順応型 Shifted Integration 法による 骨組構造の動的崩壊挙動の有限要素解析

正員 都 井 裕* 正員 磯 部 大吾郎**

Finite Element Analysis of
Dynamic Collapse Behaviors of Framed Structures
by the Adaptively Shifted Integration Technique

by Yutaka Toi, *Member* Daigoro Isobe, *Member*

Summary

The Adaptively Shifted Integration technique (abbreviated to the ASI technique) is applied to the dynamic collapse problems of framed structures including quasi-static collapse under repeated loadings. The unloading of materials plays an important role in these behaviors. In the present analysis using cubic beam elements, the reshifting of the integration points to the Gaussian points in the unloaded elements is conducted in order to accomplish higher accuracy for the material-unloading behavior. The solutions given by the conventional method, the ASI techniques with and without reshifting are compared to show the validity of the newly proposed computational algorithm.

1. 序

空間骨組構造の非線形有限要素解析における smart algorithm として著者らは、順応型 Shifted Integration 法 (Adaptively Shifted Integration 法: 以下, ASI 法と略称) と称する新しい計算アルゴリズムを開発し、骨組構造の塑性崩壊問題、弾塑性座屈問題などの静的崩壊問題に応用してきた¹⁻³⁾。本手法は、線形 Timoshenko はり要素あるいは Bernoulli-Euler の仮定に基づく 3 次はり要素による非線形有限要素解析において、剛性マトリックス (すなわち、ひずみエネルギー) 評価のための数値積分点を要素の弾塑性性状に応じ順応的にシフトすることにより、大規模骨組解析に対し最大限の計算効率を達成するための手法であり、インプリメンテーションが容易なことも特長の一つである。

本研究では、この ASI 法を骨組鋼構造の動的崩壊問題に応用する。すなわち、これまで扱ってきた単調荷重下の静

的塑性崩壊および弾塑性座屈問題においては、応力・ひずみ関係における除荷挙動は副次的な役割しか果たさなかったため、塑性ヒンジの発生とともにシフトされた数値積分点は除荷の発生により要素が弾性状態に復帰しても再シフトされなかったが、動的崩壊解析においては弾塑性波の伝播に伴って生ずる負荷・除荷挙動を精度よくシミュレートすることが重要となる。また静的問題でも、繰返し荷重下の塑性崩壊問題においては除荷挙動が支配要因となり、本研究ではこのような繰返し荷重下の準静的崩壊も含めた動的崩壊問題に対し、除荷時の再シフトを考慮した ASI 法による smart algorithm を構成し、簡単な骨組構造の Shake-Down 解析、漸増崩壊解析、動的崩壊解析などによりその効果を検証する。

2. 負荷・除荷挙動に対する順応型 Shifted Integration 法

ASI 法が使用可能な有限要素は線形 Timoshenko はり要素および Bernoulli-Euler の仮定に基づく 3 次要素の 2 種類である¹⁾⁻⁴⁾。本研究では 3 次要素の使用を前提とするが、線形要素に対しても同様の計算が可能であることは言うまでもない。

Bernoulli-Euler の仮定に基づく 3 次はり要素における

* 東京大学生産技術研究所

** 東京大学大学院

2つの数値積分点位置 s_i ($-1 \leq s_i \leq 1$) と物理的応力評価点あるいは塑性ヒンジ発生点位置 r_i ($-1 \leq r_i \leq 1$) の関係は、

$$r_i = \mp 1/3 s_2 \quad (i=1, 2; s_1 = -s_2) \quad (1)$$

と表わせる^{1),2)}。すなわち、ガウス積分点 ($s_i = \mp 1/\sqrt{3}$) を用いた場合は同じ点に、 $s_i = \mp 1/3$ とした場合は要素端部に塑性ヒンジが発生する。

要素全体が弾性変形状態にある場合は、ガウス積分点が最適な積分点位置であり、最も良好な線形解が得られる。したがって、増分形の要素剛性方程式は

$$[k]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (2a)$$

ここに、

$$[k] = (L/2) \{ [B(-1/\sqrt{3})]^T [D_e(-1/\sqrt{3})] \\ \cdot [B(-1/\sqrt{3})] + [B(1/\sqrt{3})]^T [D_e(1/\sqrt{3})] \\ \cdot [B(1/\sqrt{3})] \} \quad (2b)$$

