水中物体の形状推定の基礎研究(続)

正員 河 辺 寛* 正員 森 口 恍 次*

Inverse Acoustic Scattering for Shape Identification (continued)

by Hiroshi Kawabe, *Member* Kouji Moriguchi, *Member*

Summary

In the previous report, we studied on the inverse acoustic scattering problem for shape identification. The inverse problem under consideration is to determine the shape of an obstacle in the fluid from a knowledge of the time-harmonic incident wave and the far field pattern of the scattered wave. We introduced a numerical method for inverse scattering problem for shape identification and showed some numerical examples.

In this report, we introduce new integral equations which is based on the relation between the small modification of the boundary shape and sound scattering field and can compute efficiently than the previous report method. Using the integral equations and Schiffer's theorem, a numerical method for inverse acoustic scattering problem is presented. Numerical examples are given showing the practicality of the method.

1. 緒 言

水中にどのような物体があるかを探索するのにソナーが用いられる。すなわち、音波を物体に向けて発し、それによる散乱音の情報からその物体がどの位置にどのような特性を持ったものであるかを推定する。このようにある観測された情報あるいは現象からそれを成立させている要因を決定させようとする問題は逆問題と呼ばれ、ソナーに限らず医学のCT スキャン、超音波による非破壊検査、地質調査などさまざまな分野で研究されている^{1,2)}。水中の散乱音による物体形状推定の逆散乱問題は比較的新しく、1970年代頃から発達し始め、Colton³⁾、Sleeman⁴⁾らによって精力的な研究が行われている。音響逆問題に限らず、一般の逆問題においても問題は本質的に非線形であり、与えられたデータに対して解が一意に決まらないことが多く、一意に決まる場合でもデータの微小な摂動に対して解が不安定な

ふるまいをすることが多い。Hadamard はこのよう現象を不適切問題と名付けている²⁾。したがって、逆問題を解くことは、非常に困難であり、そのため解析法に様々な方法が提案されている。最近では、非線形最適化手法を問題に応用した解析法が多く報告されている。例えば、Kirsch と Kress⁵⁾、Ohnishi 等⁶⁾は、物体形状を求めるのに初期にある物体形状を仮定し、その物体の散乱音場と与えられた散乱音場との誤差を最小となるように物体形状パラメータを最適化することにより物体形状を推定する方法を提案している。解析の成功例は多数示されているが、最適化のための正則化パラメータの設定や解の安定性にまだ問題があることも指摘されており、この方法は有力ではあるが必ずしも充分な解析手法であるとはいえない。

筆者らは、先の報告において、2次元の剛体に周期的な音波を入射し、物体による散乱波の指向性の情報からその物体形状の推定法を検討した⁷⁾。そこでは、物体の形状をわずかに変形させたとき散乱音場がどのように変化するかを調べ、これを用いて初期に物体形状を仮定し逐次形状を変形させ、既知の指向性と同じ指向性となるような物体形状を求める方法を開発した。本報告では、前報の推定法をさらに効率良く計算できる方法を示し、物体境界条件も異なっ

* 防衛大学校

た場合の定式化を導いた。非線形最適化手法を用いる場合には、形状を決定するパラメータによる感度解析が必要であり、それには多数の非常に複雑な数値計算が必要となる。また、それを簡単にしようとして形状パラメータを少なくすれば、限られた形状しか推定できなくなる。筆者らがここで再び提案する方法は形状の変化に対する音場の感度解析という分類には入るが、音場の計算を境界要素法に基づいて行い、そこから形状の変化と音場変化の関係を導いているため、感度解析に相当する部分は通常の境界要素法の定式化とほとんど変わらない。さらに、推定できる形状は、境界形状を表現する要素数に依存するため、境界要素を多く取れば柔軟に対応することが可能となる。

2. 音響散乱問題

Fig. 1 に示すように、2次元の無限に広い均質な流体 D の中に物体 C があり、物体の中の適当な位置に原点を持つ $x-y$ 座標を考える。原点を中心に物体より充分大きい半径 r の円周上の仮想境界を C_r とする。流体の密度を ρ 、流体中の音速を c とする。 x 軸と α の角度より、振幅 $\overline{\phi}_0$ 、円周波数 ω の平面波が入射するものとする。

一定の円周波数 ω の調和振動場の速度ポテンシャルを ϕ とすると、物理量の $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ 成分は位置の複素関数 $\phi(x, y)$ の実部、虚部を用いて次のように表される。

$$\phi(x, y; t) = \text{Re}[\phi(x, y) \exp(i\omega t)] \quad (1)$$

ここに、 $\text{Re}[\]$ は複素関数の実部をとることを意味する。 i は虚数単位とする。以下の解析ではこの位置のみの関数 ϕ を用いて、 $\exp(i\omega t)$ は省略する。

