初期撓みと塑性の相互作用を考慮した円筒殻の 軸圧縮座屈推定法

正員 川 本 要 次* 正員 湯 原 哲 夫*

A Prediction Method of Buckling Strength of Axially Loaded Cylinders Considering Interaction between Initial Imperfection and Plasticity

by Yoji Kawamoto, *Member* Tetsuo Yuhara, *Member*

Summary

This paper deals with buckling strength of axially loaded cylinders considering interaction between initial imperfection and plasticity.

We conducted 14 axial buckling tests of large-scale fabricated steel cylinders in the 1980s to investigate the effects of yield stress and length of cylinder on buckling strength. Then, we found the discrepancies between the test results and the predictions by the existing buckling design codes like the buckling design guideline of DnV for marine structures and the code case of ASME for nuclear containment vessels and recognized that it was important to consider the interactive effect of initial imperfection and plasticity.

We apply the reduced stiffness theory by Dr. J. G. A. Croll and show a simple prediction method of buckling strength considering interaction between initial imperfection and plasticity.

The predictions by the reduced stiffness theory give a good agreement with results of buckling tests and buckling analysis using nonlinear finite element method. Then, we verify the validity of the reduced stiffness theory in the wide range of dimensions of cylinders.

1. 緒 言

軸圧縮を受ける円筒殻の座屈に関して、数多くの解析的および実験的な研究が行われてきた。これらの研究成果から、座屈荷重における古典理論値と実験値の違いおよび実験で見られる座屈荷重のバラツキは、主に初期撓みによるものであるとの認識が一般的である。

実際の座屈設計では、数多くの実験結果の下限から定められたノックダウンファクターと呼ばれる経験的な低減係数を用いることにより行われており、座屈設計の中で、初期撓みを定量的に考慮した評価はほとんど行われていないのが現状である。

また、これらの評価式の基になった実験データのほとん

どは航空宇宙の分野で得られたものである。しかし、航空・宇宙の分野の座屈データは次のような理由から必ずしも船舶・海洋分野の構造物の座屈設計に適していないと考えられる。

(1) 製作法

航空・宇宙分野の構造物はリベット接合であるのに対して、船舶・海洋分野の構造物は溶接接合である。従って初期撓みおよび残留応力が異なる。

(2) 降伏応力および半径板厚比

航空・宇宙の円筒構造物は、材料の降伏応力が高く、かつ円筒の半径板厚比が大きくなっており、いわゆる弾性座屈を対象としている。一方、船舶・海洋分野の円筒構造物は、弾塑性座屈の領域であり、材料の降伏応力の影響が非常に重要である。

1980年代に鋼製大型円筒殻の座屈に関する幾つかのプロジェクトが米国^{1),2)}、英国³⁾、ノルウェー⁴⁾で実施され、船舶・海洋分野に適した座屈データが蓄積された。

著者らも、計14体の大型円筒模型の軸圧縮座屈実験を実

* 三菱重工業(株)長崎研究所

施し、貴重な座屈データを得ている^{5),6)}。

本論文では、著者らの実験データをもとに、現状の座屈設計基準の問題点を指摘し、これに替る座屈強度推定法を示す。さらに、著者らの実験結果および有限要素法による弾塑性座屈解析の結果と比較し、この推定手法の有効性を検証する。

2. 座屈実験結果と従来の座屈評価基準との比較

弾塑性座屈を取り扱える代表的な座屈評価基準として、アメリカ機械学会 (ASME) の鋼製原子炉格納容器に対する座屈評価基準⁷⁾ とノルウェー船級協会 (DnV) の海洋構造物に対する座屈評価基準⁸⁾ とが有る。著者らが行った座屈実験とこれら2つの座屈強度評価基準を比較し、現状の評価法の問題点を指摘する。

2.1 ABS/CONOCO-MHIの実験⁹⁾

アメリカ船級協会 (ABS) と米国の石油会社 CONOCO 社が北海に設置するテンションレグプラットフォームの開発のために円筒殻の座屈実験プロジェクトを起こしたが、著者らはこれに参画し、8体の座屈実験を実施した。

座屈実験の結果を、Table 1 に示す。実験は、半径板厚比がおよそ300の水平防撓材で補強された円筒殻について、水平防撓材の間隔すなわち円筒殻の長さや材料の降伏応力をパラメータにして実施したものである。実験結果と従来の座屈評価基準の評価値を比較して、Fig. 1 に示す。実験では、降伏応力の違いによる座屈強度の差が顕著に現れているが、従来の評価法では、降伏応力の違いは、ほとんど評価されていないことが判る。これは、従来評価法では、この領域の座屈はほとんど弾性座屈であると判定され、降伏応力の影響はないと判断されているからである。