と表わせる。式中、 $[k]$ は接線剛性マトリックス、 $\{\Delta u\}$ は節点変位増分、 $\{\Delta f\}$ は節点外力増分、 $[B(s)]$ は一般化ひずみ・節点変位マトリックス、 $[D_e(r)]$ は弾性の断面力・一般化ひずみマトリックス、 L は要素長である。一般化ひずみおよび断面力増分は次式により計算される。

$$\{\Delta \epsilon(\mp 1/\sqrt{3})\} = [B(\mp 1/\sqrt{3})]\{\Delta u\} \quad (3)$$

$$\{\Delta \sigma(\mp 1/\sqrt{3})\} = [D_e(\mp 1/\sqrt{3})]\{\Delta \epsilon(\mp 1/\sqrt{3})\} \quad (4)$$

要素内の断面力分布は次式のように求まる。

$$\{\Delta \sigma(s)\} = [T_1(s)]\{\Delta \sigma(-1/\sqrt{3})\} \\ + [T_2(s)]\{\Delta \sigma(1/\sqrt{3})\} \quad (5)$$

塑性ヒンジ発生位置 $-r_2$ または r_2 は次式により決定される。

$$f(\sigma(-r_2)) = 0 \quad (6a)$$

または

$$f(\sigma(r_2)) = 0 \quad (6b)$$

ここに、 $f(\sigma)$ は断面力成分により記述された降伏関数である。

塑性化後は(1)式に従い、積分点を $s_i = \mp 1/3 r_2$ の位置にシフトして計算を続行する。すなわち、増分形の要素剛性方程式は

$$[k]\{\Delta u\} = \{\Delta f\} \quad (7a)$$

ここに

$$[k] = (L/2) \{ [B(-1/3r_2)]^T [D_e(-r_2)] \\ \cdot [B(-1/3r_2)] + [B(1/3r_2)]^T [D_p(r_2)] \\ \cdot [B(1/3r_2)] \} \quad (7b)$$

と表わされる。式中、 $[D_p(r)]$ は塑性変形時の断面力・一般化ひずみマトリックスであり、 $f(\sigma)$ を塑性ポテンシャルとして流れ理論より誘導される。なお、ここでは最初の塑性ヒンジは r_2 の位置に発生したと仮定している。ひずみおよび断面力増分は

$$\{\Delta \epsilon(\mp r_2)\} = [B(\mp 1/3r_2)]\{\Delta u\} \quad (8)$$

$$\{\Delta \sigma(-r_2)\} = [D_e(-r_2)]\{\Delta \epsilon(-r_2)\} \quad (9a)$$

$$\{\Delta \sigma(r_2)\} = [D_p(r_2)]\{\Delta \epsilon(r_2)\} \quad (9b)$$

と計算される。さらに、 $-r_2$ の位置に2つめの塑性ヒンジが発生した場合は(7b)式および(9a)式の $[D_e(-r_2)]$ も $[D_p(-r_2)]$ に置き換えられて計算が続行される。

以上は、除荷挙動を伴わない場合、あるいは伴ってもその影響が副次的な場合に用いられてきたASI法の計算アルゴリズムであるが^{3),4)}、繰返し荷重による準静的崩壊挙動あるいは動的崩壊挙動の解析においては、さらに次のようなアルゴリズムを追加する必要がある。

すなわち、

$$[(\partial f / \partial \sigma)(-r_2)][D_e(-r_2)]\{\Delta \epsilon(-r_2)\} < 0 \quad (10a)$$

および

$$[(\partial f / \partial \sigma)(r_2)][D_e(r_2)]\{\Delta \epsilon(r_2)\} < 0 \quad (10b)$$

の条件を満足することにより、すでに発生した1つまたは2つの塑性ヒンジがすべて除荷状態に入ったと判定された場合は、その直後の増分ステップから数値積分点を再びガウス積分点に戻して計算を続行する。すなわち、要素剛性方程式としては(2a)式、(2b)式を用い、ガウス積分点における一般化ひずみ増分および断面力増分はそれぞれ、(3)式および(4)式により計算される。塑性ヒンジ点を含む任意の位置における断面力増分は(5)式により評価され、(6)式により再降伏の有無が判定される。再降伏後の計算手順は再び(7a)式以降に従う。

