海中大型回転体シェル構造物の動的特性 (第2報)

—強制振動応答解析—

正員 安 澤 幸 隆* 正員 高 橋 弘 行**

正員 香 川 洸 二*

Dynamic Characteristics of a Large Underwater Shell of Revolution (2nd Report)

—Dynamic Response Analysis—

by Yukitaka Yasuzawa, *Member* Hiroyuki Takahashi, *Member*
Koji Kagawa, *Member*

Summary

This is the second report on dynamic characteristics of an underwater large rotational shell. This paper focuses on the seismic response of the shell to horizontal ground motion. The natural modes which were obtained in the previous paper are used to estimate the seismic responses, which is based on the theory of power spectrum. The response of the shell in water is very different from that in air because of the effect of large added mass and the seismic input spectrum, and so this kind of numerical analysis of fluid-structure interaction problem has to be analyzed numerically in advance in the design process. And the features of dynamic characteristics of the half drop shaped shell that authors proposed are discussed herein as well.

1. 緒 言

前報¹⁾では、海底に固定した大型海中シェルの動的特性を調べるための流体—構造連成固有振動解析を行う手法とその計算結果を報告した。それによると、周方向モード波数 n' に関しては、軸対称モードに対応する $n'=0$ および水平変位モードに対応する $n'=1$ の固有振動数が低いことがわかった。また、非接水時の振動に対して等価な付加質量は非接水時のモーダル質量の15倍にも達することがあることがわかった。

海底に固定された構造物の場合、海底地盤の地震による応答特性をあらかじめ十分に把握しておく必要がある。そこで本研究では、Fig. 1に示すような海底に固定された大型回転体シェルの底面すなわち海底が水平方向に運動するときのシェルの動的応答を数値解析によって調べることを目的としている。

前報¹⁾で、Fig. 1に示す海中シェル構造物の固有振動解析コードを開発したのでそのコードで得られた固有振動モードを、本報告で示す強制振動解析に利用している。本研究においても前報¹⁾の固有振動解析の場合と同様に、海の表面波による影響は無視している。

2. 基礎理論と定式化

2.1 海底地盤の強制変位と振動変位

Fig. 2のように、直交デカルト座標系における海底地盤

Fig. 1 Underwater large axisymmetrical shell structure subject to seaqueake
(a) Cylindrical Shell
(b) Half Drop Shaped Shell

* 九州大学工学部

** 石川島播磨重工業(株) (研究当時九州大学大学院)

Fig. 2 Rigid displacement vector and the components along local coordinates

の強制変位成分とそれに対応するシェル面の局所座標系に対する剛体変位成分との関係は次式のように表わす事ができる。

$$\begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{pmatrix} = U_0(t) \begin{pmatrix} \cos \theta \sin \phi(s) \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \cos \phi(s) \end{pmatrix} + V_0(t) \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi(s) \\ \cos \theta \\ \sin \theta \cos \phi(s) \end{pmatrix} + W_0(t) \begin{pmatrix} -\cos \phi(s) \\ 0 \\ \sin \phi(s) \end{pmatrix} \quad (1-a)$$

あるいは

$$\bar{\vec{U}} = U_0 \bar{\vec{t}}_u + V_0 \bar{\vec{t}}_v + W_0 \bar{\vec{t}}_w \quad (1-b)$$

ここに θ は周方向角度, ϕ は XY -平面とシェル面の外向き法線方向との成す角度, s はシェル面の子午線に沿う座標であり, 実際に必要となるシェル要素内の $\phi(s)$ は, 文献3)の方法で求めている。 U_0 , V_0 , W_0 はそれぞれ海底地盤の変位を表わしており, 各成分は全体直交デカルト座標系の各座標軸方向成分を表わす。本研究では, 海底地盤の並進運動を想定しており, 回転運動は考えていない。また, $\bar{U}$, $\bar{V}$, $\bar{W}$ は, これら地盤の強制変位に対応するシェルの剛体変位成分を, シェル面に沿う局所座標系に関して表わしたものである。