2.2 PNC-MHIの実験⁹⁾

この実験データは、動力炉核燃料開発事業団 (PNC) が、高速増殖炉「もんじゅ」の鋼製格納器の座屈設計基準を開発するために、著者らに委託して実施した実験の一部であ

る。

座屈実験の結果は、Table 1 に併せて示す。この実験は、半径板厚比がおよそ650の円筒殻について、水平防撓材の間隔すなわち円筒殻長さが座屈強度に及ぼす影響と座屈強度のバラツキを調べるために行ったものである。同一条件にて2体づつの実験が行われた。試験体の初期撓みは実験に先立ち計測され、真円からの偏差が板厚の半分以下であることが確かめられた。実験結果と従来の座屈評価基準の評価値を比較して、Fig. 2 に示す。

この実験結果から、同一の条件で製作され、製作精度および初期撓みが管理された円筒殻について、座屈強度はほとんどバラツキがないことが判る。また、この模型と同じ程度の製作精度および初期撓みを持つ円筒殻に対しては、従来の評価基準は、過度に保守的である事が判る。

3. 座屈強度推定法

このように、従来の座屈評価基準と実験結果に不適合が

Fig. 1 Results of ABS/CONOCO-MHI tests compared with the predictions by the existing buckling design guidelines

Fig. 2 Results of PNC-MHI tests compared with the predictions by the existing buckling design guidelines

Table 1 Summary of buckling tests

	Test No.	R (mm)	t (mm)	L (mm)	R/t	L/R	L/Rt	σ_y	E	σ_{cr}	σ_{cr}/σ_y
ABS/CONOCO	MHI-1	1000	3.2	113	312.5	0.113	2.0	54.1	20600	28.4	0.525
	2	1000	3.2	113	312.5	0.113	2.0	33.2	20300	17.6	0.530
	3	1000	3.2	226	312.5	0.226	4.0	55.2	21300	24.8	0.449
	4	1000	3.2	226	312.5	0.226	4.0	55.7	21100	24.8	0.445
	5	1000	3.2	226	312.5	0.226	4.0	35.3	20800	17.5	0.496
	6	1000	3.2	340	312.5	0.340	6.0	54.7	21000	22.8	0.417
	7	1000	3.2	340	312.5	0.340	6.0	57.9	21600	24.8	0.428
	8	1000	3.2	340	312.5	0.340	6.0	33.0	20500	16.7	0.506
PNC-MHI	AS-1	1304	2.0	178.7	651.8	0.137	3.50	32.2	20600	12.7	0.394
	AS-2	1304	2.0	178.7	651.8	0.137	3.50	33.2	20600	13.1	0.395
	AM-1	1304	2.0	350.6	651.8	0.269	6.87	31.6	19600	10.7	0.339
	AM-2	1304	2.0	350.6	651.8	0.269	6.87	31.9	20300	11.5	0.361
	AL-1	1304	2.0	510.6	651.8	0.392	10.0	32.4	20300	10.2	0.315
	AL-2	1304	2.0	510.6	651.8	0.392	10.0	31.7	19600	10.1	0.319

The unit of σ_{cr} , σ_y and E is kgf/mm²

あるのは、従来の座屈評価基準では、座屈に及ぼす初期撓みおよび降伏応力の影響を、それぞれの相互作用も含めて定量的に考慮していないことに起因している。

そこで、低減剛性座屈理論を紹介し、座屈荷重に及ぼす初期撓みと降伏応力の相互作用を考慮した軸圧縮を受ける円筒殻の座屈強度推定法を示す。

3.1 低減剛性座屈理論による弾性座屈応力

Croll らは、座屈応力の下限を求めるために、低減剛性座屈理論による円筒殻の座屈応力を計算している^{9),10)}。

古典的な座屈理論では、全ポテンシャルエネルギーの2次の変分から安定性の評価を行う。軸圧縮を受ける円筒殻について、全ポテンシャルエネルギーの2次の変分は、(1)式で与えられる。一方、Croll らの低減剛性座屈理論では、(1)式の右辺第3項の積分の内、下線で示す非線形周方向膜応力に関する項を無視して安定性の評価を行う。

