水中物体の形状推定の基礎研究

正員 河 辺

寛*

Inverse Acoustic Scattering for Shape Identification

by Hiroshi Kawabe, *Member*

Summary

This report is concerned with an inverse acoustic scattering problem for shape identification. The inverse problem under consideration is to determine the shape of an obstacle in the fluid from a knowledge of the time-harmonic incident wave and the far field pattern of the scattered wave. The integral equation which is based on the relation between the small modification of the boundary shape and sound scattering field is introduced. Using the integral equation and Schffer's theorem, a numerical method for inverse acoustic scattering problem is presented. Numerical examples are given showing the practicality of the method.

1. 結 言

海底の形状の調査や水中の物体の探索に音波を用いたソナーシステムが用いられる。このシステムは、音波を発し、対象物により反射された音を計測し、その強さと方向よりの位置に何があるかを知ることができる。しかし、得られる情報は、対象物の位置と大きさ程度であり、どのような形状をしているかは今の技術では充分ではない。

音波を発して、対象物により散乱される音を計測し、その結果に基づき対象物の形状を求めると言う問題は、音響学の分野では、音響散乱逆問題として、1970年代半ば頃から積極的に研究され始めた^{1),2),3)}。

登坂⁴⁾によると、この逆問題の解析法(以下単に手法という)は次のように分類される。

- (1) 逆問題定式化^{1),2),3),5)}
- (2) 最適化^{6),7)}
- (3) フィルタ理論⁴⁾

手法(1)は、逆問題を順問題(物体に音波が入射し、散乱音場を求める)と同様に陽な形で定式化し、散乱音場の情報から直接物体形状を求める。この方法は魅力ある手法で

あるが、定式化への手順の複雑さ、数値計算のわずかな誤差の混入が結果を左右する等が指摘されている。手法(2)は、初期にある物体形状を仮定し、その物体による散乱音場と目的とする散乱音場との誤差を最小となるように、物体形状を表すパラメータを用いて最適化する。実際に数値計算例が発表されているが、最適化の過程で局所解に落ち込んで真の解にたどり着かないことがあるということも報告されている。手法(3)は、雑音に乱された観測値から信号あるいは系の未知パラメータを推定するフィルタ理論(カルマンフィルタ等)を逆問題に利用する方法である。

本報告は水中物体の散乱音場の情報からその物体形状を求める音響散乱逆問題に対して、上記の手法(1),(2)を組合わせた方法を提案するものである。まず、周波数が一定の平面波が物体に入射するとき、物体の形状の微小変化と散乱音場の関係を境界要素法を用いて定式化する。次に、初期に物体形状を仮定し、その物体の散乱音場と所定の散乱音場との誤差が最小となるように、前記の定式化を利用して物体形状を繰り返し変形させる手法を導く。数値計算として2次元音響散乱逆問題の2,3の例を示す。

2. 音響散乱逆問題

Fig.1に示すように、2次元の無限に広い均質な流体Dの中に物体Cがあり、物体の中の適当な位置に原点を持つ $x-y$ 座標を考える。原点を中心に物体より充分大きい半径

* 防衛大学校

原稿受理 平成5年1月11日

春季講演会において講演 平成5年5月19,20日

Fig. 1 Coordinate system

r の円周上の仮想境界を C_r とする。流体の密度を ρ 、流体中の音速を c とする。 x 軸と α の角度より、振幅 $\overline{\phi_0}$ 、円周波数 ω の平面波が入射するものとする。

一定円周波数 ω の調和振動場の速度ポテンシャルを ϕ とすると、物理量の $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ 成分は位置の複素関数 $\phi(x, y)$ の実部、虚部を用いて次のように表される。

$$\phi(x, y; t) = \text{Re}[\phi(x, y) \exp(i\omega t)] \quad (1)$$

ここに、 $\text{Re}[\]$ は複素関数の実部を取ることを意味する。 i は虚数単位とする。以下の解析ではこの位置のみの関数 ϕ を用いて、 $\exp(i\omega t)$ は省略する。