上述の数値積分点の再シフトを含む準静的計算手順に慣性力項を付加することにより、動的崩壊問題の解析が可能となる。すなわち、次の全体系運動方程式を適当な時間積分スキームにより積分すればよい。

$$[M]\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [K]\{\Delta u\} = \{F\}_{t+\Delta t} - \{R\}_t \quad (11)$$

ここに、 $[M]$ は全体系質量マトリックス、 $[K]$ は全体系接線剛性マトリックス、 $\{F\}_{t+\Delta t}$ は時刻 $(t+\Delta t)$ における節点外力ベクトル、 $\{R\}_t$ は時刻 (t) における節点内力ベクトル、 $\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}$ は時刻 $(t+\Delta t)$ における節点加速度ベクトル、 $\{\Delta u\}$ は時刻 (t) から時刻 $(t+\Delta t)$ までの間の節点変位増分である。本解析では、要素質量マトリックスとして分布質量マトリックスを用い、数値積分点のシフトにより質量マトリックスは影響を受けないと仮定した。また、(11)式の時間積分には、Newmarkの β 法 ($\beta=1/4, \gamma=1/2$) を用いた。

以上のような計算手順をとることにより、初期降伏前の弾性挙動、降伏後の負荷挙動、除荷時の弾性挙動を通じ、常に最適のモデル化で増分解析が進行することになり、繰返し荷重下の準静的解析、動的崩壊解析に対し有効な計算アルゴリズムとなることが期待される。なお、定式化における諸式的具体形に関しては、文献3),4)を参照されたい。

3. 骨組構造のShake-Downおよび増増崩壊解析

Fig.1に解析例題を示す⁶⁾。下端がピン支持された門型ラーメンが左上端部に水平荷重 P_1 およびはり中央部に鉛直

Fig. 1 Plane frame under repeated loadings

荷重 P_2 を交互に繰返し載荷され、両荷重の最大値 $P_{\max}$ により、Shake-Down ($P_{\max}=0.90 M_0/L$ の場合)、および漸増崩壊 ($P_{\max}=0.96 M_0/L$ の場合) の 2 ケースが現れる。それぞれのケースについて、(a) 数値積分点をガウス積分点に固定した通常の有限要素法、(b) 除荷時に数値積分点の再シフトを行わない ASI 法、(c) 除荷時に数値積分点を(ガウス積分点に)再シフトする ASI 法、の 3 種類の方法で解析し、通常法と比較した場合の ASI 法の効果を明らかにしている。

3.1 Shake-Down 解析

Fig. 2 および Fig. 3 に Shake-Down を起こす場合の解析結果を示す。Fig. 2 は荷重・変位曲線であり、Fig. 3 は変位と荷重サイクル数の関係である。Fig. 2 の縦軸は上方に P_1 、下方に P_2 をプロットしていることに注意されたい。Fig. 2, Fig. 3 の変位はいずれも左上端部の水平方向変位である (Fig. 1 を参照)。また、図中に記された要素数は構造全体に対する要素数であり、4 要素分割の場合ははりが 2 要素、柱がそれぞれ 1 要素分割されており、これが可能な最小限の要素数である。それぞれの要素をさらに 2 等分割することにより、8 要素、16 要素などが得られる。

Fig. 3(a) からわかるように、通常法では 4 要素、8 要素、16 要素分割の場合に弾性変形しか現れず、Shake-Down 現象のシミュレーションになっていない。また、解の収束も極めて遅い。これらはすべて、ガウス積分点でのみ応力を評価し、ガウス積分点でのみ塑性ヒンジが発生するアルゴリズムであることに起因する。他方、Fig. 3(b) からわかるように、ASI 法を用いると 4 要素分割でも Shake-Down 現象がシミュレートされており、通常法と比較すると解の収束もよい。しかしながら Fig. 2(b) より、粗い分割の場合、除荷時の弾性勾配が不正確であり、この点に改善の余地があることがわかる。これは、要素端部に塑性ヒンジが発生した直後に数値積分点が $s_i = \pm 1/3$ の位置にシフ