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [m'_x k'_x + m'_\theta k'_\theta + 2m'_{x\theta} k'_{x\theta}] r d\theta dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [n'_x \epsilon'_x + n'_\theta \epsilon'_\theta + 2n'_{x\theta} \epsilon'_{x\theta}] r d\theta dx \\ & + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} [(N_x \epsilon''_x + n''_x E_x) + \underline{n''_\theta E_\theta}] r d\theta dx \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、

V_2 : 全ポテンシャルエネルギーの2次の変分

$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$: 座屈前の膜合応力 $= -\sigma t, 0, 0$

$E_x, E_\theta, E_{x\theta}$: 座屈前の膜歪 $= -\sigma/E, \nu\sigma/E, 0$

$n_x, n_\theta, n_{x\theta}$: 膜合応力の増分

$n_x = n'_x + n''_x, n_\theta = n'_\theta + n''_\theta, n_{x\theta} = n'_{x\theta} + n''_{x\theta}$

$n'_x, n'_\theta, n'_{x\theta}$: 膜合応力増分の線形分

$n''_x, n''_\theta, n''_{x\theta}$: 膜合応力増分の非線形分

$m'_x, m'_\theta, m'_{x\theta}$: 合モーメント増分の線形分

$\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_{x\theta}$: 膜歪増分

$\epsilon_x = \epsilon'_x + \epsilon''_x, \epsilon_\theta = \epsilon'_\theta + \epsilon''_\theta, \epsilon_{x\theta} = \epsilon'_{x\theta} + \epsilon''_{x\theta}$

$\epsilon'_x, \epsilon'_\theta, \epsilon'_{x\theta}$: 膜歪増分の線形分

$$\epsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon'_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{r}, \epsilon'_{x\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2)$$

$\epsilon''_x, \epsilon''_\theta$: 歪増分の非線形分

$$\epsilon''_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \epsilon''_\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \quad (3)$$

$K_x, K_\theta, K_{x\theta}$: 曲げ歪増分

$K'_x, K'_\theta, K'_{x\theta}$: 曲げ歪増分の線形分

$$K'_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, K'_\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}, K'_{x\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}$$

また、下付きの x および θ は、それぞれ軸方向および周方向を意味する。

両端支持の条件を満たす変位増分として、(4)式を仮定すると、低減剛性座屈理論による弾性座屈応力は、(5)式で求められる。

$$u = u_{ij} \cos i\theta \cos j\pi x/L$$

$$v = v_{ij} \sin i\theta \sin j\pi x/L$$

$$w = w_{ij} \cos i\theta \sin j\pi x/L \quad (4)$$

$$\sigma_{er} = \alpha_{er} \cdot \sigma_{cl} \quad (5)$$

ここで、

σ_{er} : 低減剛性座屈理論による弾性座屈応力

α_{er} : 低減剛性座屈理論による座屈応力低下係数

$$= \frac{2(1-\nu^2)}{(2-\nu^2) + \nu(i/\lambda)^2} \quad (6)$$

σ_{cl} : 古典線形理論による弾性座屈応力

$$= E \left[\frac{(i^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} \cdot \frac{t^2}{12(1-\nu^2)R^2} + \frac{\lambda^2}{(i^2 + \lambda^2)^2} \right] \quad (7)$$

u, v, w : それぞれ軸、周および半径方向の変位

E : ヤング率

ν : ポアソン比

R : 半径

t : 板厚

L : 円筒の長さ

i : 周方向波数

j : 軸方向半波の数

$$\lambda \equiv j\pi \frac{R}{L} \quad (8)$$

低減剛性座屈理論の物理的な意味は、次のように理解される。(4)式で表される周方向に i 波、軸方向に j 半波の変形モードを有する微小な座屈変形に伴う非線形周方向膜応力は、Fig. 3 に示すように、軸方向に j 半波を有する軸対称の変形モードに伴う線形周方向膜応力と打ち消しあってしまう。従って、座屈変形に伴う非線形周方向膜応力は、円筒殻の変形を安定させるようには作用しない。実際に、初期撓みを有する円筒殻については、载荷の初期の段階から座屈モードに対応する微小な変形が認められ、軸圧縮荷重に伴う軸対称の変形モードとカップリングし、上記の理由から安定化作用は期待できない。

低減剛性座屈理論による弾性座屈応力の計算例を、古典理論による最低次の弾性座屈応力で無次元化して、Fig. 4

Fig. 3 Coupling of deformation into critical mode with axisymmetric mode to eliminate nonlinear hoop stress n''_θ . (Ref. 10)

