中水深用一点係留システムの波浪中挙動に関する 基礎的研究

正員 三 上 隆* 水 野 克 彦**
 正員 早 川 直 樹* 三 浦 康 史***
 正員 中 川 寛 之* 正員 影 本 浩****
 正員 神 田 雅 光*

A Basic Study on the Wave Induced Responses
 of a Single Point Mooring System for Medium-Depth Water

by Takashi Mikami, *Member* Katuhiko Mizuno,
 Naoki Hayakawa, *Member*, Yasushi Miura,
 Hiroyuki Nakagawa, *Member*, Hiroshi Kagemoto, *Member*
 Masamitsu Kanda, *Member*

Summary

The development of ocean oil fields are now going to deeper and smaller oil fields. A FPSO (Floating, Production, Storage and Offloading) system is one of the most economical systems for the production of marginal fields and thus is in use worldwide. For the position keeping of a FPSO system, a single point mooring system is usually employed to economize the operation. However, the conventional single point mooring systems such as a catenary anchor leg mooring (CALM) or a turret mooring (TM) become less economical as the water depth increases because the system becomes heavier in order to sustain the large weight of mooring lines. In this paper, we apply a Counterweight Articulated Mooring (CAM) system, which was originally proposed for a mooring system in ice infested water, as the alternative single point mooring system for a FPSO that may be used in a medium-depth water (~500 m).

Since a CAM system is mechanically much more complicated than conventional systems, we examine how the behaviours of a CAM system in waves can be predicted theoretically. A computer code is developed based on the constraint matrix method proposed by Langley for the analysis of a floating system composed of a number of structures.

Numerical results obtained by the developed code are compared with model test data. And the following conclusions are obtained through the present study.

(1) The numerical prediction of wave induced responses of a CAM system gives fairly accurate results.

(2) The low frequency responses in irregular waves are governed by the low frequency oscillations of a tanker, which should be predicted while properly accounting for the damping force.

(3) The connecting mechanism between a tanker and a yoke should be free rather than be fixed because the stress and the mooring lines' tensions are drastically decreased.

* (株) 三井造船昭島研究所

** 東京大学大学院

*** 日本鋼管(株) (研究当時東京大学工学部船舶海洋
 工学科)

**** 東京大学工学系研究科

原稿受理 平成7年7月10日

秋季講演会において講演 平成7年11月16日,
 17日

1. 結 言

これまでの海洋石油開発においては、浅海域での大規模な油田の開発が主であったが、現在では浅海域の大規模な油田の新規の開発は極地部分を除くと終了しているため、より深い水深で、小規模な油田に対する開発が行われつつある。小規模な油田では、開発コストの早期回収の観点から、比較的安価なシステムとして FPSO(Floating Produc-

Fig. 1 Counterweight Articulated Mooring (CAM) System

tion Storage and Offloading System) が有力であると考えられている。FPSO では、係留方法として一点係留システムを用いることが多い。このようなことから、一点係留システムのより深い水深 (500 m 程度の中水深域) への対応が求められている。一点係留システムとしては、CALM (Catenary Anchor Leg Mooring) や、TM (Turret Mooring) システムの実績が多く、既に水深 200 m~300 m での海洋油田開発に使用されている。これらのシステムを中水深域に応用することも考えられるが、そのためには、新しい係留素材の開発などが必要とされている。

そのため本研究では、氷海用 FPSO として提案されている CAM (Counterweight Articulated Mooring) システム¹⁾ を中水深域に応用することを考える。

CAM システムは、Fig. 1 に示されるように、船体、ヨーク、CAM ライザー、係留チェーンから成るシステムであり従来の CALM システムと比較して、CAM ライザーによって見かけ上の水深を浅くできるため、係留ラインに対する負担を軽減できるというメリットがある。

そのようなメリットがある反面、CALM や TM システムと比較して、自由度の多い系であるために波浪中の挙動がより複雑になるという問題がある。

そこで、本研究では CAM システムのように力学的に複雑なシステムの挙動 (特に設計上重要である結合部の荷重、チェーン張力、船体とライザーの相対運動等) を明らかにするため、Langley²⁾ によって提案されている理論的推定法に基づいた計算プログラムを開発し、その有効性を水槽実験と比較して検証すると共に、CAM システムに特徴的な現象を実験結果をもとに検討・考察することを目的とする。

2. 実験

中水深用一点係留 CAM システムの挙動の解明及び数値計算プログラムの妥当性を検証するために、CAM システ

Table 1 Principal particulars of the CAM system

tanker		CAM riser		
			constraint cond.	
L_{pp} (m)	4.5		Free	Fix
B (m)	0.76	Length (m)	1.65	1.65
D (m)	0.38	draft (m)	1.25	1.25
d (m)	0.16	diameter (m)	0.14	0.14
displacement (kgf)	403	weight (kgf)	17.7	17.4
KG (m)	0.156	displacement (kgf)	19.2	19.2
OGx (m)	0.18	KG (m)	0.410	0.398
		length of a mooring line (m)	8.0	
		unit weight in air (kgf/m)	0.136

Fig. 2 The arrangement of mooring lines

Fig. 3 Experimental set-up of the CAM system

ムの模型を用いて、復原力特性実験、規則波中実験及び不規則波中実験を行った。実験は東京大学船舶航海性能試験水槽 (50 m×30 m×2.5 m) で、水深を 2.3 m として行った。

供試模型の主要目を Table 1 に示す。また、CAM ライザーの実験係留状態を Fig. 2 に示し、CAM システム模型全体図を Fig. 3 に示す。

一点係留システムでは、水平面内の復原力が弱いために、不規則波中の変動漂流力によって水平面内の長周期運動が誘起される可能性のあることが広く知られている。このような長周期運動は水平面内の復原力特性と密接な関係があり、水槽実験を行う際には、計測用ケーブルなどによる副

Table 2 Measured items and used apparatus for the measurement

船体の水平面内運動	ビデオ解析装置
船体の水平面内運動	ビデオ解析装置
船体の上下揺	加速度計
船体の横揺、縦揺	ジャイロ
CAMライザーの6モード運動	非接触運動計測装置
船体/ヨーク間の相対ピッチ角	ポテンシオメータ
ヨーク/CAMライザー相対角	ポテンシオメータ
ヨーク/CAMライザー拘束力	3分力計
係留索の張力(4本)	張力計