2.1 音響散乱問題⁹⁾

まず、物体に音波が入射し散乱音場を求める散乱問題⁹⁾を境界積分方程式により定式化を示す。

(1) 場の支配方程式と境界条件

Fig. 1 の入射波の速度ポテンシャル ϕ_0 は次式となる。

$$\phi_0 = \overline{\phi_0} \exp\{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\} \quad (2)$$

流体 D 内の速度ポテンシャルの支配方程式は良く知られているように、次のヘルムホルツの方程式となる。

$$\nabla^2 \phi + k^2 \phi = 0 \quad \text{in } D \quad (3)$$

ここに、 $k = \omega/c$ (波数)。

無限遠方では発散波のみが残る放射条件が課せられ、

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = -ik\phi \quad \text{on } C_r \quad (4)$$

となる。

物体上での境界条件は、物体上では流体の出入りは無いから、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C \quad (5)$$

となる。ここに、 $\phi = \phi_d + \phi_0$: 全速度ポテンシャル。

ϕ_d : 物体による攪乱ポテンシャル n は流体より外向きを正とする法線である。

(2) 境界積分方程式

Fig. 1 の流体領域 D 内の点 $Q(x_Q, y_Q)$ の全速度ポテンシ

ヤル $\phi(Q)$ は、物体境界上の点 $P(x_P, y_P)$ のポテンシャル $\phi(P)$ とその法線微分 $\partial \phi(P)/\partial n$ を用いて次のように表すことができる⁸⁾。

$$\phi(Q) - \phi_0(Q) = \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} - \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \quad (6)$$

ここに、 $S(P, Q) = -\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR)$: 式(3), (4) を満足する核関数、 $H_0^{(2)}(\)$ は第2種0次ハンケル関数。

$$R = \{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2\}^{1/2}$$

物体上での境界条件(5)を代入するとさらに式(6)は簡単になり、

$$\phi(Q) - \phi_0(Q) = \int_C \phi(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} ds_P \quad (7)$$

式(7)は ϕ を未知量とする第1種フレドホルムの積分方程式となる。

音響散乱問題は、式(7)に与えられた入射波の式(2)を代入して C 上での ϕ に関して解くことになる。任意の点での散乱場ポテンシャルは、式(7)に解の ϕ を代入して積分を実行すれば求められる。無限遠方での Q 点(r_Q, θ_Q)での速度ポテンシャルはハンケル関数の特性より、

$$\phi(Q) \rightarrow \frac{i}{r_Q} \exp(-ikr_Q + \frac{\pi}{4}i) F(k, \theta_Q) \quad (8)$$

ここに、

$$F(k, \theta_Q) = \int_C \phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(i\tilde{\theta}) ds_P \quad (9)$$

より計算できる。

式(9)の関数 $F(k, \theta_Q)$ は θ_Q 方向へ出て行く散乱波の強さを表す関数であり、散乱波の放射指向性を意味している。流体の波動理論にならって、これをコッチン関数とよぶ。

2.2 物体の微小変形と散乱音場の変化

Fig. 2 に示すように、物体形状 C が微小に法線方向に δn 変化して C' になったときの散乱音場の変化を Bergman, Schiffer⁹⁾ にならって導く。以下肩付き"'"が付く量はすべて物体形状が C' に関する量とする。肩付が付かないときは C に関する量とする。

変形後 C' における速度ポテンシャル場 ϕ' を C 上に解析的に接続して C 上の速度ポテンシャルの変分 $\delta \phi$ を次式で定義する。

$$\delta \phi = [\phi' - \phi]_C \quad (10)$$

すなわち、積分方程式で書くと、

$$\delta \phi(Q) = \int_{C'} \left[\phi'(P') \frac{\partial S(P', Q)}{\partial n_{P'}} - \frac{\partial \phi'(P')}{\partial n_{P'}} S(P', Q) \right] ds_{P'} - \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} - \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \quad (11)$$

となる。

Fig. 3 より、境界 C および C' 上の接線方向線素 ds_P と

Fig. 2 Boundary deformation

Fig. 3 Relation between ds and ds'

ds_P の関係は

$$ds_{P'} = \left\{ (ds_P)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial s} (\delta n) ds \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (12)$$

