大たわみ挙動を示す場合には要素端のみならず、要素自身の全変形が挙動に影響する。したがって、前者の場合にも、塑性変形が要素に分布しているとして取り扱うのが適正である。

定点の応力と節点力の関係を用いて表現したが、この応力と節点力の関係は要素の弾性変位関数を基にした関係であ

り、判定点の塑性変形を節点に転移させるのに、この関係を適用したことになる。したがって節点に集約された塑性変形を要素に分布させるのに弾性変位関数を用いるのが適正であると考ええる。

2.6 弾性歪増分の計算における全体変形

本論文で示す解析法では増分間に生じる弾性歪増分 $\{d\epsilon^e\}$ は前ステップまでの全体変形の影響を受ける。当然、全体変形の中には塑性変形も含まれている。これに関しては次の様に説明できる。塑性節点法では塑性条件を節点力の関数で表し、それを塑性ポテンシャルとみなして塑性流れ則を適用するため塑性変形は節点のみに集約されることとなる。そして、全体変形からそのような塑性変形を引いたものを弾性変形と考える。従来では要素は弾性変形のみに対応する形状をしているとして定式化されてきた⁹⁾。しかし、前節で述べたように要素内に塑性判定点を設けた場合には、要素自体（ただし節点は除く）は弾性変形しか生じない。要素は弾性変形に対応する形状をしているとする取り扱いでは、要素の全体変形自体が剛性に大きく影響を与える問題、例えば圧縮をうける梁柱や矩形板の最終強度後の強度の低下現象を一要素のみで解析することはできなかった。しかしながら、前節で述べたように本解析法では、一度、節点に集約された塑性変形を変位関数に従って要素全体に分布させたものを塑性変形とみなす。そして、 n ステップにおける要素の変形は弾性変形 $\{h^e\}$ 、初期撓み w_0 それと塑性変形 $\{h^p\}$ も含めた全体変形 $\{h\}$ であると考えられる。その結果、 $n+1$ ステップでの剛性を求める際、 n ステップにおける全体変形に対応する形状を新たな初期変形と考え剛性を評価する。その後、このステップの計算により求められた弾性変形増分から求まる弾性歪増分が新たに要素内に加わり、それが応力増分を作る。そうすることにより、先程述べたような全体変形自体が剛性に大きく影響を及ぼす問題においても、要素の変形に適した変位関数を選択することにより、梁柱、矩形板といった比較的大きな構造要素の弾塑性大たわみ解析を塑性節点法を用いて 1 要素で効率よく行うことが可能となる。節点に集約された塑性変形を、本来、弾性変形を考慮して選ばれている変位関数を用いて要素全体に分布させることが解析精度に与える影響等は解析例を通して述べる。

2.7 変位関数

本研究では、構造部材である梁柱、及び矩形板の大たわみ挙動を 1 要素で解析することを目的としているので変位関数としては要素の変形に適した簡潔で、高精度であるものが望ましい。

2.7.1 梁柱要素の変位関数

両端支持の単純梁に対して、次の変位関数を用いた。

$$u = (1 - x/L)u_1 + x/L u_2$$

$$w = \theta L / \pi \sin(\pi x / L) \quad (20)$$

ただし、 θ は梁の節点 1 のたわみ角である。節点 2 でのたわ

み角は $-\theta$ である。

この要素での自由度は u_1, u_2, θ の3つであり、これらを一般化変位として定義する。又、これらに応じた一般化力が定義される。

2.7.2 矩形板要素の変位関数

解析対象とする矩形板は全辺単純支持とし、周縁は面内方向に直線を保って変位するものとする。変位関数としては藤田¹⁰⁾が用いたものを拡張した次の三角級数を用いた。

面外変形

全体面外変形

$$w = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$$

弾性面外変形

$$w^e = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{ij}^e \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right)$$

初期面外変形

$$w_0 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m w_{0ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{b}\right) \quad (21)$$

面内変形

$$u = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left\{ A_{1ij} \sin\left(\frac{2i\pi x}{a}\right) + A_{2ij} \sin\left(\frac{2i\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{2j\pi y}{b}\right) \right\}$$

$$v = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \left\{ B_{1ij} \sin\left(\frac{2j\pi y}{b}\right) + B_{2ij} \sin\left(\frac{2j\pi y}{b}\right) \cos\left(\frac{2i\pi x}{a}\right) \right\} \quad (22)$$