Fig. 4 A constraint mechanism between a tanker and a yoke

次的な復原力が作用しないように十分注意を払う必要があることが報告されている³⁾。

そこで、本実験では、電源、アンプ、データレコーダ及び、各種の計測機器などは模型船内に格納し、運動計測はCAMライザーに関しては非接触式運動計測装置 (Position Sensor System)、船体に関してはビデオ解析装置を用いて計測を行い、計測用ケーブル等によって復原力特性が変化しないようにして実験を行った。

計測項目及び計測装置をまとめて Table 2 に示す。

タンカーとCAMライザーは Fig. 4 に示すようにヨークで連結されている。今回の検討では、船体・ヨーク間の拘束条件がシステムの挙動に及ぼす影響を調べるためヨークの船体側取付部における縦揺を自由にしたとき及び拘束したときの2種類について実験を行った。

前述したように係留系の復原力特性は、CAMシステム全体の運動を考える上で重要な要因であるので静水中においてカウンターウェイトによってタンカー模型を変位させ、ウェイト重量と水平変位、係留ライン張力の関係を計測した。

実海域に設置された一点係留システムには、風、潮流及び波が外力として作用するが、今回の検討では波浪 (規則波中、不規則波中) のみを検討対象とした。

規則波中実験では、波周期を 0.8 (sec) から 2.4 (sec) まで波傾斜一定 ($H_w/\lambda=1/70$) で変化させ、Table 2 に示した各計測項目の周波数応答を計測した。

また、不規則波中実験では、ISSC スペクトルを有する不規則波を発生させ、その中での応答を計測した。なお、統

Table 3 The significant wave height and the mean period of the used irregular waves

significant wave height (cm)	4	6
mean period (sec)	1.4	1.7

計的に有意な長周期応答を得るために、不規則波中実験は各々15分間にわたる計測を5回ずつ行い、それらをスペクトル解析した後に平均化処理を実施した。(15分間の計測を5回ずつ行ったのは、1回の計測時間に実験技術的に限界があるため、長周期運動の周期を予め理論計算で予測し(約40秒)、長周期運動が110周期入るようにしたためである。)

実験に用いた不規則波の有義波高、平均周期を Table 3 に示す。

なお、スペクトル解析はBT方を用いた (サンプリング周期 0.2 秒、ラグ数 200。従って、Nyquist 周波数は、2.5 Hz、スペクトルの分解幅 0.025 Hz)。さらに、このようにして得られたスペクトルを長周期成分 (~ 0.2 Hz) と波周期成分 (0.2~2.5 Hz) の2つの部分に分割し、それぞれ長周期応答および波周期応答として面積 (m_0)・モーメント (m_n) を計算する事によって有義値 ($=4.004\sqrt{m_0}$) と平均周期 ($=2\pi m_0/m_1$) を得た。

3. 理論的推定法

3.1 基礎的仮定

理論計算において仮定した条件を以下に述べる。

- ・微小振幅理論が適用できる。
- ・船体とCAMライザーの間の流体力学的な連成は無視できる。
- ・規則波中においては応答は定常状態に達しているものとし、周波数領域で解析を行う。不規則波中の各応答のスペクトルは、規則波中応答と波スペクトルとのかけあわせで評価できる。
- ・CAMライザーに働く漂流力は無視する。
- ・CAMライザーは細長体であるものとし、流体力はモリソン式を用いて評価する。
- ・係留チェーンの特性は伸びを考慮した静的なカタナリ一曲線で評価する。

3.2 連結された複数物体の運動方程式

複数の物体が各種拘束条件で連結された力学システムの運動を解くためには、それぞれの物体の拘束点での拘束条件を考慮して、拘束力を含んだ定式化を行う必要がある。Langley²⁾によって開発された拘束マトリックス法を用いれば、各物体間の拘束条件を自動的に満足させることができ、複数の物体からなる一点係留システムの解析に対して有効であることが報告されている⁴⁾。本研究でもこの方法に基づいて数値計算プログラムの開発を行った。以下簡単

に、拘束マトリックス法の内容を述べる。

3.2.1 構成要素の運動方程式

一般に N 個の物体が配置されているとき、各物体が連結されていないならば、各物体の運動方程式は次のようにかける。

$$[M_i]\{\ddot{\phi}_i\} + [B_i]\{\dot{\phi}_i\} + [K_i]\{\phi_i\} = \{F_{wi}\} \quad (1)$$

$$(i=1, 2, \dots, N)$$

ここで、

$[M_i]$ = 質量 + 付加質量行列

$[B_i]$ = 減衰係数行列

$[K_i]$ = 復原力係数行列

$\{F_{wi}\}$ = 外力ベクトル

ϕ_i = 変位ベクトル (6 自由度)

である。物体相互が連結されている場合は、連結部において拘束力が働くため、その拘束力ベクトルを $\{F_{ci}\}$ と書くと、運動方程式は次のようになる。

$$[M_i]\{\ddot{\phi}_i\} + [B_i]\{\dot{\phi}_i\} + [K_i]\{\phi_i\} = \{F_{wi}\} + \{F_{ci}\} \quad (2)$$

F_{ci} は一般に未知数であり、式(2)と連結部での変位の適合条件式を連立させて $\{\phi_i\}$, $\{F_{ci}\}$ が求められる。

3.2.2 拘束マトリックス法

3.2.1 節で示した方法では、変位の適合条件を物体の向き等を考慮して記述しなければならず、物体の数が増えると定式化が複雑になる。このような場合でも拘束マトリックス法を用いると、以下に示すように、機械的な操作で拘束条件を自動的に満足させることができる。

物体2の物体1によって拘束されないモードの回転変位を θ^{2r} 、物体3の物体2によって拘束されていないモードの回転変位を θ^{3r} というように表すと、 $\phi_i (i=1, N)$ の内独立なものは、 $\phi_1, \theta^{2r}, \theta^{3r}, \dots, \theta^{nr}$ であるから、

$$\{\phi_1 \theta^{2r} \dots \phi_n\}^T = [S]\{\phi_1 \theta^{2r} \dots \theta^{nr}\}^T$$

$$\phi = [S]\{x\} \quad (3)$$

とかける。ここで上付きの T は転値をとることを示す。

拘束された物体の運動変位を表すために用いた、各物体の拘束関係を表す行列 $[S]$ を拘束マトリックスと呼び、その具体的な形は Appendix に示す。

式(3)を式(2)に代入すると、

$$[M][S]\{\ddot{x}\} + [B][S]\{\dot{x}\} + [K][S]\{x\} = \{F_w\} + \{F_c\} \quad (4)$$