2.1 基礎方程式

まず、物体に音波が入射し散乱音場を求める散乱問題の定式化を示す。

(1) 場の支配方程式と境界条件⁹⁾

Fig. 1 の入射波の速度ポテンシャル ϕ_0 は次式となる。

$$\phi_0 = \overline{\phi}_0 \exp\{ik(x \cos \alpha + y \sin \alpha)\} \quad (2)$$

ここに、 $k = \omega/c$ (波数)。

定常振動をしている流体 D の速度ポテンシャルの支配方程式は良く知られているように、ヘルムホルツの方程式となる。物体による攪乱ポテンシャルを ϕ_d とすると次式となる。

$$\nabla^2 \phi_d + k^2 \phi_d = 0 \quad \text{in } D \quad (3)$$

無限遠方の半径 r の境界 C_r 上では発散波のみが残る放射条件が課せられ、

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial r} = -ik\phi_d \quad \text{on } C_r \quad (4)$$

となる。

物体 C 上での境界条件は、速度ポテンシャルに関して次の2種類が考えられる。

Sound hard の物体：

Fig. 1 Coordinate system

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } C \quad (5)$$

Sound soft の物体：

$$\phi = 0 \quad \text{on } C \quad (6)$$

ここに、 $\phi = \phi_d + \phi_0$ ：全速度ポテンシャル。 n は Fig. 1 に示すように流体より外向きを正とする法線である。

Sound hard の境界条件は、物体表面上 C での法線方向の流速がゼロであるので、物体が完全に剛体であることを意味している。

Sound soft の境界条件は、物体上 C で全ポテンシャルがゼロということはその上で圧力がゼロということに等しいので、非常に柔らかい物体を意味している。

前報では、Sound hard の境界条件の物体について音響逆問題の解析法を示した。

(2) 境界積分方程式

流体領域 D の点 $Q(x_q, y_q)$ の全速度ポテンシャル $\phi(Q)$ は、物体境界上の点 $P(x_p, y_p)$ のポテンシャル ϕ とその法線微分 $\partial \phi / \partial n$ を用いて次のように表すことができる⁹⁾。

$$\phi(Q) - \phi_0(Q) = \int_C \left[\phi(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_p} - \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_p} S(P, Q) \right] ds_p \quad (7)$$

ここに、

$S(P, Q) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR)$ ：式(3)、(4)を満足する核関数、 $H_0^{(2)}(kR)$ は第2種0次ハンケル関数。

$$R = [(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2]^{\frac{1}{2}}$$

n_p, s_p のように記号の添え字 P は物体 C に沿った P 点を表し、それぞれの点における、法線、接線を意味するものとする。

Q 点が物体上にあるときを考えてみると、物体上の全速度ポテンシャルは、 C 上での境界条件(6)を代入すると式(7)は簡単になり次式となる。

Sound hard の物体：

$$\Phi(Q) - \phi_0(Q) = \int_C \Phi(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} ds_P \quad (8)$$

Sound soft の物体：

$$\phi_0(Q) = \int_C \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_P} S(P, Q) ds_P \quad (9)$$

式(8)または(9)に入射波のポテンシャル(2)を代入して C 上での Φ または、 $\partial \Phi / \partial n$ に関して解く。流体中での任意の点 Q での散乱場ポテンシャルは、式(7)に解の Φ または、 $\partial \Phi / \partial n$ と境界条件(5)または(6)を代入して積分を実行すれば求められる。

無限遠方の Q 点 (r_0, θ_0) での速度ポテンシャルは、ハンケル関数の特性より、

$$H_0^{(2)}(kr) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi k r_0}} \exp\left(-ikr_0 + \frac{\pi}{4}i\right) \exp(\bar{\theta})$$

ここに、 $\bar{\theta} = ik(x_P \cos \theta_0 + y_P \sin \theta_0)$ と近似できるので、これを式(7)に代入し、境界条件(5)または(6)を考慮すると次式となる。

$$\Phi(Q) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{i}{2\sqrt{2\pi k r_0}} \exp\left(-ikr_0 + \frac{\pi}{4}i\right) F(k, \theta_0) + \phi_0(Q) \quad (10)$$

ここに、

Sound hard の物体：

$$F(k, \theta_0) = \int_C \Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \quad (11)$$

Sound soft の物体：

$$F(k, \theta_0) = - \int_C \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \quad (12)$$