である。 δn は接線 s 方向に沿って滑らかであり、

$$\frac{\partial}{\partial s} (\delta n) ds = O(\epsilon) \quad (13)$$

とおけるなら、高次の項を無視すると、

$$ds_{P'} \approx ds_P \quad (14)$$

とできる。

また、 ϕ' は δn が微小であるとする、次のように書ける。

$$\phi'|_{C'} \approx \left[\phi' + \frac{\partial \phi'}{\partial n} \delta n \right]_C \quad (15)$$

式(14)、(15)を用いると式(11)の変分は

$$\delta \phi(Q) = \int_C \left[\{ \phi'(P) - \phi(P) \} \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} - \frac{\partial \{ \phi'(P) - \phi(P) \}}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \quad (16)$$

となる。

また、式(15)の表現と同様に ϕ に関しても

$$\phi|_{C'} \approx \left[\phi + \frac{\partial \phi}{\partial n} \delta n \right]_C \quad (17)$$

と書ける。

δn が小さいときは式(15)、(17)の微係数どうしは等しく、

$$\frac{\partial \phi}{\partial n}|_C = \frac{\partial \phi'}{\partial n}|_C \quad (18)$$

とすることができる。

式(15)~(18)より、

$$\begin{aligned} \delta \phi(Q) &= \phi'|_{C'} - \phi|_C \approx \frac{\partial \phi}{\partial n}|_C \delta n \\ &= \int_C \left[\{ \phi'(P) - \phi(P) \} \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} - \frac{\partial \{ \phi'(P) - \phi(P) \}}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} \delta n(Q) &= \int_C \left[\Delta \phi(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} - \Delta \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \quad (19) \end{aligned}$$

ここに、 $\Delta \phi(P) = \phi'(P) - \phi(P)$

$$\Delta \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} = \frac{\partial}{\partial n_P} \{ \phi'(P) - \phi(P) \} \quad (20)$$

式(19)が物体の境界形状が微小変形 δn したときの境界上の物理量の変化 $\Delta \phi$, $\Delta \frac{\partial \phi}{\partial n}$ との関係を表す式である。

物体形状の変化によって遠方の θ_0 方向へ出て行く散乱波のポテンシャル変化は、コッチン関数の変化で表される。コッチン関数の変化 δF は、

$$\delta F = F'(k, \theta_0) - F(k, \theta_0)$$

であり、先のポテンシャルの変分にならって、式(19)より、

$$\delta F = \int_C \Delta \phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\tilde{\theta}) ds_P \quad (21)$$

となる。

式(21)を攪乱ポテンシャル ϕ_d について書き、さらに、 n_0 について微分したものを用意する。また、式(21)に ϕ_d , ϕ_0 を代入して上の式と合わせて3つの式を連立させると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_d(Q)}{\partial n_0} \delta n(Q) &= - \frac{\partial \phi_0(Q)}{\partial n_0} \delta n(Q) \\ &= \int_C \left[\Delta \phi_d(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} - \Delta \frac{\partial \phi_d(P)}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \\ \frac{\partial^2 \phi_d(Q)}{\partial n_0^2} \delta n(Q) &= - \frac{\partial^2 \phi_0(Q)}{\partial n_0^2} \delta n(Q) \\ &= \int_C \left[\Delta \phi_d(P) \frac{\partial^2 S(P, Q)}{\partial n_P \partial n_0} - \Delta \frac{\partial \phi_d(P)}{\partial n_P} \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_0} \right] ds_P \end{aligned}$$

$$F'(k, \theta_0) - F(k, \theta_0) = \int_C \Delta \phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\tilde{\theta}) ds_P$$

$$= \int_C \Delta (\phi_d(P) + \phi_0(P)) \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\tilde{\theta}) ds_P$$

$$= \int_C \left[\Delta \phi_d(P) + \frac{\partial \phi_0(P)}{\partial n_P} \delta n(P) \right] \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\tilde{\theta}) ds_P$$