となる。さらに両辺に左から $[S]^T$ を作用させると、次式に示すように各物体間の拘束力 ($\{F_{ci}\}$) が運動方程式から消去される (Appendix 参照)。

$$[S]^T[M][S]\{\ddot{x}\} + [S]^T[B][S]\{\dot{x}\} + [S]^T[K][S]\{x\} = [S]^T\{F_w\} \quad (5)$$

3.2.3 物体間拘束力の求め方

拘束マトリックス法を用いることによって問題が簡単になるが、一方、実際的な問題として各連結点に作用する物体間拘束力を求めることは重要である。そこで、運動方程式を一度解いてから、Appendix の式(a.24)と式(a.27)で

算定している。

3.3 各物体に作用する流体力

CAM システムの構成要素たる各物体に作用する流体力は、以下のような方法によって求めた。

・船体の付加質量係数、造波減衰係数、波強制力は、3 次元特異点分布法によって求めた。

・船体に作用する変動漂流力は Pinkster⁵⁾ の方法を用いた。

・船体の長周期減衰力 F は、粘性減衰力を考慮して以下の式によって評価できるものとし、更にそれを等価線形化法を用いて考慮した。

$$F = 1/2 \rho L_{pp} B C_D u |u| \quad (C_D = 0.022)^{6),7)}.$$

ここで、 ρ は水の質量、 L_{pp} は船長、 B は船幅、 u は船体の前後動揺速度、 C_D は抗力係数である。

・CAM ライザーに作用する流体力は、モリソン式を用いて評価した。

4. 実験結果、数値計算結果の比較および考察

CAM システムの設計上重要と考えられる CAM ライザーの運動、CAM ライザーとヨークの連結部に働く内力及び CAM ライザー下端に取り付けられた係留ライン張力のそれぞれの規則波中応答 (RAO: Response Amplitude Operator) と不規則波中応答 (有義波高を 2 種類に変化させて実験を行ったが、紙面の都合上有義波高 ($H_{1/3}$) 6 cm, 平均波周期 (T_{01}) 1.7 sec. の場合のみについて示す) のスペクトル解析結果について実験と計算の結果を比較・考察する。

なお、CAM システムの復原力特性を Fig. 5 に示す。図中の go, return は、実験での荷重往復の往と復を示し、cal. は理論計算を表している。また、実験、計算の対象とした有義波高 6 cm, 平均波周期 1.7 秒の不規則波のスペクトラム (ISSC) を Fig. 6 に示す。

4.1 運動応答

4.1.1 CAM ライザーの運動応答

(1) 規則波中応答

CAM ライザー上端の x 方向、 z 方向の運動及び y 軸まわりの回転運動の応答の計測結果を理論計算結果と比較して、各々 Fig. 7, Fig. 8, Fig. 9 に示す。各図中には (a) 船体とヨーク間の相対ピッチ運動を自由にした場合と (b) 船体とヨーク間の相対運動を完全に拘束した場合について示している。 x 方向の水平変位及び y 軸まわりの回転は船体の前後揺れによってほとんど支配されるために、船体・ヨーク間が自由の場合と拘束の場合とでその応答特性に大きな違いは見られない。理論計算値は x 方向変位について、 $\lambda/L = 0.4 \sim 1.0$ の範囲で実験結果よりやや小さいが、これは船体前後揺れの理論計算値が実験結果に比べて同様の傾向を示しているためである。鉛直 (z) 方向の運動応答は、船体・ヨーク間の拘束状態の影響が大きい。船体・ヨーク間

Fig. 5 Displacement-force characteristics of the CAM system

が自由の場合には、CAM ライザー上端の鉛直方向変位は CAM ライザーそのものの上下揺れと同じ特性を示し、CAM ライザーの上下揺れの同調点において大きな応答を示す。一方、船体・ヨーク間が拘束されている場合には、CAM ライザー上端の鉛直方向変位は船体・ヨーク連結部の鉛直方向運動とほぼ同じ応答を示しているものと思われる。理論計算値は船体・ヨーク間が拘束されている場合に

Fig. 6 The power spectrum of the irregular waves

は、実験結果と良い一致を示すが、船体・ヨーク間が自由の場合には、CAM ライザーに働く流体力をモリソン式で評価するための抗力係数 C_D を 1.0 とすると、応答の同調点において実験結果に比べてかなり大きな値となる。そのため、係留チェーンに作用していると思われる減衰力を評価することを試みる意味で $C_D=6.0$ とする計算を行った。 $C_D=6.0$ 程度の値とすると実験値とよい一致を示すため、船体・ヨーク間が自由の時には、減衰力、特に係留チェーンに働く減衰力を考慮する必要があると考えられる。

(2) 不規則波中応答

不規則波中では実験結果および理論計算結果共に船体の定常変位は非常に小さな値 ($x/L_{pp}=3 \times 10^{-3}$ 程度) であった。

CAM ライザー底部の x 方向、 z 方向の運動及び y 軸まわりの回転運動の応答の計測結果から求められたスペクトルを理論計算結果と比較して、各々 Fig. 10, Fig. 11, Fig. 12 に示す。CAM ライザー底部の運動は、CAM ライザー上端の運動の計測結果より換算した。各図中には規則波中応答と同様に、(a) 船体とヨーク間の y 軸回りの相対運動を自由にした場合と (b) 船体とヨーク間の y 軸回りの相対運動を完全に拘束した場合について示している。また、有義

Fig. 7 Horizontal displacement at the top of the CAM riser

Fig. 8 Vertical displacements at the top of the CAM riser

Fig. 9 Angular displacements of the CAM riser

Fig. 10 The power spectrum of the horizontal displacements at the bottom of the CAM riser

Fig. 11 The power spectrum of the vertical displacements at the bottom of the CAM riser