海中における地震発生時の地盤の並進運動に対するシェルの運動を, 地盤の運動に対応する剛体変位成分と弾性変形成分に分離すると, シェル中央面の全変位成分 U, V, W は次のように表わされる。

$$\begin{pmatrix} U(s, \theta, t) \\ V(s, \theta, t) \\ W(s, \theta, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{U} \\ \bar{V} \\ \bar{W} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_E(s, \theta, t) \\ V_E(s, \theta, t) \\ W_E(s, \theta, t) \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

あるいは

$$\vec{u} = \vec{\bar{U}} + \vec{u}_E \quad (2-b)$$

いま, 水平方向に一方に地盤が運動する場合を考える。つまり

$$V_0 = W_0 = 0 \quad (3)$$

とし, U_0 のみが与えられる場合を考える。さらに, ここでは過渡応答を含めた時刻歴応答の解析を行うのではなく, 地震による強制変位の入力を定常的な不規則運動つまり, 調和強制変位に対する定常応答の重ね合わせであると考えことにする。前報¹⁾と同様に, シェルの弾性変位成分は, 周方向と子午線方向を変数分離し, 周方向座標 θ に関してはフーリエ級数を仮定し, 子午線方向は軸対称薄肉シェル要素で離散化を行うものとする。つまり,

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \\ \theta \end{pmatrix} = \sum_{n'=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_{n'0} \cos n' \theta \\ v_{n'0} \sin n' \theta \\ w_{n'0} \cos n' \theta \\ \beta_{n'0} \cos n' \theta \end{pmatrix} \exp(i\omega t) \quad (4)$$

2.2 構造部の定式化

ところで, 剛体変位によって, シェル内にひずみは生じないので, 海底の地震による強制調和変位による効果は慣性力に対してのみ有効であるから, その強制変位の加速度と質量に支配されて, みかけ上等価な強制調和外力となる。つまり

$$K\vec{u}_E + C\vec{\dot{u}}_E + (M + M_a)\vec{\ddot{u}} = \vec{0} \quad (5)$$

より,

$$K\vec{u}_E + C\vec{\dot{u}}_E + (M + M_a)\vec{\ddot{u}} = -(M + M_a)\vec{\ddot{\bar{U}}} \quad (6)$$

となる。すなわち, 等価外力 $-(M + M_a)\vec{\ddot{\bar{U}}}$ が加えられた強制振動問題となる。ここに, $\vec{u}_E$ は, シェルの振動変位ベクトルを表わす。さらに, 前報¹⁾と同様に, シェルの変位成分の周方向分布に関しては, θ に関してフーリエ級数で展開し, n' 次成分に関してのみの方程式とし, 必要に応じて重ね合わせることにする。すると, 周方向 n' 次のモードに対して,

$$K_n \vec{u}_n + C_n \dot{\vec{u}}_n + (M_n + M_{an}) \ddot{\vec{u}}_n = -(M_n + M_{an}) \ddot{\vec{U}}_0 \quad (7)$$

式(7)において、 $\vec{u}_n$ は周方向 n' 次モードの弾性変形による節点変位ベクトルを表わし、 K_n 、 M_n 、 C_n はそれぞれ、周方向 n' 次モードの振動に対応する剛性マトリックス、質量マトリックス、減衰マトリックスとなる。 (n') の定義については前報¹⁾を参照。従って、 K_n 、 M_n は前報¹⁾で用いたマトリックスと同一である。また、減衰力に関してはここでは、流体の運動に伴う減衰は考慮していない。

2.3 流体部の定式化と構造と流体の連成

流体部の定式化は前報告と同様にして付加水質量マトリックス M_{an} が求められる。ところで地盤の強制加速度ベクトルを次のように仮定する。

$$\ddot{\vec{U}}(t) = \ddot{\vec{U}}_0 \exp(i\omega t) \quad (8)$$

ここに、 $\ddot{\vec{U}}_0$ は実数ベクトルである。

するとシェルの弾性変位ベクトルの定常解を次式で仮定することができる。

$$\vec{u}_n(t) = \vec{u}_{n0} \exp(i\omega t) \quad (9)$$

ここに $\vec{u}_{n0}$ は複素ベクトルである。

式(8)、(9)を式(7)に代入して、次のマトリックス振動方程式が得られる。

$$[K_n + i\omega C_n - \omega^2(M_n + M_{an})] \vec{u}_{n0} = -(M_n + M_{an}) \ddot{\vec{U}}_0 \quad (10)$$