(a) conventional method

(b) ASI technique without reshifting

(c) ASI technique with reshifting

Fig. 2 Load-displacement relations in shake-down analysis

Fig. 3 Displacement versus loading cycles in shake-down analysis

トされてしまい、そのまま除荷時の計算が行われることに起因する。この点を改良した、除荷時に数値積分点をガウス積分点に再シフトする ASI 法では、Fig. 2(c), Fig. 3(c) からわかるように、粗い要素分割でも極めて良好な解が得られている。

3.2 漸増崩壊解析

Fig. 4 および Fig. 5 は漸増崩壊を起こす場合の解析結果である。Fig. 4 には荷重・変位関係、Fig. 5 には変位と荷重サイクル数の関係がプロットされている。図中に記された要素数の意味は Shake Down 解析の場合と同様である。

Fig. 5(a) からわかるように、4 要素、8 要素などの粗い分割による通常法の解は Shake Down のような挙動を示しており、解の収束も極めて遅い。これらは、ガウス積分点で応力が評価され、塑性ヒンジが発生していることに起因する。これに対し、Fig. 5(b), 5(c) からわかるように、ASI 法による解は飛躍的に精度、収束性が向上しており、4 要素程度でも実用上差し支えない解が得られている。Fig. 5(b), 5(c) に示したような各荷重サイクル終了時の変位は、ほとんどが塑性変形に起因する永久変形であるため、除荷時の再シフトの影響はあまり大きくないが、Fig. 4(b) と 4(c) を比較すると、除荷時の再シフトにより荷重・変位関係における除荷時の弾性勾配が大きく改善されていることが明らかである。

Fig. 6 は、実際によく行われる不等分割による通常法の解析結果であり、Fig. 6(b) に示されるような部材結合部および集中荷重点近傍に微小要素を配置した 10 要素近似 (構造全体) で解析が行われている。ケース 1~3 の 3 種類の解析結果からわかるように、解は微小要素の長さに大きく依存しており (長さ零の極限で正解に収束する!)、使いにくい方法であることがわかる。

4. 骨組構造の動的崩壊解析

本章では、ステップ荷重を受ける簡単な平面および空間骨組構造の動的崩壊挙動を解析する。それぞれの場合について、(a) 数値積分点をガウス積分点に固定した通常の有限要素法、(b) 除荷時に数値積分点の再シフトを行わない ASI 法、(c) 除荷時に数値積分点を (ガウス積分点) に再シフトする ASI 法、の 3 種類の方法で解析し、通常法と比較した場合の ASI 法の効果を明らかにしている。

4.1 平面骨組の動的崩壊解析

解析例題を Fig. 7 に示す⁷⁾。下端を固定された門型ラーメンが左上端部に水平方向ステップ荷重を受けている。質量は図中の部材断面の 625 倍の値を仮定した。

Fig. 8 は弾性応答解析結果 (弾性変形解析であり、通常法と ASI 法の区別はない) であり、高次振動モードを伴わない本問題では、一部材 1 要素でほぼ収束解が得られていることがわかる。

Fig. 9 は、3 種類の方法による荷重点水平方向変位の時

(a) conventional method

(a) conventional method

(b) ASI technique without reshifting

(b) ASI technique without reshifting

(c) ASI technique with reshifting

(c) ASI technique with reshifting

Fig. 4 Load-displacement relations in incremental collapse analysis

Fig. 5 Displacement versus loading cycles in incremental collapse analysis

(a) load-displacement relations

(b) displacement versus loading cycles

Fig. 6 Shake-down analysis by the conventional method with non-uniform mesh

刻歴である。Fig. 9(a)に示す通常法による解析結果では、繰返し荷重による準静的解析の場合と同様、収束が極めて遅い。Fig. 9(b)に示す数値積分点の再シフトをしないASI法による解析結果は、通常法の解に比べ、相当改善されているが、粗い分割の場合は定常的応答時の振動周期に大きな誤差が見られる。これは数値積分点位置が $s_i = \pm 1/3$ のままで除荷挙動による定常的な弾性振動を精度よく解析できないことに起因する。除荷時に数値積分点を再シフトしたASI法によるFig. 9(c)の解析結果においては、変位の絶対値、周期ともに極めて良好な収束性を見せており、高次振動モードを伴わない本問題では、一部材