Fig. 12 The power spectrum of the angular displacements of the CAM riser

Table 4 Significant values of motions of the CAM riser

長周期成分	ship-yoke free		ship-yoke fixed		波周期成分	ship-yoke free		ship-yoke fixed	
	cal.	exp.	cal.	exp.		cal.	exp.	cal.	exp.
$z/H_{1/3}$	0.83	0.47	0.92	0.45	$z/H_{1/3}$	1.03	0.61	1.03	0.63
$\dot{z}/H_{1/3}$	0.00	0.15	0.00	0.14	$\dot{z}/H_{1/3}$	1.72	1.35	1.78	1.72
$\theta_{1/3}(\text{deg})$	3.41	6.14	3.57	5.92	$\theta_{1/3}(\text{deg})$	2.5	3.16	2.53	3.19

値について実験結果と理論計算を比較したものを Table 4 に示す。

なお、ここでは示さないが船体の前後揺れに関しては、船体・ヨーク間の拘束状態によらず有義値を無次元化したもの ($x/H_{1/3}$) にして、理論計算は 2.5 に対し、実験値は 3.5

程度であり、30 % 程度理論計算値の方が小さな値をとる。この時、理論計算値は実験値に対して帯域幅が狭くピークが高くなっている。

x 方向運動 (Fig. 10) に関してみると、波周期成分 (0.2 Hz~2.5 Hz) でスペクトル形状はほぼ一致しており、ピーク高さ、平均周期が一致している。有義値を無次元化したもの ($x/H_{1/3}$) としては、波周期成分、長周期成分ともに船体・ヨーク間の拘束状態によらず、理論計算値の方が、実験値よりも大きい (2 倍程度)。

z 方向運動 (Fig. 11) に関してみると、規則波中応答と同様に実験値と理論計算値は良い一致が得られている。船体・ヨーク間が自由の時は固定したときと比較して、CAM ライザーの上下揺れの同調現象が現れるために周波数帯が狭くなりピークの高さが高くなっていることがわかる。有義値を無次元化したもの ($z/H_{1/3}$) で比較しても理論計算結果は実験結果とよく一致している。また x 方向運動では、長周期の成分が波周期の成分と比較して数十パーセントの面積を持っており無視することはできなかったが、 z 方向運動に関しては、長周期成分は非常に小さいことがわかる。

y 軸まわりの回転 (Fig. 12) は、波周期成分、長周期成分ともに船体・ヨーク間の拘束状態の影響は小さい。有義値で比較すると、波周期成分、長周期成分共に理論計算値の方が実験結果より小さい (1/2 程度)。この原因として、CAM ライザーの軸に垂直な方向に対する減衰係数 (モリソン式の減衰係数として 1.0 を使用) あるいは CAM ライザーの復原力が理論計算と実現象とで異なっていることが考えられる。

4.2 内力応答

4.2.1 CAM ライザーとヨークの連結部の内力応答

(1) 規則波中応答

CAM ライザーとヨークの連結部に働く CAM ライザーの軸方向及び軸と直角方向の内力応答の実験・理論計算結果を各々 Fig. 13, Fig. 14 に示す。船体・ヨーク間の拘束状態にかかわらず軸方向及び軸と直角方向の内力共に理論計算

Fig. 13 Vertical constraint forces acting between the CAM riser and the yoke

Fig. 14 Horizontal constraint forces acting between the CAM riser and the yoke

結果と実験結果との一致は良好である。軸方向の力は、船体・ヨーク間が自由の場合と完全拘束の場合とでその応答が大きく異なり、船体・ヨーク間が自由の場合には内力は非常に小さい。

(2) 不規則波中応答

CAM ライザーとヨークの連結部に働く CAM ライザーの軸方向及び、軸に直交な方向の内力応答のスペクトルに関する実験・理論計算結果を各々 Fig. 15, Fig. 16 に示す。また、Table 5 に有義値を無次元化したものを示す。

軸方向の力には、長周期成分が全く見られない。軸方向

Table 5 Significant values of the inner forces and mooring lines' tensions

長周期成分	ship-yoke free		ship-yoke fixed		波周期成分	ship-yoke free		ship-yoke fixed	
	cal.	exp.	cal.	exp.		cal.	exp.	cal.	exp.
$F_x / \rho g A_w H_{1/3}$	0.17	0.31	0.18	0.28	$F_x / \rho g A_w H_{1/3}$	0.52	0.49	0.52	0.50
$F_y / \rho g A_w H_{1/3}$	0.00	0.03	0.01	0.05	$F_y / \rho g A_w H_{1/3}$	0.02	0.09	0.81	1.25
$T_1 / \rho g A_w H_{1/3}$	0.072	0.067	0.073	0.069	$T_1 / \rho g A_w H_{1/3}$	0.10	0.10	0.11	0.15
$T_5 / \rho g A_w H_{1/3}$	0.072	0.060	0.073	0.057	$T_5 / \rho g A_w H_{1/3}$	0.069	0.075	0.051	0.070

力の波周期成分に関しては、有義値で比較すると、拘束力の大きい船体・ヨーク間が拘束されている時で 35 % 程度実験値と比較して理論値が小さいものの、スペクトルの帯域幅は一致している。また船体・ヨーク間の拘束状態を変え

Fig. 15 The power spectrum of the vertical constraint forces acting between the CAM riser and the yoke

Fig. 16 The power spectrum of the horizontal constraint forces acting between the CAM riser and the yoke

たときの軸方向の力の大幅な変化も理論計算によって推定されており、理論計算によって定性的な傾向を見ることは可能である。

一方、軸に直角方向の力については、まず波周期成分に関してみると、船体・ヨーク間の拘束状態の影響を軸方向力ほどは受けていないことがわかる。有義値と比較すると、理論と実験とはよく一致している。また、船体・ヨーク間を拘束したときの軸方向力のスペクトルのように、ある帯域でピークをもつというのではなく、全帯域にわたって均一な値を示している。この事は、CAMライザーの復原力が軸に直角な方向には存在しないために、運動応答が鋭いピークを持たないことが原因であると考えられる。

4.2.2 係留ライン張力の応答

(1) 規則波中応答

CAMライザー下端に取り付けた4本の係留ラインにつき、波上側係留ライン(T_1 , T_2), 波下側係留ライン(T_3 , T_4)に働く変動張力の応答をそれぞれ Fig. 17, Fig. 18 に示す。 T_1 と T_2 あるいは T_3 と T_4 とは原理的に同じ張力が働くはずであり、理論計算では同一の値となる。しかしながら、実験では必ずしも同じ張力とはならず、特に波上側の係留