に示す。低減剛性座屈理論では、軸方向の半波数が1の場合 ($j=1$) に最低次の座屈応力が現れる。

また、低減剛性座屈理論による最低次の弾性座屈係数と無次元化した円筒殻の長さの関係を、古典座屈理論による弾性座屈係数および ASME の座屈設計基準における初期撓みを考慮した弾性座屈係数と比較して、Fig. 5 に示す。

低減剛性座屈理論による弾性座屈係数は、円筒殻の長さが長くなるに従い、徐々に低下する。ASME の座屈設計基準における弾性座屈係数は、種々の実験結果の下限から経験的に定めているので、理論的な下限値である低減剛性座屈理論による弾性座屈係数より、保守的な値になっていることが判る。

Fig. 4 Elastic buckling stress by the reduced stiffness analysis. ($R/t=300$, $L/R=1.0$)

Fig. 5 Comparison of elastic buckling coefficients. ($R/t=300$)

3.2 弾塑性座屈応力推定式

3.1 項で求めた低減剛性座屈理論による弾性座屈応力を用いて、初期撓みと塑性の相互作用を考慮した弾塑性座屈応力の推定式を示す。

Donnell と Wan は、初期撓みと塑性の相互作用を考慮する方法として、座屈後の変形経路の中で最初に膜応力が降伏に達する点を弾塑性座屈点と考えた評価を行った¹¹⁾。Croll らも、同様の考えを低減剛性座屈理論に適用し、次式で示す弾塑性座屈応力の推定式を示している¹⁰⁾。

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = N - \left[N^2 - \frac{\sigma_{er}}{\sigma_y} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (9)$$

ここで、

$$N = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sigma_{er}}{\sigma_y} + \rho \right] \quad (10)$$

$$\rho = \frac{UE}{2\sigma_y} \quad (11)$$

$$U = \frac{2i^2\lambda^2}{(i^2 + \lambda^2)^2} \left(\frac{w_{ij}}{R} \right) \quad (12)$$

σ_{cr} : 弾塑性座屈応力

σ_y : 降伏応力

σ_{er} : 低減剛性座屈理論による弾性座屈応力

低減剛性座屈理論による弾性座屈応力と弾塑性座屈応力の関係の計算例を、Fig. 6 に示す。Fig. 6 に示すように、初期撓みの程度によって、塑性の影響は一律でなく、初期撓みと塑性の相互作用によって定まることが判る。

Fig. 6 Relations between elastic and elasto-plastic critical stress by the reduced stiffness theory

4. 低減剛性座屈理論の検証

4.1 座屈実験結果との比較

2 章に示した著者らの大型円筒殻の軸圧縮座屈実験の結果と 3 章に示した座屈推定値の比較を行う。

(1) ABS/CONOCO-MHI の実験

ABS/CONOCO-MHI の実験では、円筒殻の初期撓みは、板厚の 0.5 倍から 1.0 倍の範囲であった。実験結果と 3 章に示した低減剛性座屈理論を用い、初期撓みと塑性の相互作用を考慮した推定値の比較を、Fig. 7 に示す。実験結果と推定値は良い対応を示している。半径板厚比が 300 程の場合、Fig. 1 に示したように、従来の座屈評価基準では、

降伏応力の効果を旨く評価できなかったが、低減剛性座屈理論による推定値は降伏応力の効果を適切に評価している事が判る。

(2) PNC-MHIの実験

PNC-MHIの実験結果と3章で示した手法による推定値の比較を、Fig. 8に示す。PNC-MHIの実験では、円筒殻の初期撓みは、板厚の0.3倍から0.5倍の範囲であった。

この推定値は、実験値と非常に良い対応を示している。半径板厚比およそ650の円筒殻については、従来、弾性座屈領域であり、また、円筒殻の長さの影響がほとんどないと見なされていたが、低減剛性座屈理論と初期撓みと塑性の相互作用を考慮する事により、初期撓みの影響および円筒殻の長さの影響を共に良く評価できている。

4.2 非線形有限要素法解析結果との比較

初期撓みと塑性を考慮した有限要素法による弾塑性座屈解析を実施し、その結果と3章に示した手法による推定値

の比較を行う。

有限要素法解析には、座屈解析に定評のあるロッキード社のSTAGSC-1を用いた¹²⁾。解析は、モデルの板厚を変化させた計算を実施した。解析モデルの概要を以下に示す。