式(10)の右辺第1項の前半は距離 r_0 のみの関数であり、後半の $F(k, \theta_0)$ は角度 θ_0 の関数となっており変数分離されている。半径 r_0 の円周上では式(10)の右辺前半部は一定値となる。したがって、関数 $F(k, \theta_0)$ は θ_0 方向へ出ていく波数 k の散乱波の強さを表す関数とみなせ、散乱波の放射指向性を意味している。流体の波動理論にならって、これをコッチン関数と呼ぶ⁹⁾。

θ_0 方向に放射される散乱波の放射指向性は次式となる。

$$D(\theta_0) = \frac{|F(k, \theta_0)|}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(k, \theta_0)| d\theta} \quad (13)$$

2.2 物体の微小変形と散乱音場の変化

Fig. 2 に示すように、物体形状 C が微小に δn 変化して C' になったときの散乱音場の変化を表わす積分方程式を前報では Bergman と Schiffer¹⁰⁾ にならって導いた。これと同じように物体形状の微小変形と場を表現する積分方程式の表示を検討した例は、粘性抵抗の最小物体形状¹¹⁾、応力集中最小の開孔形状¹²⁾、動弾性問題における内部欠陥の同定¹³⁾、ラプラス問題の最適化¹⁴⁾ などが報告されている。本

Fig. 2 Boundary deformation

報告の物体の微小変形と音場の積分方程式の導出過程も、基本的にはこれらの参考文献の方法とほぼ同じ考えといえる。ただし、これらは物体近傍の場の変化を検討したもので、本論で目的とするソナーで捕えられる遠場に至る表現まで含めたものはない。以下に物体境界条件が前節の2種類の場合について物体形状の変化と音場の積分方程式の関係を示す。

変形後の物体形状 C' による速度ポテンシャル場 ϕ' を C 上に解析的に接続して C 上の速度ポテンシャルの変分 $\delta \phi$ の積分方程式表現は前報によると次式となる。以下肩付きに “ $'$ ” が付く量はすべて物体形状 C' に関する量とする。肩付きが付かないときは C に関する量とする。

$$\begin{aligned} \delta \phi(Q) &= \phi'|_C - \phi|_C \approx \frac{\partial \phi}{\partial n} |_C \delta n \\ &= \int_C \left[\{ \phi'(P) - \phi(P) \} \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial \{ \phi'(P) - \phi(P) \}}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \end{aligned} \quad (14)$$

よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(Q)}{\partial n} \delta n(Q) &= \int_C \left[\Delta \phi(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} \right. \\ &\quad \left. - \Delta \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \Delta \phi(P) &= \phi'(P) - \phi(P) \\ \Delta \frac{\partial \phi(P)}{\partial n_P} &= \frac{\partial}{\partial n_P} \{ \phi'(P) - \phi(P) \} \end{aligned} \quad (16)$$

式(15)が物体の境界条件が微小変形 δn したときの境界上の物理量の変化 $\Delta \phi$, $\Delta \frac{\partial \phi}{\partial n}$ との関係を表す一般的な式である。これを攪乱ポテンシャルについて表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_d(Q)}{\partial n} \delta n(Q) &= \int_C \left[\Delta \phi_d(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} \right. \\ &\quad \left. - \Delta \frac{\partial \phi_d(P)}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \end{aligned} \quad (17)$$

物体上の境界条件によってこの式はそれぞれ次式となる。

Sound hard の物体：

$$\Delta \frac{\partial \phi_d}{\partial n} = \frac{\partial \phi'_d}{\partial n} - \frac{\partial \phi_d}{\partial n} = -\frac{\partial \phi'_0}{\partial n} + \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial n^2} \delta n \quad (18)$$

および、

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad (19)$$

Sound soft の物体：

$$\Delta \phi_d = \phi'_d - \phi_d = -\phi'_0 + \phi_0 = -\frac{\partial \phi_0}{\partial n} \delta n \quad (20)$$

および、

$$\frac{\partial \phi_d}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial n} - \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \quad (21)$$