ラインでは左右のラインに働く張力の差がかなり大きい。複数の係留ラインを均等に張ることが、実験上大変難しいことを示している。波上側係留ラインに働く変動張力は波下側係留ラインに働く変動張力に比べて大きい。これは波による波下側への船体の定常変位によって波上側ラインが張り、波下側ラインが緩んだ状態になっているためであると推察される。応答特性はCAMライザーの鉛直方向の運動応答と同じ傾向を示しており、CAMライザーと係留ラインとの取り付け部の上下運動が変動張力の主たる原因であると推察される。理論計算値は波下側係留ラインについては実験結果と良い一致を示すが、張力変動が大きく設計上重要と考えられる波上側係留ラインの張力については、実験結果に比べてかなり小さい。この理由としては、係留ラインの復原力特性、CAMライザー底部の運動の推定精度が十分でないことが考えられるが、詳細は今後の問題である。

(2) 不規則波中応答

チェーン張力の不規則波中の応答のスペクトルを波上側係留ライン、波下側係留ラインについて各々 Fig. 19, Fig. 20 に示す(実験結果は、波上側については T_1 , 波下側につ

Fig. 17 Tensions acting on the weatherside mooring lines

Fig. 18 Tensions acting on the leeward mooring lines

Fig. 19 The power spectrum of the tensions acting on the weatherside mooring lines

Fig. 20 The power spectrum of the tensions acting on the leeside mooring lines

いては T_3 についてのみ示す)。Table 5 に有義値を無次元化した値を示す。

長周期成分を見ると波上側ライン、波下側ライン共に、実験値の応答と比較してピークが高くなっている。長周期成分に関して、有義値と比較すると、船体・ヨーク間の拘束状態によらず、理論計算結果は実験結果とほぼ一致している。

次に波周期成分に関しては、波上側のチェーンの応答に注目すると、実験・理論計算ともに船体・ヨーク間が自由の時と比較して、固定の時は波周期成分の応答の帯域が広がっていることがわかる。これは、チェーン張力がCAMライザーの底部の運動の影響を直接的に受けるため、CAMライザーの z 方向運動の影響を受けているためであると考えられる。

また、波周期成分の有義値は、船体・ヨーク間の拘束状態によらず、理論と実験とは良い一致を示す。

理論計算では、静的なカテナリー曲線で張力を算定しているので、係留チェーンの動的な変動張力特性は考慮されていない。そこで Fig. 21 に、(株)三井造船昭島研究所の2次元水槽で、今回用いた係留チェーンを用いて、係留チェーンの動的な特性を検証するため、強制動揺試験を行った結果を示す。この時、強制動揺の周期 (T) は 1.0, 1.4, 1.7 秒、強制変位 (ζ_a) は片振幅で 20, 50, 100 mm として行った。計測された全張力から、準静的に変位させたときの張力を差し引いたものを、動的成分として表してある。

Fig. 21 (a) が水平方向へ強制動揺した結果である。変動

Fig. 21 The dynamic effects on the mooring line tensions

張力に占める動的張力の割合は、実験を行った範囲では、動揺周期や、振幅によらずほぼ一定で30～40%である。この結果を、不規則波中実験の結果と比較すると、船体・ヨーク間の拘束状態によって少し異なるものの、係留ライン取付部は40 mm程度変位しているため、計測された変動張力には30%程度の動的な張力が含まれていると考えられる。

Fig. 21(b)に示した鉛直方向へ強制動揺の結果によると、水平方向への強制動揺とは異なり、動揺周期や、動揺振幅によって動的影響は大きく異なる。不規則波中の実験では、チェーンの取付部の鉛直方向の運動は40～50 mm程度の振幅、平均周期1.7秒で振動している。Fig. 21(b)に示した結果から推定するとこの時の動的な張力変動は全張力の20%程度であったと推察される。このように、係留チェーン張力の動的な影響が無視できない大きさであることがわかるが、実際には理論計算値と、実験値がほぼ一致している。このことは以下のように説明できる。

船体・ヨーク間が自由の時には、理論計算では動的影響を考慮していないためCAMライザー下端の z 方向運動が、実験値の z 方向運動よりも大きくなる。これは、理論計算値の方が実験値よりも大きな張力変動を与える要因である。今回の実験では、この効果と係留チェーンの動的影響による張力増加がほぼ同程度であったため、有義値のレベルで比較すると理論計算と実験が一致する原因になるものと思われる。一方、船体・ヨーク間の相対運動が拘束されている場合には、張力変動の動的効果のみが現れるため実験値の方が、理論値よりも約20%大きな張力を示していると考えられるのではなかろうか。

5. 結 言

中水深用一点係留システムとしてのCAMシステムの規則波中及び、不規則波中挙動に関して実験、理論計算両面から検討した結果、以下のことが明らかになった。

① Langleyによって提案された拘束マトリックス法に基づいた理論計算によって、CAMシステムの規則波中挙動をほぼ良く推定できる。ただし、CAMライザーの上下揺れについては、係留ラインに働く減衰力を精度よく考慮することが必要である。また、係留ライン張力については、係留ラインの復原力特性や係留ライン取付部の変位（特に鉛直方向変位）を精度よく推定することが必要である。

② 不規則波中の応答については、各部の運動や、構成要素間の長周期応答成分の理論計算結果が実験結果と比較して、有義値としてはほぼ一致しているものの応答のピークが鋭くなっており、帯域幅が狭くなっている。CAMシステムの長周期応答は、タンカーの水平方向の長周期運動に主として支配されていると考えられるから、タンカーの水平方向長周期運動を精度良く推定することが必要であり、そのためには特に長周期運動時の減衰力を正しく考慮する

ことが重要であると考えられる。

③ タンカーとヨーク間の相対縦揺を自由にした場合、相対縦揺を拘束した場合と比べて、連結部に働く力、係留ラインに働く張力が小さくなるため、タンカー・ヨーク間の相対縦揺を自由にした方が有利なシステムであるといえる。

謝 辞

本研究は、一点係留に関する研究を行うTM研究会((株)三井造船昭島研究所と東京大学との共同研究)の一部として行われたものであり、本研究の様々な過程で助言を頂いた、東京大学工学系研究科船舶海洋工学専攻藤野正隆教授、(株)三井造船昭島研究所海洋エンジニアリング事業部小林正典事業部長、また水槽実験に協力をしていただいた、東京大学工学系研究科船舶海洋工学専攻石井祐司技官、(株)三井造船昭島研究所海洋土木技術部のみなさん、運輸省船舶技術研究所渡辺巖博士に心から感謝申し上げます。