これは、周方向 n' 波のモードに対するマトリックス振動方程式であり、この式の右辺からわかるように、強制変位による調和加振においては、加速度の振幅に比例した等価外力が加わる形となる。

ところで本研究では、計算の簡単化のために、式(10)の強制振動方程式を次の仮定の下でモーダル解析によって解いている。

仮定

- ・減衰は比例減衰を仮定する。従って、シェル構造物のモーダルマトリックスを用いて対角化することができる。
- ・付加水質量マトリックス M_a は対称マトリックスに近いものとする。従って、マトリックス M_a の対角項以外は対称成分の平均を取って、対称化している。

これらにより、水中における固有振動解析によってモーダルマトリックスを求め、それを用いて各々のモードに関して独立な1自由度系に変換することができる。以下にその定式化を示す。

2.4 モーダル解析を利用した接水振動解析

前報¹⁾における接水固有振動解析により、

$$[K_n - \omega^2(M_n + M_{an})] \vec{u}_{n0} = \vec{0} \quad (11)$$

の固有値問題を解き、周方向 n' 次の子午線方向 j 次モードの固有円振動数 $\omega_{n'j}$ と固有ベクトル $\vec{u}_{n'j}$ が求められる。固有ベクトルを用いてモーダルマトリックス Φ_n を作るこ

とができ、モーダル座標 $a_{n'j}$ を導入する。すなわち、

$$\vec{u}_{n'0} = \Phi_n \vec{a}_{n'} \quad (12)$$

これを式(10)に代入し、両辺それぞれに左から Φ_n^T をかけると

$$K_{n'0} \vec{a}_{n'} + i\omega C_{n'0} \dot{\vec{a}}_{n'} - \omega^2 M_{n'0} \vec{a}_{n'} = -\Phi_n^T (M_n + M_{an}) \ddot{\vec{U}}_0 \quad (13)$$

ここで上記の仮定およびモードの直交性を用いることにより、式(13)の左辺の係数マトリックスはすべて対角マトリックスとなるので、接水時の各固有振動モード j に関して、独立な1自由度系の運動方程式が得られる。すなわち、式(13)の右辺について、水平方向強制運動の加速度の振幅を $\ddot{U}_{c0}$ とすると、式(1)および(3)を考慮して、

$$(\omega_{n'j}^2 + i\omega 2\xi_{n'j}\omega_{n'j} - \omega^2) a_{n'j} = -\ddot{U}_{c0} f_{n'j} \quad (j=1, \dots, N) \quad (14)$$

ここに

$$\xi_{n'j} = \frac{\Phi_n^T \dot{C}_n \Phi_n}{2\omega_{n'j} M_{n'j}}, \quad f_{n'j} = \frac{\Phi_n^T f_n}{M_{n'j}} \quad (15)$$

と表せる。ここで、海底地盤の水平運動の加速度を次式で表わすことにする。

$$\ddot{U}_c(t) = \ddot{U}_{c0} \exp(i(\omega t + \psi)) \quad (16)$$

ここに $\ddot{U}_{c0}$ は、シェル底面すなわち海底地盤の水平方向加速度の振幅を表わし、 ω は起振円振動数、 ψ は位相である。すると式(14)の定常解は次式となる。

$$a_{n'j} = \frac{1}{\omega_{n'j}^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n'j}}\right)^2\right\}^2 + 4\xi_{n'j}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{n'j}}\right)^2}} \cdot (-\ddot{U}_{c0} f_{n'j0}) \cdot \exp(i(\omega t + \psi + \varphi_{n'j})) \quad (17)$$

$$\varphi_{n'j} = \tan^{-1} \frac{-2\xi_{n'j}\omega_{n'j}\omega}{\omega_{n'j}^2 - \omega^2} \quad (18)$$

ここに $\varphi_{n'j}$ は海底地盤の運動に対する応答の位相差である。

2.4 地震応答解析

本研究では濱本ら²⁾と同様の方法で、地震応答の評価を行っている。すなわち、海底地盤の水平地震加速度 $\ddot{U}_c$ は、平均値0のGaussの確率密度を有する定常エルゴード過程であり、その周波数特性はフィルターされたホワイトノイズであると仮定する。