これらの関係を代入すると、物体がわずかに微小変形したときのポテンシャルの変分の式(17)はそれぞれ次式となる。

Sound hard の物体：

$$\begin{aligned} & \int_c \left[\Delta \phi_d(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 \phi_0(P)}{\partial n_P^2} \delta n(P) S(P, Q) \right] ds_P \\ & \quad + \frac{\partial \phi_0(Q)}{\partial n_Q} \delta n(Q) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Sound soft の物体：

$$\begin{aligned} & \int_c \left[-\frac{\partial \phi_0(P)}{\partial n_P} \delta n(P) \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} \right. \\ & \quad \left. - \Delta \frac{\partial \phi_d(P)}{\partial n_P} S(P, Q) \right] ds_P \\ & \quad + \left(\frac{\partial \phi_0(Q)}{\partial n_Q} - \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n_Q} \right) \delta n(Q) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる。物体形状の変化によって遠方の θ_0 方向へ出て行く散乱波のポテンシャルの変化は、コッチン関数の変化で表される。コッチン関数の変化 δF は、

$$\delta F = F'(k, \theta_0) - F(k, \theta_0) \quad (24)$$

であり、先のポテンシャルの変分にならって、

Sound hard の物体：

$$\delta F = \int_c \Delta \Phi(P) \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \quad (25)$$

Sound soft の物体：

$$\delta F = - \int_c \Delta \frac{\partial \Phi(P)}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \quad (26)$$

となる。

先と同様に物体表面上の境界条件を考慮すると、

Sound hard の物体：

$$\Delta \Phi = \Delta \phi_0 + \Delta \phi_d = \frac{\partial \phi_0}{\partial n} \delta n + \Delta \phi_d \quad (27)$$

Sound soft の物体：

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi'}{\partial n} - \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \Delta \frac{\partial \phi_d}{\partial n} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial n^2} \delta n \quad (28)$$

となるので、これを代入すると、結局、物体形状がわづか

に変形したときの遠方の散乱音場ポテンシャルは、

Sound hard の物体：

$$\begin{aligned} \delta F &= F'(k, \theta_0) - F(k, \theta_0) \\ &= \int_c \left[\frac{\partial \phi_0(P)}{\partial n_P} \delta n(P) + \Delta \phi_d(P) \right] \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \end{aligned} \quad (29)$$

Sound soft の物体：

$$\begin{aligned} \delta F &= F'(k, \theta_0) - F(k, \theta_0) \\ &= - \int_c \left[\Delta \frac{\partial \phi_d(P)}{\partial n_P} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\partial^2 \phi_0(P)}{\partial n_P^2} \delta n(P) \right] \exp(\bar{\theta}) ds_P \end{aligned} \quad (30)$$

となる。

式(22)と(29)および(23)と(30)を合わせてマトリックス表示すると、

Sound hard の物体：

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \phi_d \\ \delta n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F'(k, \theta_0) - F(k, \theta_0) \end{Bmatrix} \quad (31)$$

ここに、

$$\begin{aligned} A &= \int_c \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} ds_P \\ B &= \int_c \frac{\partial^2 \phi_0(P)}{\partial n_P^2} S(P, Q) ds_P + \frac{\partial \phi_0(Q)}{\partial n_Q} \\ C &= \int_c \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \\ D &= \int_c \frac{\partial \phi_0(P)}{\partial n_P} \frac{\partial}{\partial n_P} \exp(\bar{\theta}) ds_P \end{aligned}$$

Sound soft の物体：

$$\begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \frac{\partial \phi_d}{\partial n} \\ \delta n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F'(k, \theta_0) - F(k, \theta_0) \end{Bmatrix} \quad (32)$$

ここに、

$$\begin{aligned} E &= - \int_c S(P, Q) ds_P \\ F &= - \int_c \frac{\partial \phi_0(P)}{\partial n_P} \frac{\partial S(P, Q)}{\partial n_P} ds_P \\ & \quad + \frac{\partial \phi_0(Q)}{\partial n_Q} - \frac{\partial \Phi(Q)}{\partial n_Q} \\ G &= - \int_c \exp(\bar{\theta}) ds_P \\ H &= - \int_c \frac{\partial^2 \phi_0(P)}{\partial n_P^2} \exp(\bar{\theta}) ds_P \end{aligned}$$

となる。式(31)、(32)が Sound hard および Sound soft の物体の音響散乱問題を解く基礎式となる。

前報では Sound hard の物体の形状推定に式(17)を法線方向に微分したものを合わせて、未知量を $\Delta \phi$, $\Delta \frac{\partial \phi}{\partial n}$, δn と

して(31)に相当する式を逆問題の基礎式とした。これによ

ると式(17)を一度微分しているため積分方程式の核関数の特異性が厳しくなり、マトリックスの要素を計算する際の積分に十分注意が必要である。このことは Sound soft の物体についてさらに核関数の特異性が厳しいものとなる。な