参 考 文 献

- 1) Jack Pollack: Single Point Mooring in Ice Infested Waters, Civil Engineering in the Arctic Offshore, Arctic 85 (1985), 309-322
- 2) R. S. Langley: Random dynamic analysis of multi-body offshore structures, Ocean Engineering, Vol 11 (4) (1982), 381-401
- 3) 三上隆: 中水深用一点係留CAMシステムの挙動に関する研究, 東京大学工学系研究科船舶海洋工学専攻修士論文, (1993)
- 4) 佐尾邦久, 沼田敏晴, 菊野敏: 一点係留システムの解析法 (その1), 日本造船学会論文集, 第162号, (1984), 257-266
- 5) J. A. Pinkster: Low-Frequency Phenomena associated with Vessels Moored at Sea, Society of Petroleum Engineers Journal, SPE 4837, (1975)
- 6) J. E. W. Wichers: A Simulation Model for a Single Point Moored Tanker, Maritime Research Institute Netherlands, Publication No. 797, 103
- 7) 小保方準, 佐々木紀雄, 永島実郎: 模型試験による船体に働く潮流力の推定, 関西造船協会誌, 第180号, (1981)

付録: $[S]^T \{F_{ci}\} = 0$ の証明

A.1. 拘束行列

Fig. A.1に示すように、ヒンジ結合された2個の物体について考察する。座標系を右手系として、

空間固定座標 $O-XYZ$

物体1固定座標 $O_1-x_1y_1z_1$

物体2固定座標 $O_2-x_2y_2z_2$

連結点固定座標 $Q-n_1n_2n_3$

と定義し、物体1, 物体2固定座標から空間固定座標への座標変換行列を各々 $[R_1], [R_2]$ と定義する。

Fig. A.1 Co-ordinate system for connected bodies

すなわち、

$$\{XYZ\}^T = [R_i]\{x_i y_i z_i\}^T \quad (\text{a.1})$$

物体1と物体2はQ点で接続されているものとし、各々の座標系における位置ベクトルを r_1, r_2 と表すものとする。Q- $n_1 n_2 n_3$ を O_2 - $x_2 y_2 z_2$ に平行に定めると、物体1及び物体2の回転は、Q- $n_1 n_2 n_3$ において

$$\text{物体1の回転} = [R_2]^{-1}[R_1]\{\theta^1\} \quad (\text{a.2})$$

$$\text{物体2の回転} = \{\theta^2\} \quad (\text{a.3})$$

と表される。

物体は2個であるので、本来12の自由度を持つが、連結点Qでの自由な回転のできるモードが m 個であるとすれば、

12行 $(6+m)$ 列 ($m=0, 1, 2$)

の拘束行列 S が次式で定義される。

$$\begin{Bmatrix} d^1 \\ \theta^1 \\ d^2 \\ \theta^2 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} d^1 \\ \theta^1 \\ d^{2r} \end{Bmatrix} \quad (\text{a.4})$$

$$[S] = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times m} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & O_{3 \times m} \\ A_{3 \times 3} & B_{3 \times 3} & C_{3 \times m} \\ O_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & M_{3 \times m} \end{bmatrix} \quad (\text{a.5})$$

ここに、

θ^{2r} = 物体2の拘束されていない回転運動モード

d^i = 物体 i の平行変位ベクトル

θ^i = 物体 i の回転変位ベクトル

$I_{3 \times 3}$ = 単位行列

$O_{3 \times 3}$ = 零行列

式(a.4)は、物体2の6モードの運動が、物体1の6モードの運動と物体2の自由な回転モードによって表されることを示している。式(a.5)中の M, N 及び A, B, C の行列は連結点での各拘束条件に応じて以下のように表せる。

A.1.1 拘束係数 M 及び N の決定

(1) 完全拘束の場合 ($m=0$) 物体1と物体2は、剛体

結合であるから、式(a.2)と式(a.3)は等しく、

$$\{\theta^2\} = [R_2]^{-1}[R_1]\{\theta^1\} \quad (\text{a.6})$$

となり、 $[N], [M]$ の定義より、

$$\begin{Bmatrix} [N] \\ [M] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [R_2]^{-1}[R_1] \\ [O] \end{Bmatrix} \quad (\text{a.7})$$

となる。

(2) 回転自由度1の場合 ($m=1$) 連結点座標系 Q- $n_1 n_2 n_3$ において、 n_i, n_j が拘束され、 n_k が自由とする。式(a.2)及び、式(a.3)を

$$[R_2]^{-1}[R_1]\{\theta^1\} = \begin{Bmatrix} (R_2^{-1}R_1)_i \\ (R_2^{-1}R_1)_j \\ (R_2^{-1}R_1)_k \end{Bmatrix} \{\theta^1\} \quad (\text{a.8})$$

$$\{\theta^2\} = \{\theta_p^2 \theta_q^2 \theta_r^2\}^T \quad (\text{a.9})$$

のように成分毎に書き、連結点座標系 Q- $n_1 n_2 n_3$ において、 n_i および n_j 軸回りの回転が拘束され、 n_k 回りの回転が自由であるとすると、 i 行及び、 j については、式(a.8)と式(a.9)は等しくなるから、

$$\begin{Bmatrix} \theta_p^2 \\ \theta_q^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (R_2^{-1}R_1)_i \\ (R_2^{-1}R_1)_j \end{Bmatrix} \{\theta^1\} \quad (\text{a.10})$$

となる。一方、 $[N], [M]$ の定義から、

$$\{\theta^2\} = [N]\{\theta^1\} + [M]\{\theta^{2r}\} \quad (\text{a.11})$$

となり、式(a.10)、式(a.11)を比較して、

$$[N] = \begin{bmatrix} (R_2^{-1}R_1)_i \\ (R_2^{-1}R_1)_j \\ O_{1 \times 3} \end{bmatrix}, [M] = \{0 \ 0 \ 1\}^T \quad (\text{a.12})$$