地震動の水平方向加速度 $\ddot{U}_c$ を次のような級数の形で表わす。

$$\ddot{U}_c(t) = \frac{2}{T} \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cos(\omega_m t + \psi_m) \quad (19)$$

ここに T は地震継続時間。 $\omega_m = 2m\pi/T$ 。

この式を用いると特定の地震動を表すためにスペクトル密度 c_m および各成分波の位相差 ψ_m を規定しなければならない。しかし、地震動では同じ波形が起こることはなく、位相差の分布はかなり偶然的なものとなる。それに対して、スペクトル密度の方は地震の発震機構、伝搬する経路の地層、地盤の性質などと密接な関係が有る。よって、本研究

では工学的見地から、位相差を特定した地震を検討の材料とせず、スペクトル密度のみで応答特性を検討することとし、地震動の加速度や応答量を次式のような2乗平均値で表わすものとする。すなわち、 $y(t)$ をある応答量とすると、その自乗平均は

$$\overline{y^2} = \frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt \quad (20)$$

で表わされ、例えば地震動の加速度自乗平均は式(20)の $y(t)$ に式(19)を代入して、

$$\overline{U_c^2} = \frac{2}{T^2} \sum_{m=1}^{\infty} c_m^2 \quad (21)$$

で表わされる。従って地震動加速度の第 m 調和波に対するスペクトル $G_m(\omega)$ は

$$G_m(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{c_m^2}{\pi T} \quad (22)$$

で与えられるから、

$$\overline{U_c^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{T} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m^2}{\pi T} = \int_0^{\infty} G(\omega) d\omega \quad (23)$$

ここに $G(\omega)$ は地震動のパワースペクトル関数と呼ばれ、本研究では簡単な形で表わされる金井・多治見⁵⁾⁶⁾⁷⁾の次式を用いることとする。

$$G(\omega) = S \dot{U}_c(\omega) = \frac{1 + 4\xi_\theta^2(\omega/\omega_\theta)^2}{[1 - (\omega/\omega_\theta)^2]^2 + 4\xi_\theta^2(\omega/\omega_\theta)^2} \cdot S_0 \quad (24)$$

($-\infty < \omega < \infty$)

ここに、 S_0 ：パワースペクトル強度、 ω_θ ：海底地盤の特性円振動数、 ξ_θ ：特性減衰係数。

(24)式は、1自由度系の基礎に周波数にわたって一様な強度を持った外乱を与えたときの基礎の加速度応答のパワースペクトル密度関数に等しい。すなわち、地盤を1自由度系のモデルで表わすという仮定で提案された式である。

ところで、シェルの応答に関しては、水平方向の強制変位のみを考えているから応答に関しても $n'=1$ のみを考えればよい。上記の地震スペクトル $G(\omega)$ を用いると(17)式に対する自乗平均は次のように与えられる。(Appendix 1 参照)

$$\overline{a_{n'j}^2} = \int_0^{\infty} \frac{F_{n'j0}^2}{\omega_{n'j}^4} f^2(\omega, \omega_{n'j}) G(\omega) d\omega \quad (25)$$

ここに

$$f(\omega, \omega_{n'j}) = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n'j}}\right)^2\right]^2 + 4\xi_{n'j}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{n'j}}\right)^2}} \quad (26)$$

ただし、 $n'=1$ 。

このモードの自乗平均 $\overline{a_{n'j}^2}$ を用いて加速度や応力の応答量の自乗平均は次式で与えられる。

$$\overline{u^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} u_{1j}^2(s) \cos^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (27-a)$$

$$\overline{v^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} v_{1j}^2(s) \sin^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (27-b)$$

$$\overline{w^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{1j}^2(s) \cos^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (27-c)$$

シェルの膜力および曲げモーメントに関しても同様に次式で表わされる。

$$\overline{N_{s1}^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{s1j}^2(s) \cos^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (28-a)$$

$$\overline{N_{s2}^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{s2j}^2(s) \sin^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (28-b)$$

$$\overline{N_{s0}^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} N_{s0j}^2(s) \cos^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (28-c)$$

$$\overline{M_{s1}^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{s1j}^2(s) \cos^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (29-a)$$

$$\overline{M_{s2}^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{s2j}^2(s) \sin^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (29-b)$$

$$\overline{M_{s0}^2}(s, \theta) = \sum_{j=1}^{\infty} M_{s0j}^2(s) \cos^2 \theta \cdot \overline{a_{n'j}^2} \quad (29-c)$$