ぜならば、式(23)の核関数をさらにもう一度微分したものを扱うことになるのでその特異性は Sound hard の場合と比べオーダーがもう 1 次高いものとなる。また未知量の数が一つ多いので式(31)に相当する式を離散化して解くことになるので計算機の記憶容量、計算時間などで問題となる。本報告では、Sound hard の物体では式(18)、Sound soft の物体では(20)の関係を仮定することによりそれぞれ未知量を減らしている。これにより計算の量、高次の特異性の処理が前報に比べ少し楽になる。

2.3 音響散乱逆問題

本報告でも前報と同様に音響散乱逆問題を次のように設定する。“未知の物体形状 C' に対して、ある角度 α より円周波数 ω の平面波が入射したとき、その物体の散乱波の指向性、すなわちコッチン関数 $F'(k, \theta_0)$ が観測された。物体形状 C' を求めよ。”

この問題を前節で導いた物体形状の変形と音場の関係式を用いて次の手順で考える。

- (1) 初期にある物体形状 C を仮定し、指向性 F が計算される。
- (2) この F と、目的とする指向性 F' を式(31)または(32)に代入し、変形量 δn を求める。
- (3) よって、 $C' = C + \delta n$ より新しい形状が求められる。

この形状 C' は F' という指向性を持っているはずであるが、もし目的とする指向性と誤差があれば(1)～(3)の過程を繰り返す。

以上のように、与えられた指向性 F' をもつ物体形状は逐次計算によって求められるわけであるが、Schiffer によれば⁹⁾、このような逆問題で唯一の形状が定まるのは次の場合である。

- (a) 一定方向の入射波に対して、ある波数 $k_1 \sim k_n$ にわたり、それぞれの波数の入射波について完全な指向性の情報が得られているとき。
- (b) ある一定の波数の入射波に対して、入射波の入射角が $0 < \alpha < 2\pi$ の範囲にわたり多数あり、それぞれの入射角の入射波について完全な指向性の情報が得られているとき。

したがって、式(31)または(32)を用いて物体形状を求めるには、一定方向から異なる波数の入射波を複数個入射し、それぞれに対して式(31)または(32)をつくり同時にこれらの式を満足するように δn を定める。あるいは、一定の波数の入射波を異なる角度から複数個入射し、それぞれに対して式(31)または(32)をつくり同時にこれらの式を満足するように δn を定める。例えば、 k_1, k_2 の 2 つの波数の入射波を同一方向から入射した場合、指向性の情報は $F'(k_1, \theta_0)$ と $F'(k_2, \theta_0)$ の 2 組が与えられている。式(31)または(32)において k_1, k_2 の 2 つの波数の入射波に対するものをつくれば、次のようになる。

Sound hard の物体：

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 \\ 0 & C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\phi_{d1} \\ \Delta\phi_{d2} \\ \delta n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F'(k_1, \theta_0) - F(k_1, \theta_0) \\ F'(k_2, \theta_0) - F(k_2, \theta_0) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Sound soft の物体：

$$\begin{bmatrix} E_1 & 0 & F_1 \\ 0 & E_2 & F_2 \\ G_1 & 0 & H_1 \\ 0 & G_2 & H_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\frac{\partial\phi_{d1}}{\partial n} \\ \Delta\frac{\partial\phi_{d2}}{\partial n} \\ \delta n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F'(k_1, \theta_0) - F(k_1, \theta_0) \\ F'(k_2, \theta_0) - F(k_2, \theta_0) \end{bmatrix} \quad (34)$$

ここで、添字 1 は波数 k_1 に対するもの、添字 2 は波数 k_2 に対するものである。式(33)または(34)は、左辺のベクトルで $\Delta\phi_{d1}, \Delta\frac{\partial\phi_{d1}}{\partial n}$ 等は複素数であるが、変形量 δn は実数である。したがって、行列式の行と列の数は一致していない。そこで式(33)または(34)の解法は最小自乗法¹⁵⁾によって解く。一定周波数の入射波を異なる角度から入射する場合も上記と同様に書くことができる。

非線形最適化手法による逆散乱問題の解析では、形状を決定するパラメータによる感度解析が必要であり、それには多数の非常に複雑な数値計算が必要となる。また、それを簡単にしようとして形状パラメータを少なくすれば、限られた形状しか推定できなくなる。ここで提案する方法は、式(31)、(32)をみれば形状の変化に対する音場の変化という意味で感度解析という分類には入る。本報告では音場の計算を境界要素法に基づいて行い、それを基に形状がわずかに変化した時の音場の変化の関係を式(14)のようにポテンシャルの変分として導いている。この変分が感度解析の基礎式に相当する部分であり、境界積分方程式で表現されている。これに基づいて導いた形状変化と音場の変化の関係式の最終的な形も積分方程式として表現されており、通常の境界要素法の定式化とほとんど変わらない。また、物体形状を決定するパラメータは境界要素そのものであるもので、この方法よると感度パラメータは境界要素の数だけあることになる。さらに、推定できる形状は、境界形状を表現する要素数に依存するため、境界要素を多く取れば柔軟に対応することができる。