Fig. 7 Plane frame subjected to step loading

Fig. 8 Elastic response of a plane frame

1要素で実用上は充分な解が得られることがわかる。

Fig. 9には、下線を施した要素分割数による塑性ヒンジの発生順序(時刻)に関する計算結果も合わせて示したが、これを見ても、積分点を再シフトしたASI法による一部材1要素の結果は、通常法の32要素近似の結果と良好に対応していることがわかる。

4.2 空間骨組の動的崩壊解析

解析例題をFig. 10に示す⁸⁾。下端を固定された三角柱状ラーメンが死荷重(自重)のもとで部材結合部2にステップ荷重を受けている。

Fig. 11は弾性応答解析結果である。この問題でも一部材1要素でほぼ収束解と一致する解が得られていることがわかる。

Fig.9 Elasto-plastic response of a plane frame

Fig. 10 Space frame subjected to step loading

Fig. 11 Elastic response of a space frame

Fig. 12 は、3 種類の方法による荷重点 (点 2) x 軸方向変位の時刻歴である。定性的には前節の平面骨組の場合と同様のことが言える。すなわち、Fig. 12 (a) に示す通常法による解析では、解の収束が遅く、一部材 16 要素分割程度しても数%以上の誤差を含む。Fig. 12 (b) に示す数値積分点の再シフトをしない ASI 法による解析結果は、通常法の解に比べ良好であるが、一部材 2 要素分割では振動周期に大きな誤差を含む。除荷時の弾性振動に対する解析精度を向上させた、数値積分点の再シフトを含む ASI 法による解析結果では、Fig. 12 (c) に見られるように、変位の絶対値、周期ともに極めて良好な精度が達成されており、本問題でも一部材 1 要素で実用上問題のない解が得られることがわ

(a) conventional method

(b) ASI technique without reshifting

(c) ASI technique with reshifting

Fig. 12 Elasto-plastic response of a space frame

かる。

Fig. 12 には、下線を施した要素分割数による塑性ヒンジの発生順序（時刻）に関する計算結果も併記したが、積分点を再シフトした ASI 法による一部材 2 要素の結果は、通常法の 32 要素近似の結果と良好に対応している。

5. 結 言

大規模骨組構造の非線形有限要素解析における smart algorithm として考案された順応型 Shifted Integration 法を、繰返し荷重下の準静的崩壊問題および動的崩壊問題に応用した。その際、除荷挙動の重要性に鑑み、除荷時に数値積分点を再シフトするアルゴリズムを追加した。その結果、通常法との比較においては言うまでもなく、再シフトを行わない場合との比較においても、大きな計算精度の向上が達成された。再シフト過程も含め、本計算手法の既存コードへのインプリメントは極めて容易である。

参 考 文 献

- 1) Y. Toi: Shifted Integration Technique in One-Dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 31, (1991), 1537-1552.
- 2) 都井：骨組構造および回転対称シェル構造の有限要素解析における Shifted Integration 法について、日本造船学会論文集，第 168 号，(1990)，357-369.
- 3) Y. Toi and D. Isobe: Adaptively Shifted Integration Technique for Finite Element Collapse Analysis of Framed Structures, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, (1993), 1537-1552.
- 4) 都井・磯部：順応型 Shifted Integration 法による骨組構造の有限要素解析，日本造船学会論文集，第 171 号，(1992)，309-317.
- 5) 都井・磯部：順応型 Shifted Integration 法による骨組構造の座屈崩壊挙動の有限要素解析，日本造船学会論文集，第 174 号，(1993)，469-477.
- 6) 藤田・楠田・川井（木原博監修）：塑性設計法，森北出版，(1960).
- 7) T. G. Toridis and K. Khozeimeh: Inelastic Response of Frames to Dynamic Loads, Proc. of the ASCE, Vol. 97, EM3, (1971), 847-863.
- 8) R. K. Wen and F. Farhoomand: Dynamic Analysis of Inelastic Space Frames, Proc. of the ASCE, Vol. 96, EM5, (1970), 667-686.