3. 数値計算結果と考察

3.1 水中円筒シェルの解析とその妥当性

濱本等²⁾は、固定式海洋円筒シェルの地震応答の解析について報告している。彼らの解析では対象構造物を円筒シェルに限定しているので流体から受ける動水圧を解析的に導くことができ、それを利用して解析を行っている。応答に関してはシェル自体の慣性力と海水との相互作用による動水圧との自乗和平方根の値を求め、それを静的にシェル表面に作用させることにより、近似的に応力を求めている。本研究では、統計的手法により、各応答の2乗和平均値の平方根の2倍を最大応答として評価に用いている。Fig. 3に円筒シェルの膜力の地震応答の計算結果と濱本らの計算結果の比較を示す。円筒シェルの寸法については前報¹⁾で述べたものと同じである。Fig. 3(a)は、短形円筒シェル、Fig. 3(b)は長形円筒シェルである。いずれについても本解析と濱本等の結果はよい一致を示している。ただし濱本らの計算結果では、上記のような近似を用いているので、負の値を取っているところがある。

3.2 水中 half drop shaped shell の地震応答

水中での自由振動モードを用いて海底の水平方向の地震に対して、half drop shaped shell のシェル変位、応答加速度、シェルの応力分布などを調べる。half drop shaped shell の寸法については、前報¹⁾の Table 2 に示した大型シェルのものを用いている。地震加速度のスペクトルに関する諸定数としては、

$$S_0 = 42.9 \text{ cm}^2/(\text{sec}^3 \text{ rad}), \quad \omega_\theta = 15.6 \text{ rad/sec}$$

$$\xi_\theta = 0.6$$

を用いることとした。入力地震波の S_0 の値は El Centro (1940)地震の NS 成分の強度に対応する値であり、他の値は、比較的固い海底地盤に対応している。Fig. 4に地震動の加速度のパワースペクトル $G(\omega)$ の分布と、half drop shaped shell の低次の固有振動数を示す。非接水時の固有振動数はパワースペクトルのピークから離れており、問題ないと思われるが、水中固有振動数はスペクトルのピークにかなり近く、地震に対する応答が大きくなる可能性があ

(a) Distribution of Membrane Stresses of Type 1 (short shell)

(b) Distribution of Membrane Stresses of Type 2 (long shell)

Fig. 3 Comparison of the present numerical results on cylindrical shell with results by Hamamoto et al.²⁾

る。Fig. 5 に非接水時の地震応答と海中での変位の応答を示す。非接水時にはシェルの基部付近を除いて剛体移動に近い応答であるのに対して、水中では、付加水質量の効果が大きく、シャボン玉を水平に揺らしたときのようにシェル上部が水平移動とともに膨らんでいることがわかる。また、膜力の応答の計算結果を示した Fig. 6 からそのことがわかる。Fig. 7 は曲げモーメントおよびねじりモーメントの応答の分布である。ここで参考のために、Fig. 8 に非接水時と接水時の応答モードの自乗平方根の比を示す。横軸のモードは $n'=1$ のときのモードを低次から順に番号付けたものである。つまり前述の式中の j にあたる。非接水時には、最低次以外のモードの応答は非常に小さいのに対して、接水時には3次ぐらいまで応答がかなり生じている。

このように、非接水の場合と接水の場合とで大きく変位や応力の分布形状が異なるのは、両者の固有モード形状の相違と、固有振動数の低下により、応答に複数モードの寄

Fig. 4 Spectrum of Earthquake and Natural Frequencies of Half Drop Shaped Shell

(a) in air

(b) in water

Fig. 5 Seismic Response of Displacement

与する割合が変化するためであると考えられる。

3.3 水中 drop shaped shell の調和加振による応答

前節の応答の解析結果を更に考察するために、地盤に水平方向の調和運動を与えた時の応答曲線を調べた。Fig. 9 および Fig. 10 にそれぞれ非接水時および接水時のシェル頂部の変位応答曲線および最大応答時の変位の子午線方向分布を示す。この変位分布の傾向が、地震応答の変位分布にはほぼ対応していることから、水平方向モードの固有振動数と等しい調和起振運動を地盤に与えることにより、変位分布の大体の傾向が掴める。