3. 数 値 解 法¹⁶⁾

前章で導いた逆問題の解析手法を数値計算により検証を行う。まず、離散化の方法と繰り返し計算の収束の判定について述べ、前報の方法と本報による方法との差異について Sound hard の物体の計算例を示す。つぎに、Sound soft の物体の計算例を示す。これらの計算例はいずれも Schiffer の条件の最小の場合、すなわち、2 つの波数の場合または 2 つの角度の入射角の場合であるが、最後に 3 つの波数または 3 つの角度の入射角の情報がある場合の計算例を示す。

3.1 離散化

音響順問題、境界の微小変形問題ともにそれぞれの積分方程式は、物体形状を直線要素の境界要素で多角形近似し、各要素上での各種物理量は一定値として離散化する。要素分割数は全周を24分割とした。要素上での核関数の数値積分はハンケル関数の対数特異性を取り出して特異性の部分を解析的に積分する方法⁹⁾を用いた。すなわち、

$$S(P, Q) = \left[\frac{i}{4} H_0^{(2)}(kR) - \frac{1}{2\pi} \log(R) \right] + \frac{1}{2\pi} \log(R)$$

として、上式右辺[]内は特異性が取り除かれているので台形積分による単純な数値積分をし、右辺第2項は解析的に積分を行う。この核関数を n で微分したのも同様の手順で積分を行う。ただし、この方法による数値積分においても、波数が高くなると右辺[]内の項が境界要素の上で振動するので積分誤差が大きくなることがある。

指向性(コッチン関数)の情報は、境界要素と同じ分割数で、360度/24=15度おきの角度で与えられているものとした。

物体に入射する平面波の波数 k は、上記の指向性の分解能、核関数の積分精度を考えると0.2以下とした。繰り返し計算の収束の判定は、前報では最大の変形量 $\delta n_{\max}$ がその境界要素の長さの5%以下となったときとしたが、本報告では与えられた指向性 $D(\theta)_{\text{exact}}$ と推定形状による指向性 $D(\theta)_{\text{cal}}$ の差がある数値 ε 以下となったときとした。

$$E_{\text{error}} = \frac{\sum_{n=1}^N |D(\theta)_{\text{exact}} - D(\theta)_{\text{cal}}|}{N} < \varepsilon$$

ここに、 N は要素数。このようにして計算の収束を判定したのは、前報の方法で形状を逐次変形していくため要素長が計算のつど変わって行くので、目的とする指向性を持つ物体を推定するということを考えると指向性の結果により収束を判断するほうが適当であると考えたからである。入射波の波数が小さい場合では、物体により各方向に散乱される音波の相対的な強さを表わす指向性の形状は物体の形にほとんど影響されず、Sound hardの物体ではダイポール、Sound softではモノポールとなる。そのような場合では、指向性の比較である上記の $D(\theta)_{\text{exact}}$ と $D(\theta)_{\text{cal}}$ の差は非常に小さくなる。このようなことより収束の判定パラメータ ε の値を0.1%とした。

3.2 数値計算例

3.2.1 前報の方法との比較

前報では与えられた縦横比の楕円形をしたSound hardの物体の散乱波の指向性の情報から、初期形状を円形と仮定してこれから出発して繰り返し計算により形状を推定した。入射波の与え方は、次のいずれかの情報が与えられているときの物体形状の推定を行った。

(a) 一定の入射角 $\alpha=0^\circ$ で、2つの波数($k_1=0.1$, $k_2=$

0.05)の入射波による指向性が与えられた問題。

(b) 一定の波数 $k=0.1$ の入射波が、2つの角度($\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pi/2$)より入射したときの指向性が与えられた問題。