を得る。

(3) 回転自由度2の場合 ($m=0$) 連結座標系 Q- $n_1 n_2 n_3$ において、 n_i 軸回りに拘束され、 n_j と n_k については回転自由とすると、自由度1の場合と同様に、自由回転モード i 行について式(a.8)と式(a.9)と等置して、次式の拘束条件が得られる。

$$[N] = \begin{bmatrix} (R_2^{-1}R_1)_i \\ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \end{bmatrix}, [M] = \begin{bmatrix} 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \\ 0 \ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{a.13})$$

(4) 非拘束の場合 ($m=0$) この場合は、物理的考察により、直ちに次式が得られる。

$$[N] = [O_{3 \times 3}], [M] = [I_{3 \times 3}] \quad (\text{a.14})$$

A.1.2 A, B, C の決定

連結点Qの変位を物体1および物体2の座標系に変換した後、空間固定座標系に変換したとき、両者は同じにならないため、

$$[R_1](\{d^1\} + \{\theta^1\} \times \{r_1\}) = [R_2](\{d^2\} + \{\theta^2\} \times \{r_2\}) \quad (\text{a.15})$$

という関係が導かれる。

ここで r_i は物体 i 固定座標系での連結点の座標ベクトルであり、

$$\{r_i\} = (a_i b_i c_i)^T, [A_i] = \begin{bmatrix} 0 & c_i & -b_i \\ -c_i & 0 & a_i \\ b_i & -a_i & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{a.16})$$

と表すと、式(a.15)は

$$\{d^2\} = [R_2]^{-1} [R_1] (\{d^1\} + [A_1] \{\theta^1\}) - [A_2] \{\theta^2\} \quad (\text{a.17})$$

と書き換えられる。

この式に式(a.11)を代入すると、

$$\begin{aligned} \{d^2\} &= [R_2]^{-1} [R_1] (\{d^1\} + [R_2]^{-1} [R_1] [A_1] \{\theta^1\} \\ &\quad - [A_2] [N] \{\theta^1\} - [A_2] [M] \{\theta^{2r}\}) \end{aligned} \quad (\text{a.18})$$

A, B, C の定義より、

$$[A] = [R_2]^{-1} [R_1] \quad (\text{a.19})$$

$$[B] = [R_2]^{-1} [R_1] [A_1] - [A_2] [N] \quad (\text{a.20})$$

$$[C] = -[A_2] [M] \quad (\text{a.21})$$

が得られる。

A.2 物体間拘束力

以下、物体が2つの場合を記述する。物体が3つ以上の場合も同様に証明できる。

拘束点において各物体に働いている力を、 Q - $n_1 n_2 n_3$ 系で表した時、

物体1に働いている力： $\tilde{f}_{1c}$

物体2に働いている力： $\tilde{f}_{2c}$

ここで、拘束点におけるすべりは許されないとすると、

$$\tilde{f}_{1c} + \tilde{f}_{2c} = \mathbf{0} \quad (\text{a.22})$$

$\tilde{f}_{1c}$ を $o_1-x_1y_1z_1$ 座標系で表したものを $\tilde{F}_{1c}$ とすると、

$$\tilde{F}_{1c} = [R_1]^{-1} [R_2] \tilde{f}_{1c} \quad (\text{a.23})$$

$\tilde{f}_{2c}$ を $o_2-x_2y_2z_2$ 座標系で表したものを $\tilde{F}_{2c}$ とすると、

$$\tilde{F}_{2c} = \tilde{f}_{2c} \quad (\text{a.24})$$

拘束点において各物体に働いているモーメントを Q - $n_1 n_2 n_3$ 系で表した時、

物体1に働いているモーメント： $\tilde{m}_{1c}$

物体2に働いているモーメント： $\tilde{m}_{2c}$

(ただし、 $\tilde{m}_{1c}$, $\tilde{m}_{2c}$ のうち拘束されていないモードについてはその成分はゼロ)

$$\tilde{m}_{1c} + \tilde{m}_{2c} = \mathbf{0} \quad (\text{a.25})$$

拘束点における力、モーメントに基づく $o_1-x_1y_1z_1$ 系の原点まわりのモーメント $\tilde{M}_{1c}$ を、 $o_1-x_1y_1z_1$ 系で表すと、

$$\tilde{M}_{1c} = [R_1]^{-1} [R_2] \tilde{m}_{1c} + \tilde{r}_1 \times \tilde{F}_{1c} \quad (\text{a.26})$$

拘束点における力、モーメントに基づく $o_2-x_2y_2z_2$ 系の原点まわりのモーメント $\tilde{M}_{2c}$ を、 $o_2-x_2y_2z_2$ 系で表すと、

$$\tilde{M}_{2c} = \tilde{m}_{2c} + \tilde{r}_2 \times \tilde{F}_{2c} \quad (\text{a.27})$$

式(a.22)より、

$$R_2^{-1} R_1 \tilde{F}_{1c} + \tilde{F}_{2c} = \mathbf{0} \quad (\text{a.28})$$

式(a.25)より、

$$R_2^{-1} R_1 (\tilde{M}_{1c} + A_1 \tilde{F}_{1c}) + (\tilde{M}_{2c} + A_2 \tilde{F}_{2c}) = \mathbf{0} \quad (\text{a.29})$$

式(a.28)、(a.29)より、

$$\begin{bmatrix} \tilde{F}_{1c} \\ \tilde{M}_{1c} \\ \tilde{F}_{2c} \\ \tilde{M}_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} \\ (-R_2^{-1} R_1)_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ (-R_2^{-1} R_1 A_1 + A_2 R_2^{-1} R_1)_{3 \times 3} & (-R_2^{-1} R_1)_{3 \times 3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1c} \\ \tilde{M}_{1c} \end{bmatrix} \quad (\text{a.30})$$

$$\equiv [S_0] (\tilde{F}_{1c} \tilde{M}_{1c})^T \quad (\text{a.31})$$

式(a.31)の左から式(a.5)で定義される拘束行列 $[S]$ の転置行列をかけると、

$$[S]^T \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1c} \\ \tilde{M}_{1c} \\ \tilde{F}_{2c} \\ \tilde{M}_{2c} \end{bmatrix} = [S]^T [S_0] \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1c} \\ \tilde{M}_{1c} \end{bmatrix}$$