半径板厚比 $R/t=200\sim500$

長さ半径比 $L/R=0.6$

ヤング率 $E=21000 \text{ kgf/mm}^2$

ポアソン比 $\nu=0.3$

降伏応力 $\sigma_y=32.0 \text{ kgf/mm}^2$

初期撓みは、板厚と同じ振幅を有し、低減剛性座屈理論による最低次の座屈モードの初期撓みを仮定した。

有限要素法解析の結果を、Table 2にまとめて示す。また、座屈変形の例を、Fig. 9に示す。座屈荷重と半径板厚比の関係を、有限要素法解析結果と推定値を比較して、Fig. 10に示す。

この推定値は、解析結果と良い対応を示しており、簡易的な手法としては、非常に良い推定精度を有している事が判る。

今後、この手法を用いて、製作精度と関連付けられ、初期撓みを考慮した円筒殻の座屈設計法が開発される事が期待される。

5. 結 言

本論文では、大型円筒殻の軸圧縮座屈実験の結果を整理し、従来の座屈設計基準では、弾性座屈領域と見なされていた領域においても、座屈荷重に降伏応力の影響が顕著に

Fig. 7 Comparison between the predictions by the reduced stiffness theory and the results of ABS/CONOCO-MHI test

Fig. 8 Comparison between the predictions by the reduced stiffness theory and the results of PNC-MHI test

Table 2 Summary of nonlinear buckling analysis by STAGSC-1

Case No.	R/t	L/R	E kgf/mm ²	σ_y kgf/mm ²	σ_{cr} kgf/mm ²	σ_{cr}/σ_y
1	200	0.6	21000	32	21.2	0.663
2	250	0.6	21000	32	17.8	0.556
3	333	0.6	21000	32	14.0	0.437
4	500	0.6	21000	32	10.2	0.319

Fig. 9 Buckling Deformation at the maximum load ($R/t=250$, $L/R=0.6$)

Fig. 10 Comparison between the predictions by the reduced stiffness theory and the results of nonlinear buckling analysis by STAGSC-1

現れる事を示し、座屈強度の評価に初期撓みと塑性の相互作用を考慮する必要性を指摘した。

また、上記の座屈挙動を説明できる力学モデルとして、Croll らの提案している低減剛性座屈理論と Donnell らの塑性修正法を組み合わせた、初期撓みと塑性の相互作用を考慮した座屈推定法を紹介した。

さらに、この手法による推定値と実験結果および弾塑性有限要素法による座屈解析結果と比較し、この手法の有効性を検証した。

参 考 文 献

- 1) Chen, Y. Zimmer, R. A., de Oliverira, J. G. and Jan, H. Y., Buckling and ultimate strength of stiffened cylinders: model experiments and strength formulations., OTC4853, Offshore Technology Conference (1985)
- 2) Miller, C. D., Buckling of axially compressed

cylinders., J. Struct. Div., ASCE., 103, ST3 (1977), 695-721

- 3) Dowling, P. J., and Harding, J. E., Experimental behavior of ring and stringer stiffened shells., In: Buckling of Shells in Offshore Structures, Ed. by J. E. Harding, P. J. Dowling and N. Agelidis, Granada Publishing, London (1982), 73-107
- 4) Odland, J., An experimental investigation of the buckling strength of ringstiffened cylindrical shells under axial compression., Norw. Marit. Res., Vol. 4 (1981), 22-39
- 5) Mitsubishi Heavy Industries, Ltd., Buckling test data of 8 fabricated ring stiffened cylinders under axial compression., MHI Report (1982) prepared for ABS/CONOCO Shell Buckling Test Program.
- 6) 高橋忠男, 清水誠一, 湯原哲夫, 林和利, もんじゅ原子炉格納容器の大型座屈実験, 三菱重工技報, Vol. 23, No. 6 (1986), 1-7
- 7) ASME, Boiler and Pressure Vessel Code Case N-284, Metal containment shell buckling design method, Section III, Division 1, Class MC, A. S. M. E., New York (1980)
- 8) Det norske Veritas, Buckling strength analysis of mobile offshore units., Clasification Notes, No. 30.1 (1984)
- 9) Croll, J. G. A. and Batista, R. C., Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders., Int. J. Mech. Sci., Vol. 23, No.6 (1981), 331-343
- 10) Croll, J. G. A. Lower bound elasto-plastic buckling of cylinders., Proc. Instn Civ. Engrs, Part 2, Vol. 71 (1981), 235-261
- 11) Donnell, L. H. and Wan, C. C., Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression., J. Appl. Mech., ASME, Vol. 72 (1950), 73-83
- 12) Almroth B. O., Brogan, F. A. and Stanley G. M., Structural analysis of general shells: Vol. II, User instructin of STAGSC-1, LMSC-D633873, Lockheed Palo Alto Research Laboratory (1981)