この問題にたいして再度本報告で示す方法で数値計算を行った。結果をFig. 3, 4に示す。計算時間の比較をTable 1に示す。なお、数値計算はNeXT Station Turboによるものである。また、物体形状は x 軸、 y 軸に対して対称な形状であると仮定して計算を行った。Fig. 3は(a)の場合で、 $a:b=1:1.5$ (a は楕円の横軸、 b は縦軸の長さ)の縦長の楕円に対して x 軸方向から2種類の入射波が入射したときの問題である。Fig. 3(a)は円形から出発して形状を変更してゆく過程を示し、Fig. 3(b)は最終形状と正解の形状との比較を示す。また、Fig. 4は(b)の場合で、 $a:b=1.5:1$ の横長の楕円に対して x, y 軸方向から同じ波数の入射波が入射したときの問題である。Fig. 4(a)は円形から出発して形状を変更してゆく過程を示し、Fig. 4(b)は最終形状と正解の形状との比較を示す。前報による形状推定方法も本報による方法もほぼ正解の形状になっており、ほとんど同じ結果を与える。これを計算時間で比較するとTable 1のように前報による方法では今回の方法の約3.8倍の計算時間となっている。さらに複雑な物体形状を推定するには、境界要素の分割数を増し多くの入射波の情報が必要となる。そのような場合に対しては本報の方法が効率良く形状推定ができる。

3.2.2 Sound softの物体の計算例

(1) 同一方向から2種類の平面波が入射した場合

入射角が $\alpha=0^\circ$ の方向から、二つの波数 $k_1=0.1$, $k_2=0.05$ の入射波が入射し、Fig. 5(a)の実線の散乱波の指向性が得られた。この指向性を持つ物体形状を求める問題である。

初期物体形状を円から出発して計算を行った。Fig. 5(b)に計算の繰り返し過程における物体形状の変形の様子を示す。

Fig. 5(c)は最終状態の物体形状と正解の物体形状の比較であり、Fig. 5(d)の点は、それらの散乱波指向性との比較である。正解の形状は縦横比1:1.5の楕円である。最終形状およびその指向性は正解と良く一致している。縦横比を1.5:1とした場合でも同様の結果が得られている。

入射波の波数の組み合わせとしては、2つの波数を $k_1=0.09$, $k_2=0.1$ と近づけた時、 $k_1=0.05$, $k_2=0.2$ と離れた時を実行したがどちらも上記と同様に形状の推定は正しいものが得られた。さらに、 $k_1=0.05$, $k_2=0.3$ としたときは計算が発散した。これは、先にも述べたように $k_2=0.3$ の場合で境界要素分割数が少ないことが原因と思われる。

(2) 異なる方向から平面波が入射した場合

一定の波数 $k=0.1$ の入射波が、入射角 $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pi/2$ の2つの方向から入射し、Fig. 6(a)の実線の散乱波の指向

(a) Convergence process of shape identification (sound hard scatterer)

(b) Comparison of shape of estimated scatterer with shape of exact scatterer (sound hard scatterer)

Fig. 3

性が得られた。この指向性を持つ物体形状を求める問題である。

先と同様に初期物体形状を円から出発して計算を行った。Fig. 6(b)に変形の過程を、Fig. 6(c)および Fig. 6(d)にそれぞれ最終物体形状とその形状の散乱波の指向性を示す。(a)の場合と同様に、最終結果は正解と良く一致している。

入射角の組み合わせを $\alpha_1 = \pi/4$, $\alpha_2 = \pi/2$ に対し計算を行ったところ、正しい形状を推定することができた。

3.3 波数、入射角を増した場合

これまでの計算例は Schiffer の条件の最小の場合 (2 波数または 2 入射角) である。楕円のように単純な形状であれば少ない情報量であっても推定が可能であったが、複雑な形状になればやはり多くの情報が必要となる。そこで、つぎのような Sound soft の物体に同一方向から 3 種類の波数の入射波による散乱波の指向性の情報が与えられた場合と 3 方向から同じ波数の入射波の散乱指向性が与えられた場合について形状推定を行った。

$x(t) = \cos t + 0.3 \cos 2t$, $y(t) = \sin t$ $0 \leq t \leq 2\pi$
 結果を Fig. 7, 8 に示す。Fig. 7 は $\alpha = 0$ から $k_1 = 0.1$, $k_2 =$

(a) Convergence process of shape identification
(sound hard scatterer)

(b) Comparison of shape of estimated scatterer with
shape of exact scatterer (sound hard scatterer)

Fig. 4

Table 1 Comparison of CPU time
(calculated by Next Station, unit sec)

	Previous report	Present method	Ratio
Case (a) Fig. 3	1697	461	3.7
Case (b) Fig. 4	1366	356	3.9

0.05, $k_3=0.01$ の3種類の入射の場合, Fig. 8 は $k=0.05$ の波数の入射波が $\alpha_1=0$, $\alpha_2=\pi/2$, $\alpha_3=\pi$ の3方向からの場合である。このような形状の場合では2種類の波数または入射角の情報では形状推定はできなかったが, 3種類の情報が与えられると形状推定ができる。