これらをマトリックス表示すると、

$$\begin{bmatrix} \int_C \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} ds_P & - \int_C S(P, Q) ds_P \\ \int_C \frac{\partial^2 S(P, Q)}{\partial n_Q \partial n_P} ds_P & - \int_C \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_Q} ds_P \\ \int_C \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_0}{\partial n_P} \\ \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial n_Q \partial n_P} \\ \int_C \frac{\partial \phi_0}{\partial n_P} \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \phi_d \\ \Delta \frac{\partial \phi_d}{\partial n_P} \\ \Delta \frac{\partial \phi_d}{\partial n_P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F' \end{bmatrix} \quad (22)$$

となる。これは、形状が C から C' に δn 変化したときの物体上の散乱ポテンシャルの変化と指向性の変化の関係を示している。

式(22)が音響散乱逆問題を解く基礎式となる。

2.3 音響散乱逆問題

本論文では、音響散乱逆問題を次のように設定する。”未知の物体形状 C' に対して、ある角度 α より円周波数 ω の平面波が入射したとき、その物体の散乱波の指向性、すなわちコッチン関数 $F'(k, \theta_Q)$ が観測された。物体形状 C' を求めよ。”

この問題を次の手順で考える。

- (1) 初期にある物体形状 C を仮定し、指向性 F が計算される。
- (2) この F と、目的とする指向性 F' を式(22)に代入し、変形量 δn を求める。
- (3) よって、 $C' = C + \delta n$ より新しい形状が求められる。

この変更された形状 C' は F' という指向性を持っているはずであるが、もし誤差があれば(1)～(3)の過程を繰り返す。

以上のように、与えられた指向性 F' を持つ物体形状は逐次計算によって求められるわけであるが、Schiffer⁵⁾によれば、このような逆問題で唯一の形状が定まるのは次の場合である。

- (a) 一定方向の入射波に対して、ある波数 $k_1 \sim k_n$ にわたり、それぞれの波数の入射波について完全な指向性の情報が得られているとき。
- (b) ある一定の波数の入射波に対して、入射波の入射角が $0 < \alpha < 2\pi$ の範囲にわたり多数あり、それぞれの入射角の入射波について完全な指向性の情報が得られているとき。

したがって、一つの入射波の情報から物体形状を唯一に定めるには情報量が不足していることになる。よって、式(22)を用いて物体形状を求めるには、一定方向から異なる波数の入射波を入射し、それぞれに対して式(22)を作り同時にこれらの式を満足するように δn を定める。あるいは、一定

の波数の入射波を異なる角度から入射し、それぞれに対して式(22)を作り同時にこれらの式を満足するように δn を定める。

例えば、 k_1, k_2 の2つの波数の入射波を同一方向から入射した場合、指向性の情報は $F'(k_1, \theta_Q)$ と $F'(k_2, \theta_Q)$ の2組が与えられている。式(22)において k_1, k_2 の2つの波数の入射波に対するものを作れば、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & A_2 & B_2 & C_2 \\ D_1 & E_1 & 0 & 0 & G_1 \\ 0 & 0 & D_2 & E_2 & G_2 \\ H_1 & 0 & 0 & 0 & I_1 \\ 0 & 0 & H_2 & 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \phi_{d1} \\ \Delta \frac{\partial \phi_{d1}}{\partial n_P} \\ \Delta \phi_{d2} \\ \Delta \frac{\partial \phi_{d2}}{\partial n_P} \\ \delta n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F'(k_1, \theta_Q) - F(k_1, \theta_Q) \\ F'(k_2, \theta_Q) - F(k_2, \theta_Q) \end{bmatrix} \quad (23)$$

ここで、添字1は波数 k_1 に対するもの、添字2は波数 k_2 に対するものである。

式(23)は、左辺のベクトル中で $\Delta \phi_{d1}$ 等は複素数であるが、変形量 δn は実数である。したがって、行列式の行と列の数は一致していない。そこで式(23)の解法は最小自乗法¹⁰⁾によって解く。