板が弾性域にある場合、ポテンシャルエネルギーの停留条件より面内変形に関する自由度 $A_{1ij}, A_{2ij}, B_{1ij}, B_{2ij}$ は面外変形に関する自由度 w_{ij} で消去することが可能である。この手順については文献(10)を参照されたい。又、面外変形として、多数の級数展開を行った場合は、面内自由度と面外自由度との関数関係がかなり複雑となるので次に記すような近似的な関係を用いた。まず最初に、各面外変形成分が単独に生じている場合に誘導される面内自由度との関数関係を求める。次に、面外変形が多数の自由度で構成されている場合の面内変位関数は、それぞれの面外変形成分が単独で生じた場合に誘導される面内変位関数の和とする。この近似は、面外自由度と面内自由度との関数関係において、異なる面外自由度間での連成項を省略したことにあたる。以上のようにして求まる面内自由度と面外自由度の関数関係は次のようになる。

$$A_{1ij} = \frac{a\pi}{16i} \left(\frac{j^2\nu}{b^2} - \frac{i^2}{a^2} \right) \{ (w_{ij}^e + w_{0ij})^2 - w_{0ij}^2 \}$$

$$A_{2ij} = \frac{i\pi}{16a} \{ (w_{ij}^e + w_{0ij})^2 - w_{0ij}^2 \}$$

$$B_{1ij} = \frac{b\pi}{16j} \left(\frac{i^2\nu}{a^2} - \frac{j^2}{b^2} \right) \{ (w_{ij}^e + w_{0ij})^2 - w_{0ij}^2 \}$$

$$B_{2ij} = \frac{j\pi}{16b} \{ (w_{ij}^e + w_{0ij})^2 - w_{0ij}^2 \} \quad (23)$$

$$(i=1, \dots, m \quad j=1, \dots, n)$$

尚、面内変形に関する自由度 $a_0 \sim a_3, b_0 \sim b_3$ は要素の4隅に設けた節点における8成分の節点変位で表す。それらと、面外変形に関する三角級数の展開項の数がこの要素の自由度となる。今の場合、これらすべてを要素の一般化変位とし、それに対応する形で一般化力が定義される。

3. 解 析 例

3.1 梁柱の解析

3.1.1 軸圧縮を受ける中実矩形断面梁の解析

細長比の異なる梁柱に軸圧縮を与える場合の解析をする。塑性条件-Iを用いた解析結果をFig.4に示す。この図からも分かるように、本解析法による解析結果はF. E. M. による結果と比較してその最終強度が高めになっている。これは、本解析法で塑性条件-Iを用いた場合、梁の表面から深さ方向への塑性化の広がる過程を考慮せず、全断面塑性条件が満足されるまで梁は弾性であるとして取り扱っているからである。しかしながら、最終強度後の挙動については本解析法による解はF. E. M. に漸近している。

同様の計算を塑性条件-IIを用いて行ったものの計算結果をFig.5に示す。塑性条件-IIでは、梁の表面から深さ方向への塑性化の広がりを歪硬化の形で取り扱うことができるため、最終強度に関しても良好な一致を示している。又、この解析結果から前章で述べた塑性領域の仮定が適当なものであることが分かる。

これらの解析結果から、一度集約された塑性変形を変位関数に従って要素全体に再分布させる考え方、全体変形の影響を考慮した剛性評価といった本解析法の考え方が妥当であるといえる。尚、塑性条件-IIを用いた場合の降伏関数のパラメータ A, B は文献(8)により $A=0.84, B=0.0002$ の値を用いた。

Fig. 4 Normalized average stress-average strain relationships of beam-columns subjected to axial compression

Fig. 5 Normalized average stress-average strain relationships of beam-columns subjected to axial compression

3.2 矩形板の解析

周辺単純支持の矩形板が種々の荷重を受ける場合の挙動を解析する。面外変形に対する変位関数は 1 軸圧縮, 2 軸圧縮を受ける正方形板の解析では, 式 (21) で 1×1 の 1 項のみで行った。他については, 随時, 記載する。初期たわみ w_0 は特に指定のない限り, 式 (21) で表される下式を用いている。

$$w_0 = w_{011} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (24)$$

塑性条件-II を用いた場合の降伏関数のパラメータ A , B は文献 (8) より $A=0.81$, $B=0.0003$ の値を用いた。F. E. M. 解析については対称性を考慮できるものについては板全体の $1/4$ を 10×10 の要素分割で行った。剪断荷重に関する場合は板全体を 12×12 の要素分割で解析を行った。矩形板の場合は板の短辺方向 $1/2$ を 32×6 の要素分割で解析を行った。又, 解析結果図中の w , w_0 は要素中央でのたわみ量と初期たわみ量を表し, σ_x , ϵ_x は板の載荷辺の平均応力, 圧縮方向への平均歪を表す。尚, 解析においては, 横圧を受ける正方形板の解析以外は変位制御で行った。