(a) Far field sound scattering pattern by an unknown sound soft scatterer

(b) Convergence process of shape identification (sound soft scatterer)

(c) Comparison of shape of estimated scatterer with shape of exact scatterer (sound soft scatterer)

(d) Comparison of far field sound scattering pattern by an estimated scatterer with by an exact scatterer (sound soft scatterer)

Fig. 5

(a) Far field sound scattering pattern by an unknown sound soft scatterer

(b) Convergence process of shape identification (sound soft scatterer)

(c) Comparison of shape of estimated scatterer with shape of exact scatterer (sound soft scatterer)

(d) Comparison of far field sound scattering pattern by an estimated scatterer with by an exact scatterer (sound soft scatterer)

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

4. 結 言

本研究では前報に引き続き水中の物体形状を推定する方法として、物体に音波を入射し、散乱波の指向性の情報から形状を求める音響散乱逆問題の解析法を検討した。

2次元音響散乱問題において、物体の境界条件が Sound hard および Sound soft のときの物体形状の微小変形と、散乱音場の変化の関係を求めた。それを利用して、Schiffer の理論に従い、ある形状の初期形状から出発して形状を逐次変形させながら与えられた散乱指向性となるような物体形状を求める方法を開発した。本報告で述べた方法は前報で示した方法よりさらに効率良く数値計算をすることがで

きる。

非線形最適化手法を用いて物体形状を推定する場合では形状を表現するパラメータに関する複雑な感度計算が必要であるが、ここで提案する方法は、物体形状の微小変形と散乱音場の変化の関係を境界要素法に基づいて導いているので感度解析に相当する部分は通常の境界要素法の定式化とほとんど変わらない。さらに、推定できる形状は、境界形状を表現する要素数に依存するため、境界要素を多く取れば柔軟に対応することができる。

謝 辞

本研究の実施あたり、有益なご助言をいただいた別所正

利防衛大学校名誉教授に深く礼申し上げます。

参 考 文 献

- 1) 川井忠彦, 加川幸雄, 責任編集, 電気・波動工学における逆問題—CT から最適設計まで—, コンピュータール, No. 39, コロナ社, (1992)
- 2) 田中博, 岡部政之, 鈴木貴: 逆問題, 岩波講座応用数学 3 [方法 6], 岩波書店, (1993)
- 3) Colton, D.: The Inverse Scattering Problem for a Cylinder, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, (1979) 84A, 135-143
- 4) Sleeman, B. D.: The Inverse Problem of Acoustic Scattering, *IMA Journal of Applied Mathematics*, (1982), 29, 113-142
- 5) Kirsch, A. and Kress, R.: An Optimization Method in Inverse Acoustic Scattering, *Boundary Elements IX*, Vol. 3, (1987), 3-18
- 6) Ohnishi, K., Ohura, Y. and Kobayashi, K.: Inverse Scattering in 2D for Shape Identification by BEM, *Boundary Elements XII*, Vol. 2, (1991), 435-446
- 7) 河辺寛, 水中物体の形状推定の基礎研究, 日本造船学会論文集, 第173号, (平5), pp. 247-253
- 8) Mose, P. M. and Feshbach, H.: *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Book Company, (1953)
- 9) 岩崎洋一, 真能創, 別所正利, 河辺寛: 船体振動による水中放射音の基礎的研究 (第3報散乱問題と可逆理), 日本造船学会論文集, 第161号, (昭62), pp. 225-235
- 10) Bergman, S. and Schiffer, M.: *Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics*, Academic Press, (1953), 58-71.
- 11) 別所正利, 姫野洋司: 2次元ストークス流れにおける最適形状について, 関西造船協会誌, 第193号, (昭59), pp. 115-125
- 12) 真能創, 河辺寛: 船体不連続部の最適形状について (第1報)一様引張り (圧縮) をうける無限板中の開口, 関西造船協会誌, 第197号, (昭60), pp. 107-116
- 13) 田中正隆, 山際孝次: 動弾性逆問題への境界要素法の適用, 日本機械学会論文集 (A編), 54巻, 501号, (昭63), pp. 1054-1060
- 14) Zeng, X. and Saigal, S.: An Inverse Formulation with Boundary Elements, *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 59, (1992), pp. 835-840
- 15) Forsythe, G. E., Malcolm, M. A. and Moler, C. B. 著, 森正武訳: 計算機のための数値計算法, 科学技術出版社, (昭53), pp. 212-259
- 16) 熊谷雄大, 友永一郎: 水中物体の形状推定法について, 防衛大学校卒論文, (平5)