一定周波数の入射波を異なる角度から入射する場合も上記と同様に書くことができる。

3. 数値計算例¹¹⁾

前章で示した与えた散乱波の指向性を持つ物体形状の計算法を検証するため、次のような問題の数値計算を行った。

(I) 縦横比 b/a の楕円形物体の散乱波の指向性を与え、これに対する初期形状を円形と仮定して計算を始めた場合。

(II) 円形物体の散乱波の指向性を与え、これに対する初期形状を楕円形と仮定して計算を始めた場合。円または楕円の大きさは、代表寸法が単位の大きさとなるように、楕円では y 軸の高さ b を単位の高さとした。式(23)は、物体形状を一定要素の境界要素で近似して離散化する。要素分割数はどの問題も全周を24分割とした。

指向性(コッチン関数)の情報は、境界要素と同じ分割数で、360度/24=15度おきの角度で与えられているものとした。

入射波の与え方は、前章で述べたように同一の入射角で異なる波数の入射波が入射する問題と、同一の入射波数の入射波が異なる角度で入射する問題の二組がある。そこで数値計算では、

Fig. 4(a) Far field sound scattering pattern by an unknown scatterer

Fig. 5(a) Far field sound scattering pattern by an unknown scatterer

Fig. 4(b) Convergence process of shape identification

Fig. 5(b) Convergence process of shape identification

Fig. 4(c) Comparison of shape of estimated scatterer with shape of exact scatterer

Fig. 5(c) Comparison of shape of estimated scatterer with shape of exact scatterer

Fig. 4(d) Comparison of far field sound scattering pattern by an estimated scatterer with by an exact scatterer

Fig. 5(c) Comparison of far field sound scattering pattern by an estimated scatterer with by an exact scatterer

Fig. 6(a) Far field sound scattering pattern by an unknown scatterer

Fig. 6(b) Convergence process of shape identification

(a) 一定の入射角 α で、2つの波数 (k_1, k_2) の入射波による指向性が与えられた問題。

(b) 一定の波数 k の入射波が、2つの角度 (α_1, α_2) より入射したときの指向性が与えられた問題。

の条件とした。

これらの (I), (II) と (a), (b) を組み合わせて数値計算を行った。

(1) 組み合わせ (I)-(a)

入射角が $\alpha=0$ の方向から、2つの波数 $k_1=0.05, k_2=0.1$ の入射波が入射し、Fig. 4(a) のような2組の散乱波の指向性が得られた。この指向性を持つ物体形状を求める問題である。

入射波の波数を $k_1=0.05, k_2=0.1$ としたのは、24分割程度の境界要素では精度のよい散乱音場を計算するためには比較的小さい波数でなければならないのでこの値とした。

初期物体形状を円から出発し計算を行った。Fig. 4(b) に計算の繰り返し過程における物体形状の変形の様子を示す。計算の収束の判定は、最大の変形量 $\delta n_{\max}$ がその境界要素の長さの5%以内になったときとした。以下の計算例でも収束の判定は同様である。Fig. 4(c) は最終状態の物体形状と正解の物体形状の比較であり、正解の物体形状は縦横比 $a/b=1.5$ の楕円である Fig. 4(d) はそれらの散乱波

Fig. 6(c) Comparison of shape of estimated scatterer with shape of exact scatterer

Fig. 6(d) Comparison of far field sound scattering pattern by an estimated scatterer with by an exact scatterer

の指向性の比較である。推定された物体形状はやや細長であるものの、指向性はほぼ一致しており結果は充分満足できるものと思われる。

(2) 組み合わせ (I)-(b)

一定の波数 $k_1=0.1$ の入射波が、入射角 $\alpha=0, \pi/2$ の2つの方向から入射し、Fig. 5(a) のような2組の散乱波の指向性が得られた。この指向性を持つ物体形状を求める問題である。

先と同様に初期物体形状を円から出発し計算を行った。Fig. 5(b) に変形の過程を、Fig. 5(c) および Fig. 5(d) にそれぞれ最終物体形状とその形状の散乱波の指向性を示す。このときの正解の物体形状は縦横比 $a/b=1.5$ の楕円である。

(3) 組み合わせ (II)-(a)