Fig. 6 Seismic Response of Membrane Stress

Fig. 7 Seismic Response of Bending Moment

Fig. 8 Contribution of each meridian mode to seismic response

Fig. 9 Horizontal Displacement Response at apex due to Harmonic Motion of Ground

4. 結 言

- ・地盤の水平方向強制変位による強制振動解析コードおよび地震応答解析コードを開発した。
- ・円筒シェルの計算を行い、他の研究による結果と比較して本解析の妥当性を検証した。

Fig. 10 Displacement Distribution along the Meridian due to Harmonic Ground Motion

- ・地震動のスペクトルを half dropped shaped shell の下部の地盤に水平方向に与えることにより、応答量を自乗平均の形で求め、応答の特徴および非接水の場合との比較を行い考察を行った。
 - ・非接水時と接水時とは大きく応答が異なるので、非接水時の解析結果から非接水時の応答を予測するのは困難であり、本研究のような方法で流体構造連成振動問題として解析する必要がある。
- 本研究で対象としているような海底固定式のシェル構造物の地震に対する設計においては、水中での水平方向最低次固有振動数になるべく地震波のスペクトルのピークから離すか、あるいは地盤の強制変位が直接シェルの基部の水平方向変位にならないような工夫が重要であるといえる。

参 考 対 献

- 1) 安澤幸隆, 高橋弘行: 海中大型回転体シェル構造物の動的特性 (第1報) —固有振動解析—, 日本造船学会論文集, 第175号, (1993), pp. 325-336
- 2) 濱本卓司, 田中彌壽雄: 固定式海洋円筒シェルの動的解析, その3 地震応答解析, 日本建築学会論文報告集, 第303号, (1981), pp. 141-153
- 3) 安澤幸隆: Drop Shaped shell の座屈強度について, 西部造船会会報, 第83号, (1992), pp. 167-178
- 4) Yasuzawa, Y.: Structural Response of Underwater Half Drop Shaped shell, Proceedings of the 3rd International Offshore and Polar Conference, Singapore, Singapore, 6-11 June, (1993), pp. 475-

481

- 5) 多治見宏: 建築振動学, コロナ社
- 6) 星谷 勝: 確立論手法による振動解析, 鹿島出版会
- 7) Kanai, K.: Semi-Empirical Formula for the Seismic Characteristics of the Ground, Bull. Earthq. Res. Inst. Univ. of Tokyo, 35, 1957

Appendix 1 地震による応答 $\overline{a_{n'j}}$ 式(25)の導出

$$\ddot{U}_G(t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{2}{T} \cos(\omega_m t + \psi_m) \quad (\text{A-1})$$

に対する応答は、式(19)より、

$$a_{n'j} = \frac{2}{T} \frac{1}{\omega_{n'j}^2} F_{n'j0} \sum_{m=1}^{\infty} f_{m,n'j}(\omega_m, \omega_{n'j})(-c_m) \cdot \exp(i(\omega t + \psi + \varphi_{n'j})) \quad (\text{A-2})$$

ここに

$$f_{m,n'j}(\omega_m, \omega_{n'j}) = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega_{n'j}}\right)^2\right\}^2 + 4\xi_{n'j}^2 \left(\frac{\omega_m}{\omega_{n'j}}\right)^2}} \quad (\text{A-3})$$

従って、 $a_{n'j}$ の自乗平均 (式(22)) を考えると、

$$\overline{a_{n'j}^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_{n'j0}^2}{\omega_{n'j}^4} f_{m,n'j}^2 \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{1}{\pi T} c_m^2 \quad (\text{A-4})$$

ここで、地震動のスペクトル $G(\omega)$ (式(24)) を考慮すると、応答は地震動のスペクトルを用いて次式で表される。

$$\overline{a_{n'j}^2} = \int_0^{\infty} \frac{F_{n'j0}^2}{\omega_{n'j}^4} f_{n'j}^2 G(\omega) d\omega \quad (\text{A-5})$$

ここに

$$f_{n'j}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_{n'j}}\right)^2\right\}^2 + 4\xi_{n'j}^2 \left(\frac{\omega}{\omega_{n'j}}\right)^2}} \quad (\text{A-6})$$