ここで、

$$[S] = \begin{bmatrix} I_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} & O_{3 \times m} \\ O_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & O_{3 \times m} \\ (R_2^{-1} R_1)_{3 \times 3} & (R_2^{-1} R_1 A_1 - A_2 R_2^{-1} R_1)_{3 \times 3} & (-A_2 M)_{3 \times m} \\ O_{3 \times 3} & N_{3 \times 3} & M_{3 \times m} \end{bmatrix} \quad (\text{a.32})$$

だから、

$$\begin{aligned} [S]^T [S_0] &= \begin{bmatrix} \{I - (R_2^{-1} R_1)^T R_2^{-1} R_1\}_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ \{-(R_2^{-1} R_1 A_1 - A_2 R_2^{-1} R_1)^T R_2^{-1} R_1 - N^T (R_2^{-1} R_1 A_1 - A_2 R_2^{-1} R_1)\}_{3 \times 3} & \{I - N^T (R_2^{-1} R_1)\}_{3 \times 3} \\ \{(A_2 M)^T R_2^{-1} R_1 - M^T (R_2^{-1} R_1 A_1 - A_2 R_2^{-1} R_1)\}_{m \times 3} & -M^T \{(R_2^{-1} R_1)\}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} O_{3 \times 3} & O_{3 \times 3} \\ (A_1 - N^T R_2^{-1} R_1 A_1)_{3 \times 3} & \{I - N^T (R_2^{-1} R_1)\}_{3 \times 3} \\ (-M^T R_2^{-1} R_1 A_1)_{m \times 3} & \{-M^T (R_2^{-1} R_1)\}_{m \times 3} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{a.33})$$

従って、

$$[S]^T \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1c} \\ \tilde{M}_{1c} \\ \tilde{F}_{2c} \\ \tilde{M}_{2c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{0}_{3 \times 1} \\ (\tilde{v}_1)_{3 \times 1} \\ (\tilde{v}_2)_{m \times 1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (A_1 - N^T R_2^{-1} R_1 A_1) \tilde{F}_{1c} + (I - N^T R_2^{-1} R_1) \tilde{M}_{1c} \\ &= (I - N^T R_2^{-1} R_1) (A_1 \tilde{F}_{1c} + \tilde{M}_{1c}) \end{aligned} \quad (\text{a.34})$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2 &= -M^T R_2^{-1} R_1 A_1 \tilde{F}_{1c} - M^T R_2^{-1} R_1 \tilde{M}_{1c} \\ &= -M^T R_2^{-1} R_1 (A_1 \tilde{F}_{1c} + \tilde{M}_{1c}) \end{aligned} \quad (\text{a.35})$$

となる。このとき、 $\tilde{v}_1 = 0$, $\tilde{v}_2 = 0$ がいえれば $[S]^T \{F_{ci}\} = 0$ である。

A.2.1 $\tilde{v}_1 = 0$ の証明

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1 &= (I - N^T R_2^{-1} R_1) (A_1 \tilde{F}_{1c} + \tilde{M}_{1c}) \\ &= (I - N^T R_2^{-1} R_1) R_1^{-1} R_2 \tilde{m}_{1c} \\ &= (R_1^{-1} R_2 - N^T) \tilde{m}_{1c} \end{aligned} \quad (\text{a.36})$$

となる。この時、物体間の拘束状態によって N がかわるため、拘束状態によって場合分けをすると、

(1) 完全拘束の場合 ($m=0$)

$$N=R_2^{-1}R_1, N^T=R_1^{-1}R_2 \quad (\text{a.37})$$

なので、式(a.36)に代入すると、

$$\bar{v}_1=O \quad (\text{a.38})$$

となる。

(2) 回転自由度1の場合 ($m=1$) 自由モードが i であるとき、

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= (R_2^{-1}R_1 - N)^T \bar{m}_{1c} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} (R_2^{-1}R_1)_i \\ (R_2^{-1}R_1)_j \\ (R_2^{-1}R_1)_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (R_2^{-1}R_1)_j \\ (R_2^{-1}R_1)_k \end{bmatrix} \right\}^T \bar{M}_{1c} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ m_j \\ m_k \end{bmatrix} \\ &= [0 \ 0 \ 0]^T \quad (\text{a.39}) \end{aligned}$$

となる。自由モードが j, k の場合も同様に証明できる。

(3) 回転自由度2の場合 ($m=2$) 自由な回転モードを i, j とすると、

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} (R_2^{-1}R_1)_i \\ (R_2^{-1}R_1)_j \\ (R_2^{-1}R_1)_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ (R_2^{-1}R_1)_k \end{bmatrix} \right\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_k \end{bmatrix} \\ &= [0 \ 0 \ 0]^T \quad 0 \ 0 \ 0 \quad (\text{a.40}) \end{aligned}$$

となる。自由モードが j, k あるいは k, i の場合にも同様に証明できる。

(4) 非拘束の場合 ($m=3$) 非拘束の場合は、 $\bar{m}_{1c}=O$

であるために、 $\bar{v}_1=O$ は自明である。

A.2.2 $\bar{v}_2=0$ の証明

$$\begin{aligned} \bar{v}_2 &= -M^T R_2^{-1} R_1 (A_1 \bar{F}_{1c} + \bar{m}_{1c}) \\ &= -M^T R_2^{-1} R_1 (R_1^{-1} R_2 \bar{m}_{1c}) \\ &= -M^T \bar{m}_{1c} \quad (\text{a.41}) \end{aligned}$$

(1) 完全拘束の場合 ($m=0$)

$$M=O \quad (\text{a.42})$$

であるため、

$$\bar{v}_2=O \quad (\text{a.43})$$

となる。

(2) 回転自由度1の場合 ($m=1$) 自由モードが i の場合、

$$\begin{aligned} M^T \bar{M}_{1c} &= \{1 \ 0 \ 0\} \{0 \ m_j \ m_k\}^T \\ &= \{0 \ 0 \ 0\}^T \quad (\text{a.44}) \end{aligned}$$

自由モードが j, k の場合も同様に証明できる。

(3) 回転自由度2の場合 ($m=2$) 自由モードが i, j の場合、

$$M^T \bar{M}_{1c} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_k \end{bmatrix} \quad (\text{a.45})$$

$$= \{0 \ 0 \ 0\}^T \quad (\text{a.46})$$

(4) 非拘束の場合 ($m=3$) 非拘束の場合は、 $\bar{m}_{1c}=O$ であるために、 $\bar{v}_2=O$ は自明である。