3.2.1 1 軸圧縮を受ける正方形板の座屈崩壊解析

Fig. 6 は 1 軸圧縮を受ける正方形板の座屈崩壊挙動を, 塑性条件-I を用いて解析したものである。座屈, 最終強度に関しては F. E. M. 解析と良好な一致を示している。最終強度後の挙動に関しては塑性条件-I を用いると, その後の強度は急激に低下する。これは, 全断面塑性を塑性条件とした場合, 要素内の塑性判定点がただ 1 つでも塑性条件を満足すると, あたかも板全体が塑性化したかのごとく挙動し, 殆ど応力の再配分が起らず崩壊するからである。Fig. 7.a 及び b は同様の計算を塑性条件-II を用いて行った。この解析法では初期塑性から全断面塑性への過程を歪硬化として取り扱うので, 前解析例のように最終強度後, 強度が急激に低下せず F. E. M. と殆ど一致している。Fig.

Fig. 6 Normalized average stress-average strain relationships of square plates subjected to uniaxial compression

(a) Normalized average stress-average strain relationships

(b) Normalized average stress-deflection relationships

Fig. 7 Square plates subjected to uniaxial compression

Fig. 8 Progress of yielding at checking points

Fig. 9 Influence of the size of assumed plastic zone on solutions

8は板厚 $t=18$ mmの正方形板を対象として荷重の増加と共に塑性条件が満足されていく過程を図示したものである。塑性条件—Iでは、非載荷辺の中央付近の塑性判定点が塑性条件を満足した後、新たに塑性条件を満足する判定点はなく即座に最終強度に至っている。しかしながら塑性条件—IIを用いた場合、板の中央でまず塑性条件が満足された後、次々に新たな判定点で塑性条件が満足されている。又、最終強度後のたわみの急激な増加のために、一部の判定点では除荷が起こり、最終的には、要素中央と非載荷辺の中央付近の塑性判定点のみが塑性条件を満足し続けている。このような挙動はF. E. M.解析によって得られる挙動を良く再現している。Fig. 9は同じ正方形板に対して、仮定する塑性領域の大きさが解に与える影響を調べたものである。塑性領域を必要以上に大きく仮定すると低めの最終強度を与え、逆に、小さ過ぎると高めの最終強度を与えることになる。この図からも前章で述べた程度の塑性領域の仮定が妥当であることがわかる。

Fig. 10は初期たわみの異なる正方形板の一軸圧縮下で

Fig. 10 Normalized average stress-deflection relationships of square plates subjected to uniaxial compression

Fig. 11 Normalized average stress-average strain relationships of square plates subjected to biaxial compressions

の挙動の違いを、塑性条件—IIを用いて解析したものである。初期たわみの影響による剛性、強度の違い、及び最終強度後の挙動が初期たわみ量に関係なしに収束していく様子が良く再現されている。

3.2.2 2軸圧縮を受ける正方形板の座屈崩壊解析

x 及び y 方向の荷重比を $\sigma_x:\sigma_y=1:1$ にして2軸圧縮を受ける正方形板の挙動を解析する。塑性条件—Iを用いて行ったものをFig. 11, 同様の計算を塑性条件—IIを用いて行ったものをFig. 12に示す。この解析例では、塑性条件—Iを用いた場合でも塑性条件—IIと同程度の精度が得られる。それには、次のような理由が考えられる。正方形板にこのような2軸圧縮がかかった場合、要素内にわずかでも塑性化が生じると、その後、応力の再分布が殆どなく、にわか最終強度に至る。そういった挙動が、塑性条件—Iに用いた場合に示す挙動に近いためであると思われる。この他に、塑性判定点の位置、数も考慮されるべき対象であ

Fig. 12 Normalized average stress-average strain relationships of square plates subjected to biaxial compressions

Fig. 14 Elasto-plastic analysis of a simply supported square plate under uniformly distributed lateral load

(a) Normalized average stress-average strain relationships

(b) Normalized average stress deflection relationships

Fig. 13 A square plate subjected to pure shear

る。

3.2.3 純剪断を受ける正方形板の座屈崩壊解析

剪断荷重のもとで正方形板の縁は直線に保ち、板全体はひし形を維持するものとして変位制御で解析を行った。又、この解析に用いた変位関数の展開項は x 方向に 1～3 項、 y 方向に 1～3 項の計 9 項であり、塑性条件-IIを用いた。Fig. 13.b から分かるように、本解析法と解析的に求まる座屈応力はほぼ一致しており、剪断荷重のような種々のたわみ成分が出現するような荷重条件下でも本解析法で用いた変位関数が有効であることが分かる。さらに、Fig. 13.a から分かるように、このような境界条件では座屈の有無に関わらず板の最終強度は全断面塑性荷重まで上昇するが、そういった挙動も本解析法で精度良く再現されている。