組み合わせ (I)-(a) と同じであるが、計算の出発の初期物体形状が楕円であり、目的形状が円であることが (1) と異っている。結果を Fig. 6 に示す。

組み合わせ (II)-(b) も計算を行ったが結果は省略する。

以上計算例を示したように物体形状の推定はほぼ満足な結果が得られた。しかし、次のような条件の下では必ずしも良好な結果が得られなかった。

条件 (a) のように一定方向からの入射波で、入射波の波

数を高くした(k を1.0以上)場合には, 散乱波の指向性が複雑な形となるので境界要素の分割数, 指向性の情報の角度の数が対応できなくなり, 解が発散した。これについては要素数, 指向性の角度のピッチを増せばよいかも知れないが, 計算機の記憶容量, 計算量が飛躍的に多くなり効率のよい計算アルゴリズムを開発しなければ実行が難しい。

条件(b)の角度を変えた2つの入射波のとき, $\alpha=0$ と $\pi/2$ の組み合わせとしたが, これをいろいろ変えて計算を実行したところ収束し満足な結果が得られる場合もあるが必ずしもどの場合でも良好な結果が得られたわけでもなかった。

これらの条件(a),(b)について共通して言えることは, いずれも2組の波数または入射波の角度の情報から物体形状を推定しているの, より多くの情報を与えて(多くの波数または入射波の角度), また, 効率のよい計算アルゴリズムを開発すれば上記の問題も解決できるものと考えられる。

4. 結 言

本研究では水中の物体形状を推定する方法として, 物体に音波を入射し, その散乱波の指向性の情報から形状を求める音響散乱逆問題の解析法を検討した。

まず, 2次元音響散乱問題において, 一定の周波数の平面波が物体に入射するとき, 物体形状の微小変形と散乱音場の変化の関係を求めた。それを利用して, Schifferの理論に従い, ある初期の仮定した形状から出発してその形状を逐次変形させながら与えられた散乱指向性となるような物体形状を求める方法を開発した。これに基づき, 数値計算例を示した。

謝 辞

本研究の実施にあたり, 有益なご助言をいただいた防衛大学校別所正利教授に深くお礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Prosser, R. T.: Can One See the Shape of a Surface?, The American Mathematical Monthly, 84, (1977), pp. 259-271.
- 2) Colton, D.: The Inverse Scattering Problem for a Cylinder, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 84A, (1979), pp. 135-143.
- 3) Colton, D.: Remarks on the Inverse Scattering Problem for Low Frequency Acoustic Waves, Journal of Differential Equations, 37, (1980), pp. 374-381.
- 4) 登坂宣好, 宇谷明秀: フィルター理論-境界要素法による同定解析について, 境界要素法研究会第39回例会研究発表会資料, BEM-39-1, (1992), pp. 1-35
- 5) Sleeman, B. D.: The Inverse Problem of Acoustic Scattering, IMA Journal of Applied Mathematics, 29, (1982), pp. 113-142.
- 6) Kirsch, A. and Kress, R.: An Optimization Method in Inverse Acoustic Scattering, Boundary Elements IX, Vol. 3 Fluid Flow and Potential Applications, (1987), pp. 3-18
- 7) Ohnishi, K., Ohura, T. and Kobayashi, K.: Inverse Scattering in 2D for Shape Identification by BEM, Boundary Elements VII, Vol. 2 Applications in Fluid Mechanics and Field Problems, (1991), pp. 435-446.
- 8) 岩崎洋一, 真能創, 別所正利, 河辺寛: 船体振動による水中放射音の基礎的研究 (第3報散乱問題と可逆定理), 日本造船学会論文集, 第161号, (昭62), pp. 225-235
- 9) Bergman, S. and Schiffer, M.: Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics, Academic Press, (1953), pp. 58-71
- 10) Forsythe, G. E., Malcolm, M. A. and Moler, C. B. 著 森正武訳: 計算機のための数値計算法, 科学技術出版社, (昭53), pp. 212-259
- 11) 稲崎精一郎, 田中洋志, 宮崎好司: 任意の散乱音場を持つ水中物体形状, 防衛大学校卒業論文, (平4)