3.2.4 横圧を受ける正方形板の曲げ崩壊解析

Fig. 14 は等分布荷重を受ける周辺単純支持の正方形板の曲げ崩壊解析を塑性条件-IIを用いて行ったものである。たわみの変位関数として、式 (21) の展開項を 1×1 のみとした場合を一点鎖線で、 1×1 , 1×3 , 3×1 , 3×3 の 4 項をとったものを実線で示している。展開項を増やすと塑性関節線を仮定した剛塑性解に収束していくことが分かる。

3.2.5 種々の成分の初期たわみを持つ矩形板の座屈崩壊解析

Fig. 15 は種々の成分の初期たわみを持つ矩形板の一軸圧縮下での座屈崩壊解析を塑性条件-IIを用いて行ったものの解析結果である。矩形板のアスペクト比 $a/b=2.0$ 及び $a/b=3.0$ である。変位関数は式 (21) で、 $a/b=2.0$ の場合は 1×1 , 2×1 , 3×1 , 4×1 の計 4 項、 $a/b=3.0$ の場合は先程の 4 項に 5×1 を加えた計 5 項である。与える初期たわみは、アスペクト比 $a/b=2.0$ の板には $w_{011}=2.0$, $w_{021}=0.05$, $w_{031}=0.6$, $w_{041}=0.035$ (単位 mm) の 4 成分を、又、アスペクト比 $a/b=3.0$ の板の場合は $w_{011}=3.0$, $w_{021}=-0.3$, $w_{031}=0.7$, $w_{041}=-0.1$, $w_{051}=0.5$ (単位 mm) の 5 成分を与

Fig. 15 Elasto-plastic large deflection analysis of rectangular plates under uniaxial compression

えて解析を行った。塑性判定点は正方形板の場合と同様に9点設定し、塑性領域も $ab/81$ とした。矩形板に対する塑性判定点の位置が必ずしも適当であるとは言えないにもかかわらず、F. E. M. 解析と比較してもその精度は維持されている。又、種々の初期たわみを与えたこの解析でも、弾性剛性は座屈後も含めてかなりの精度で F. E. M. 解析の結果と一致している。このことから本解析法で用いている変位関数の有効性が見える。

4. 結 言

本論文の結言として以下のことを述べる。

- (1) 塑性節点法を用いた弾塑性大たわみ解析のために、その剛性評価の際に必要な要素の全体変位も考慮に入れた新しい解析法を定式化した。
 - (2) 解析を簡潔にするために、要素の変形に適した解析解から変位関数を選択した。
- 又、初期塑性を塑性基準とし全断面塑性に至る過程を歪硬化として取り扱う解析法においては、塑性判定点の塑性領域をあらかじめ仮定して解析を行った。そして、解析結果

は、F. E. M. と良く対応し、この仮定が極めて適正であることを示した。

(3) 本解析法を用いると梁柱、矩形板といった比較的大きな構造部材の種々の荷重下での強度、剛性共に1要素のみで精度良く、又、短時間 (F. E. M. の $1/60 \sim 1/100$) で解析できることを解析例を通して示した。

尚、本研究は、文部省科学研究費 試験研究(B) 1 によって行われたことを記して感謝する。

参 考 文 献

- 1) 上田, 松石, 山川, 赤松: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析, 日本造船学会論文集, 第124号(1968), pp. 183-191.
- 2) 上田, 赤松, 近江: マトリックス法による骨組構造物の弾塑性解析(その2), 日本造船学会論文集, 第126号(1969), pp. 253-262.
- 3) 上田, 中長, 藤久保: 塑性節点法の熱弾塑性および動的問題の適用, 日本造船学会論文集, 第153号(1983), pp. 299-308.
- 4) 上田, Rashed, 白: 矩形板および防撓板の理想化構造要素の開発(第1報) 一面内荷重を受ける場合一, 日本造船学会論文集, 第156号(1984), pp. 366-377.
- 5) 上田, 矢尾, 藤久保: 塑性関節法の一般化に関する研究, 日本造船学会論文集, 第146号(1979), pp. 323-329.
- 6) 上田, 藤久保, 三浦: 塑性選点法の開発一塑性節点法の拡張一, 日本造船学会論文集, 第158号(1985), pp. 328-339.
- 7) 安川, 川上, 吉川: 初期不整を有する球殻の圧壊強度解析, 日本造船学会論文集, 第151号(1982), pp. 197-207.
- 8) 上田, 藤久保: 歪硬化を考慮した塑性選点法, 日本造船学会論文集, 第160号(1986), pp. 306-317.
- 9) 上田, 藤久保, 為広: 径間荷重を受ける骨組構造物の最終強度一塑性選点法の応用一, 日本造船学会論文集, 第158号(1985), pp. 377-384.
- 10) 藤田, 野本, 仁保: 防撓板の圧縮強度について, 日本造船学会論文集, 第141号, (1977) pp. 190-197.